الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

N° Réf :...............

Centre Universitaire de Mila

Institut des Sciences et de la Technologie

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de licence
en- Filière : Mathématiques Fondamentales

Thème

Méthode De Simplexe

Préparé par : -Leyla DAAS
-Samra LEKNOUCHE
-Wissem BOUGUERIOUNE
-Meryem BELATTAR

Encadreur : K. BAICHE

Grade : M.A.B

Année universitaire : 2013/2014

Remerciements

Louange à dieu tout puissant de nous avoir aidé, éclairé le Chemin pour achever notre travail et nos études.

Un remerciement particulier à notre encadreur M K.BAICHE Pour sa présence, son aide et surtout pour ses précieux conseils qui nous ont assistés pour l'accomplissement de notre mémoire.

Nos remerciements à nos très chers parents, frères, sœurs, Collègues amis respectifs qui nous ont encouragées, soutenues durant tout notre parcours.

Nous tenons à exprimer nos sincères remerciements à toutes les personnes de l'institut de sciences et de la technologie surtout les enseignants qui nous ont enseigné durant toutes nos années d'étude.

Enfin nous remercions toutes les personnes qui ont contribué de prés ou de loin à l'achèvement de ce travail.

Merci bien.

Table des matières

Introduction générale

L'optimisation est une branche des mathematique cherchant à analyser et résoudre des problémes de décision qui consiste généralement a déterminer le meilleur élément (décision) d'un ensemble a fin de maximiser ou minimiser un critère qualitatif qui mésure la qualité de la décision. la méthode de simplexe a été développée en 1947 par George Bernard Dantzig depuis la deuxième guerre mondiale. Jusqu'en 1984, l'algorithme du simplexe était le seul algorithme connu et utilisé pour la résolution des problèmes linéaires qu'est étudie la résolution optimale de certaines problèmes de minimisation ou maximisation d'une fonction linéaire, qui a le sens économique d'un coût ou d'un profit, sous des contraintes linéaires d'égalité et/ou d'inégalité.

L'objectif de ce mémoire est de présenter la méthode du simplexe qui résoluer les programmes linéaire. Dans les deux cas, le but consiste à trouver les valeurs qui maximisent ou minimisent une fonction. Toute fois dans l'optimisation avec contraintes, les solutions sont soumises à des contraintes d'égalités ou d'inégalités.

Ce mémoire est composé d'une introduction générale, trois chapitres et une conclusion générale, Dans le premier chapitre, nous présentons l'optimisation classique qui contient deux types de problèmes : l'optimisation sans contrainte, et l'optimisation avec contraintes. le deuxième chapitre est consacré à la résolution des problèmes de programmation linéaire avec contraintes d'égalité à variables bornées ; Et dans le troizième chapitre, on va exposer la caractérisation du points extermes, critère d'optimalité et l'algorithme du simplexe.

Finalement, ce mémoire s'achève par une conclusion générale et une bibliographie.

Chapitre 1

L'optimisation sans et avec contrainte

Introduction

Dane ce chapitre on va étudie l'optimisation sans contrainte et avec contrainte par les forme d'un problème d'optimisation.

1.1 Préliminaires

1.1.1 Ensembles convexes

Définition 1 *: Un ensemble D de $\mathbb{R}^n$ est dit **convexe** si :*

$\forall x_1, x_2 \in D, \lambda \in [0,1]$, on a :$(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2 \in D$.

Exemple 1 *:*

1- La boule unité $U = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \leq 1\}$ est un ensemble convexe.

2- Les ensembles suivantes (où βest un réelle et $b \in \mathbb{R}^n$) : $\left\{x \in \mathbb{R}^n, b^T x \geq \beta\right\}$ et $\left\{x \in \mathbb{R}^n, b^T x \leq \beta\right\}$ sont appelés demi-espaces fermés, et les ensembles : $\left\{x \in \mathbb{R}^n, b^T x > \beta\right\}$, et $\left\{x \in \mathbb{R}^n, b^T x < \beta\right\}$ sont appelés demi-espaces ouverts.

Les deux demi-espaces (fermés et ouverts) sont convexes.

3- Les ensembles de la forme : $P = \{x \in \mathbb{R}^n, Ax \leq b\}$ où A est une $(m \times n)$ matrice réelle et $b \in \mathbb{R}^n$ sont appelés polyèdres. Les polyèdres sont convexes et fermés.

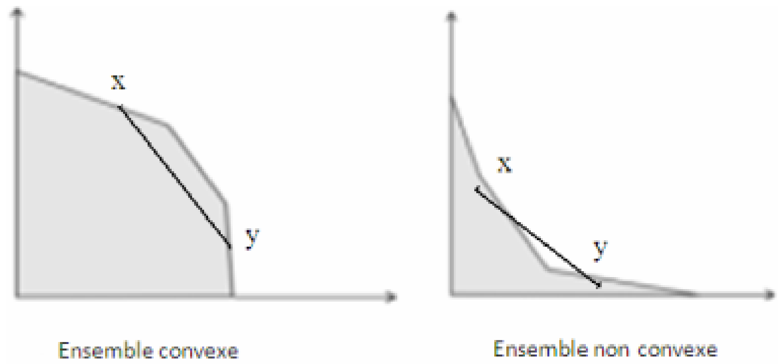

Figure (1.1)- Ensemble convexes et non convexes.

1.1.2 Fonctions convexe et coercive

Définition 2 *: Une fonction $f : E \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur un ensemble convexe*

D est dite convexe si et seulement si :

$\forall (x, y) \in E^2, \forall \lambda \in [0, 1], \ f(\lambda x + (1 - \lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y)$.

f est dite strictement convexe si $\forall (x, y) \in E^2$ t.q $x \neq y$ et $\lambda \in]0, 1[$,

$$f(\lambda x + (1 - \lambda) y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y).$$

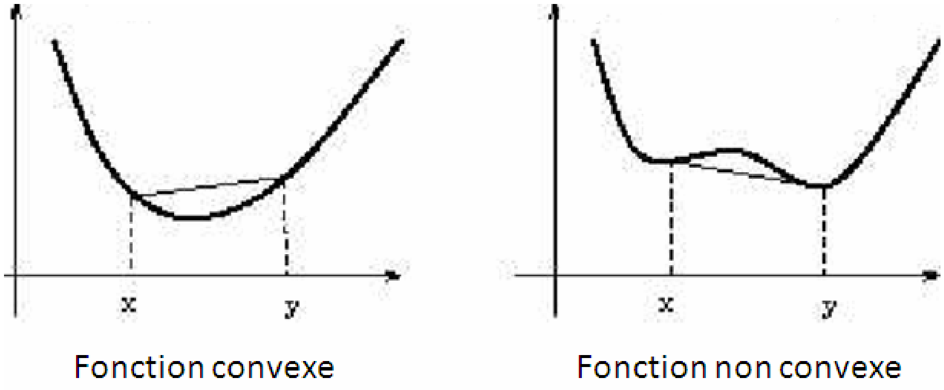

Figure (1.2)- Fonction convexe et non convexe.

Définition 3 *: On dit que $f : D \longrightarrow R$ est coercive si* $\lim\limits_{\|x\| \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

1.2 Optimisation sans contrainte

1.2.1 La forme d'un problème d'optimisation sans contrainte

Soit le problème d'optimisation sans contrainte :

$$(P) \begin{cases} \min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} f(x), \quad \text{où } f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}. \end{cases}$$

Cette problème peut s'écrire :

Trouver $x^* \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(x^*) \leq f(y), \forall y \in \mathbb{R}^n$.

Remarque 1 *:*

1- on dit que $x^* \in D$ est un minimum local de f sur D si et seulement si :

$$\exists \varepsilon \geq 0 / f(x^*) \leq f(x), \forall x \in B(x^*, \varepsilon) \cap D.$$

2- on dit que $x^* \in D$ est un minimum global f sur D si et seulement si :

$$f(x^*) \leq f(x), \forall x \in D.$$

1.2.2 Résultats d'existence et d'unicité

Théorème 1 *: **(Existence)***

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ un application telle que :

(i) f est continue.

(ii) $f(x) \longrightarrow +\infty$ quand $\|x\| \longrightarrow +\infty$ (on dit que f est coercive)

alors il existe un $x^* \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(x^*) \leq f(y)$ $\forall y \in \mathbb{R}^n$.

Théorème 2 *: **(Existence et unicité)***

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.On suppose que :

(i) f est continue.

(ii) $f(x) \longrightarrow +\infty$ quand $\|x\| \longrightarrow +\infty$.

(iii) f est strictement convexe.

alors il existe un unique $x^* \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(x^*) = \inf f$.

1.2.3 Les conditions d'optimalités

A) Condition nécessaires et suffisantes du premier ordre :

Les conditions que nous allons donner sont des conditions différentielles qui dépendente de la dérivée de la fonction à minimiser.

Théorème 3 *: **(condition nécessaire d'optimalité du premier ordre)***
Soit D une partie de R^n et $f : D \longrightarrow R$ une fonction différentiable sur D, si x^* réalise un minimum (global ou local) de f sur D alors $\nabla f(x^*) = 0$.

Définition 4 *: Un point x^* de D vérifiant $\nabla f(x^*) = 0$ est appelé* ***"point critique"*** *ou* ***"point stationnaire".***

Théorème 4 *: (CNS du premier ordre dans le cas convexe)*

Soit $f : D \longrightarrow R$ fonction différentiable et convexe sur D, un point x^*réalise un minimum global de f sur D si et seulement si $\nabla f(x^*) = 0$.

Remarque 2 *:*

On peut raffiner le résultat précédent en ne supposant que la locale convexité de f au voisinage de x^*, c'est-à-dire en supposant que f est convexe sur une boule centrée en x^*.

A ce moment là, nous pouvons affirmer que x^* est un minimum "local" de f.

Le cas où f est convexe est fréquent dans la pratique mais pas systématique. Nous allons donc donner maintenant des conditions suffisantes pour qu'un point critique réalise un minimum (ou un maximum). Ces conditions vont faire intervenir la dérivée seconde de f, ce sont des conditions du "second ordre".

B) Conditions du second ordre :

Nous commençons par une condition nécessaire permettant de préciser encore les éventuels minimax.

Théorème 5 *: (Condition nécessaire du second ordre)*

On suppose que x^*est un minimum (local) de f et que f est deux fois différentiables sur C, alors :

a) $\nabla f(x^*) = 0$.

b)$\forall x \in D$, $\langle \nabla^2 f(x^*)x, x\rangle \geqslant 0$.

Dans le cas où $D = R^n$, b est équivalent à dire que la matrice Hessienne de f en x^* : $\nabla^2 f(x^*)$ est semi-d éfinie positive.

Théorème 6 *: (Condition suffisante du second ordre)*

Soit f deux fois dérivable sur D vérifiant $\nabla f(x^*) = 0$ et $\exists \alpha > 0$, tel que

$\forall x \in D$, $\langle \nabla^2 f(x^*)x, x\rangle \geqslant \alpha \|x\|^2$..... (1.1)

alors la fonction f admet un minimum "local strict" en x^*.

Remarque 3 *:*

Si $D = R^n$ la condition (1.1) revient à dire que la matrice Hessienne $\nabla^2 f(x^*)$ est définie positive, un choix possible pour α étant alors la plus petite valeur propre, c'est une condition de convexité (locale) stricte au voisinage de x^*.

1.3 L'optimisation avec contrainte

1.3.1 La forme de problème d'optimisation avec contrainte

Soit le problème d'optimisation avec contrainte :

$$(P)\begin{cases} \min f(x) \\ x \in D \end{cases}$$

où $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ et D un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$ $(D \subset \mathbb{R}^n)$ appelèe ensemble contrainte.

Ces contraint sont donnèes à l'aide de fonction au moins continues (i.e les fonction g_i , $h_j \subset C^1(\mathbb{R}^n)$ plusiours formes :

Contraintes d'égalités

L'ensemble des contraintes est donnée par :

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n / h_j(x) = 0, \forall j = 1, ..., l\}.$$

Contraintes d'inégalitès

L'ensemble des contraintes est donnée par :

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n / g_i \leq 0, \forall i = 1, ..., m\}.$$

Contraintes d'égalitès et d'inégalités

L'ensemble des contraintes est donnée par :

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n / h_j(x) = 0, \forall j = 1, ..., l \text{ et } g_i(x) \leq 0, \forall i = 1, ..., m\}.$$

1.3.2 Résultats d'existence et d'unicité de solution d'un problème d'optimalité

La plus part des théorème d'éxistence d'un minimum sont des variantes du théorème de **zeirstrass**

Théorème 7 *: (Existence)*

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ un fonction continue et soit D un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$, alors f possède un minimum $x^* \in D \in (i, e.\exists x^* \in D/f(x^*) = \min f(x))$dans l'un de deux cas suivante :

1- si D est un compact (fermé et borné) de $\mathbb{R}^n$.

2- si D est un fermé et coercive $\left(\lim\limits_{\|x\| \longrightarrow \infty} f(x) = \infty \right)$.

Théorème 8 *: (Unicité)*

Soit f une fonction strictement convexe sur l'ensemble convexe D, alors il existe du plus un minimum global $x^* \in D$ de f.

Théorème 9 *: (Existence et Unicité)*

Soit f une fonction strictement convexe sur D, et D un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$ convexe et fermé, alors si D est borné ou f et convexe, il existe un unique minimum global $x^* \in D$ de f, c'est-a-dire :

$$\exists! x^* \in D/f(x) = \min_D f(x).$$

1.3.3 Conditions d'optimalité

Proposition 1 *: (Condition nécéssaire)*

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^1(\mathbb{R}^n)$ et D un ensemble de $\mathbb{R}^n$ et $x^* \in D$ tel que $f(x^*) = \min\limits_D f(x)$, alors :

1- Si $x^* \subset int(D)$, alors $\nabla f(x^*) = 0$.

2- Si D est convexe, alors($\nabla f(x^*), x - x^*) \geq 0$, $\forall x \in D$.

3- Si f est deux fois différentiable, alors $\nabla_f^2 (x^*)$ la matrice hessienne de f au point x^* est définie positive.

Cas des contrainte d'inégalité

On suppose dans cette partie que l'ensemble D sur le quel on vent minimuser f , est donné par des contraintes d'inégalité, (i,e). on a le problème :

$$(P)\begin{cases}\min\limits_{x\in D} f(x)/f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\end{cases}$$

tel que :

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n / g_i(x) \leq 0, \forall i = 1, ..., m\}.$$

Où les g_i sont des fonction de classe $C^1(\mathbb{R}^n)$.

Définition 5 *: (Contrainte saturée)*

Soit $g_i(x) \leq 0$, une contrainte d'inégalité et soit $x^* \in D$.

Soit $g_i(x) > 0$, une contrainte d'inégalité est inactive en x^*.

Soit $g_i(x) = 0$, une contrainte d'inégalité est inactive où saturées en x^*.

Notons $I(x^*)$ l'ensemble des indices des contraintes saturées en x^* c'est-a-dire :

$$I(x^*) = \{i \in I = \{1, ..., m\} \ / g_i(x) = O\} \subset I.$$

Définition 6 *: (Qualification des contrainte)*

Ici nous nous limiterons aux trois conditions de qualification suivantes :

· **(CQ1)** C **est un polyèdre convexe :**

c'est le cas lorsque les fonctions g_i et h_j sont affines.

· **(CQ2) condition de slater :**

la condition de qualification des contraintes de **Slater** est comme suit :

1- les fonctions g_i sont convexes et les fonctions h_j sont affines.

2- il existe $\mathring{x}$ tel que $g_i(\mathring{x}) < 0$ et $h_j(\mathring{x}) = 0$ pour tout i, j.

· **(CQ2) condition de Mangasarian-Fromowitz :**

la condition de qualification des contraintes de **Mangasarian-Fromowitz** en un point $x^* \in C$ est comme suit :

1) les q vecteurs $\nabla h_j(x^*)$ sont linéairement indépendants.

2) il existe $\bar{d}$ tel que $\langle \nabla h_j(x^*), \bar{d} \rangle = 0$ pour tout j et $\langle \nabla g_i(x^*), \bar{d} \rangle < 0$ pour tout $i \in I(x^*)$.

On associe au problème d'optimisation suivante :

$$\begin{cases} \min f(x) \\ g_i(x) \leq 0, i = 1, ..., p \\ h_j(x) = 0, j = 1, ..., q \end{cases}$$

la fonction $L : R^n \times [0, \infty[^p \times R^q \longrightarrow R$ définie par :

$$L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^{q} \mu_j h_j(x)$$

est appeleé le **"Lagrangien"**.

Théorème 10 *: (Kuhn -Tucker)*

Soient f, $g_i(x)\, \forall i \in I - \{1, ..., m\}$ des fonction de classe $C^1(\mathbb{R}^n)$ et soit l'ensemble des contraintes $D = \{x \in \mathbb{R}^n / g_i(x) \leq 0, \forall i \in I\}$.

On suppose que l'ensemble D est qualifié qu point x^*(x^* est régulier), alors :

(x^*est minimum de f sur D)$\Longrightarrow$il existe des nombres réel positifs $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$

appelés multiplicateurs de **Kuhn -Tucker**, tel que :

$$\begin{cases} \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(x^*) = 0 \\ \lambda_i g_i(x^*) = O, \forall i = 1, ..., m \end{cases}$$

Si de plus f et les g_i ,$\forall i = \{1, ..., m\}$ sont convexe, alors on a une condition nécessaire et suffisante

(ie. x^* est un minimum de f sur D)$\Longleftrightarrow \exists \lambda_i \geq 0$, $\forall i = 1, ..., m$ tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(x^*) = 0 \\ \lambda_i g_i(x^*) = 0, \forall i = 2, ..., n \end{array} \right\}$$

Cas des contrainte d'égalité

On suppose que l'ensemble des contraintes et de type égalité.

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n / h_j(x) = 0, \forall j = 1, ..., l\}.$$

puisque une contraint d'égalité est equivalente à deux contraintes d'inégalité à savoir $h_j(x) \leq 0$ et $h_j(x) \geq 0$, on a :

$$h_j(x) = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} h_j(x) \leq 0 \\ -h_j(x) \leq 0 \end{cases}$$

Nous allont pouvoir se ramener au cas précédent, ce qu'il faut retenir dans ce cas est que :

- Les contraintes sont forcément saturées.

- On a la même notion de contraintes qualifiées.

-Lorsque l'on écrit la condition de **Kuhn -Tucker** pour les contraintes d'égalité au point x^* nous allons avoir :

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{l} (\alpha_i \nabla h_i(x^*) - \beta_i \nabla h_i(x^*)) = 0, \alpha_i \geq 0, \beta_i \geq 0, \forall i = 1, ..., l$$

$$\Longrightarrow \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{l} ((\alpha_i - \beta_i) \nabla h_i(x^*)) = 0.$$

On pose :

$$\mu_i = \alpha_i - \beta_i, \mu_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, ..., l.$$

Donc on obtien :

Si x^* est un minimum de f sur D, alors $\exists \mu_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, ..., l$ tel que :

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{l} \mu_i \nabla h_i(x^*) = 0_{\mathbb{R}^n} .$$

Cette condition est dite condition de lagrange.

Les multiplicateurs μ_i ne vérifient pas la condition de signe, ils s'appellent multiplicateurs de lagrange.

1.3.4 Cas des contrainte d'égalité et d'inégalité

dans ce cas générale, on suppose qu'on a le problème suivante :

$$(P) \begin{cases} \min_{x \in D} f(x) \end{cases}$$

où : $D = \{x \in \mathbb{R}^n / h_j(x) = 0, \forall j = 1, ..., l \text{ et } g_i(x) \leq 0, \forall i = 1, ..., m\}$.

Théorème 11 *: (Kuhn -Tucker-lagrange)*

Soit f et les $g_i, \forall i = 1, ..., m$ et $h_j, \forall j = 1, ..., l$ des fonction de classe $C^1(\mathbb{R}^n)$, on veut minimiser j sur D , on suppose que ces contraintes sont qualifiées un point $x^* \in D$, alors on a :

(x^*minimum de$f$ sur D) $\Longrightarrow$ $(\exists \lambda_i \geq 0, i = 1, ..., m$ et $\exists \mu_i \in \mathbb{R}, \forall j = 1, ..., l)$ tel que :

$$\begin{cases} \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(x^*) + \sum_{i=1}^{l} \mu_i \nabla h_i(x^*) = 0 \\ \lambda_i g_i(x^*) = 0, i = 1, ..., m \end{cases}.$$

1.3.5 Condition suffisantes d'optimalité

Nous allons voir maintenant des condition suffisantes d'optimalité pour les problème du type :

$$(P) \begin{cases} \min f(x) \\ g_i(x) \leq 0, i = 1, ..., m \end{cases}$$

Où f et les g_i sont des fonction de classe $C^1(\mathbb{R}^n)$.

Définition 7 *: (Fonction de lagrange ,point selle)*

1- La fonction $L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x)$,

où : $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m)^t \in \mathbb{R}_+^m, (\lambda_i \geq 0)$, et $x \in \mathbb{R}^n$ est dite fonction lagrange associées au problème(P).

2- On appelle point selle de la fonction de lagrange $L(x, \lambda)$sur l'ensemble $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^m$,tout point $L(x^*, \lambda^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^m$ aui vérifie :

$$L(x^*, \lambda) \leq L(x^*, \lambda^*) \leq L(x, \lambda^*), \forall \lambda \in \mathbb{R}_+^m, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

On a x^* minimise $L(x, \lambda^*)$ sur $\mathbb{R}^n$ et λ^*, aximise $L(x^*, \lambda)$ sur $\mathbb{R}_+^n$ c'est-à-dire :

$$L(x^*, \lambda^*) = \min_{\mathbb{R}^n} L(x, \lambda^*) \text{ et } L(x^*, \lambda^*) = \max_{\lambda \in \mathbb{R}_+^m} L(x^*, \lambda).$$

Si le problème(P) et donné sous la forme :

$$(P)\begin{cases} \min f(x) \\ g_i(x) \leq 0, i = 1, ..., m \\ h_j(x) \leq 0, j = 1, ..., l \end{cases}$$

où f, g_i et h_j sont des fonction de classe $C^1(\mathbb{R}^n)$, alors la fonction de lagrange associée a(P) est : $L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) + \sum\limits_{j=1}^{n} \mu_j h_j(x)$.

où : $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m)^t \in \mathbb{R}_+^m, \mu = \mu_1, \lambda_i g_i(x^*) = 0, i = 1, ..., m\mu_2, ..., \mu_n) \in \mathbb{R}^l, x \in \mathbb{R}^n$. :

Théorème 12 ***: (Propriété caractéristique des point selle)***

Le point $L(x^*, \lambda^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^m$ est un point selle de $L(x, \lambda)$ ssi les conditiont suivantes sont vérifié :

1- $L(x^*, \lambda^*) = \min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, \lambda^*)$.

2- $g_i(x) \leq 0, i = 1, ..., m.$

3- $\lambda_i^* g_i(x) = 0, i = 1, ..., m.$

Théorème 13 ***: (suffisance de la condition du point selle)***

Soit le problème :

$$(P) = \begin{cases} \min\limits_{x \in D} f(x) \text{où } D = \{x \in \mathbb{R}^n / g_i(x) \leq 0, i = 1, ..., m\}. \end{cases}$$

Si $L(x^*, \lambda^*)$ et un point selle de $L(x, \lambda)$, alors x^* est un minimum global de f sur D

Soient f et $g_i, \forall i = 1, ..., m$ des fonctions convexes de classe C^1 et soit

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n / g_i(x) \leq 0, i = 1, ..., m\}$$

qualifié en x^*, alors :

$$(\ x^* \text{est un minimum global de } f \text{ sur } D) \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \exists \lambda_i^* \in \mathbb{R}_+^m / (x^*, \lambda^*) \text{ et un point selle} \\ \text{de } L(x, \lambda) \text{ sur } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^m \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \nabla_x L(x^*, \lambda^*) = 0 \\ \lambda_i g_i(x^*) = 0, i = 1, ..., m \end{cases}$$

où :

$$\nabla_x L(x^*, \lambda^*) = \tfrac{\partial L}{\partial x}(x^*, \lambda^*) = (x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla g_i(x^*).$$

1.3.6 Condition d'optimalité nécessaires du second ordre

Les résultats énoncés jusqu'à présent des conditions nécessaires pour résoudre le problème de minimisotion avec contrainte, ils fournissent des condidats valables pour résoudre (P) (i.e) les points critiques de la fonction de lagrange, où le problème est du type :

$$(P) \begin{cases} \min f(x) \\ g_i(x) \leq 0, i = 1, ..., m \end{cases}$$

Toute fois il est nécessaire pour pouvoir conclure de savoir si la solution obtenue est éffectivement un minimum.

Pour cela on peut grâce a une condition du second ordre restreindre le nombre de condidats, c'est l'objet du théorème suivent :

On suppose que f est $g_i, i = 1, ..., m$ sont de classe C^2 et que x^* est un minimum (local) de f sur D et que x^* est régulier, alors $\exists \lambda_i 0 \geq, i = 1, ..., m$ tel que les conditions de Kuhn -Tucker soient satisfaite et pour toute direction $d \in \mathbb{R}^n$ vécrifaint :

$$\begin{cases} \langle \nabla g_i\left(x^*\right); d\rangle = 0, i \in I_0^+\left(x\right) \\ \langle g_i\left(x^*\right); d\rangle = 0, i \in I_0\left(x^*\right)/I_0^+\left(x^*\right) \end{cases}$$

où $$I_0^+\left(x\right) = \{1 \leq i \leq m/g_i\left(x^*\right) = 0 \ et \ \lambda_i > 0\}$$

on a :

$$\langle \ \nabla_{xx}^2 L\left(x^*, \lambda^*\right), d\rangle \geq 0$$

où $$\nabla_{xx}^2 L\left(x^*, \lambda^*\right), d = \frac{\partial L}{\partial x}\left(x^*, \lambda^*\right).$$

Chapitre 2

Programmation linéaire

Introduction

La programmation linéaire peut se définir comme une technique mathématique permettant de résoudre les problèmes de décisions, particulièrement, ceux où le décideur cherche la meilleur utilisation de ressources pour atteindre un objectif spécifique comme la maximisation des bénéfices ou la minimisation des coûts. Elle est utilisée en particulier, dans l'industrie et dans la planification économique ...etc.

2.1 forme générale d'un programme linéaire

La forme générale d'un programme linéaire se lit de façon suivant :

$$\begin{cases} (1)\ \max \text{ ou } \min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ (2)\ \forall i = 1, ..., m \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \quad \leq, = \text{ ou } \geq b_i \\ (3)\ \forall j = 1, ..., n \qquad x_j \geq 0 \end{cases}$$

(1) fonction objective

(2) m contrainte linéaire

(3) contrainte de positivité

2.2 Formes matricielles classique et convensions

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Notons par $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ le vecteur des variables $b = (b_1, b_2, ..., b_m)^T$ le second membre des contraintes $c = (c_1, c_2, ..., c_n)^T$ le vecteur côut ou profit associé aux variable et A la matrice $m \times n$ des a_{ij}.

2.3 Technique de la programmation linéaire

La mise en oeuvre de la technique de la programmation linéaire peut être subdivisé en cinq étapes suivantes :

• **Première étape** : Identification du problème comme étant solvable par programmation linéaire. Cette identification est le fruit d'une expérience dans la modélisation mathématique des problèmes.

• **Deuxiéme étape** : Formulation du problème réel avec utilisation d'un modèle mathématique linéaire. Elle se fait en collaboration avec le décideur posant le problème.

• **Troisiéme étape** : Résolution du problème théorique en utilisant les techniques algorithmiques.

• **Quatriéme étape** : Détermination d'une solution réelle à partir de la solution théorique.

• **Cinqiéme étape** : Vérification de la validité de la solution et modification nécessaire de la formulation mathématique. Cette étape permet d'affiner le modèle afin d'apporter une solution acceptable par le décideur.

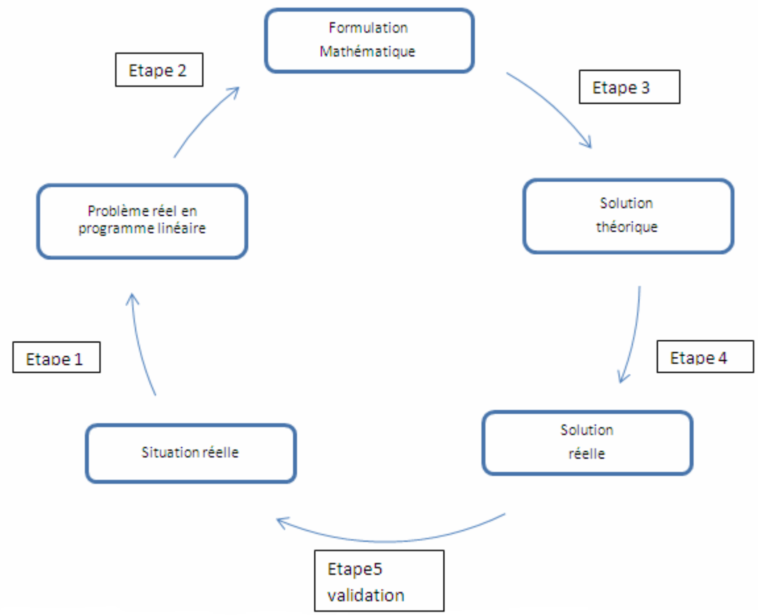

Figure 2.1 Principe de la programmation linéaire

2.4 Formulation mathématique d'un programme linéaire

Généralement, il y a trois étapes à suivre pour pouvoir construire le modèle d'un programme linéaire :

1) Identifier des variables de décision, on suppose dans un premier temps que ces variables peuvent prendre n'importe quelle valeur positive.

2) Identifier les contraintes du problème et les exprimer par un système d'équation et/ou d'inéquation linéaire par rapport aux variables de décision.

3) Identifier la fonction à optimiser (la fonction objectif) et la représenter sous une forme linéaire par rapport aux variables de décision. De plus, il faut spécifier si la fonction objectif est à maximiser ou à minimiser.

Exemple 2 *:*

Un menuisier désire fabriquer des tables et des chaises, il dispose de 50 unités de bois et de 90 heures de travail. La fabrication d'une table nécessite 10 unités de bois et 15 heures de travail, celle d'une chaise, 5 unités de bois et 10 heures de travail. Une table vendue procure au menuisier un profit de $800DA$, une chaise un profit de $500DA$. Combien de tables et de chaises devrait il produire afin de maximiser son profit ?

Formulation mathématique du problème :

1) Variables de décision :

Pour modéliser le problème de ce menuisier, il est commode de commencer par identifier les variables de décision, dans cet exemple elles sont au nombre de deux et concernent le nombre de tables et le nombre de chaises à fabriquer, on les notera :

x_1 : nombre de tables.

x_2 : nombre de chaises.

2) Contraintes du modèle :

La première contrainte est relative á la quantité de bois dont dispose le menuisier qui ne peut exèdre 50 unités, ainsi si le menuisier fabrique x_1 tables et x_2 chaises, il doit consommer respectivement $(10.x_1)$ et $(5.x_2)$ unités de bois, c'est-à-dire cette quantité de bois consommé $(10x_1 + 5x_2)$ ne peut exèdre les 50 unités de bois disponibles. Cette contrainte s'exprime par l'inégalité :

$10x_1 + 5x_2 \leq 50.$

La deuxième contrainte est relative au temps dont dispose le menuisier qui ne peut exèdre 90 heures. La fabrication de x_1 tables et de x_2 chaises demande respectivement $(15.x_1)$ et $(10.x_2)$ heures de travail. Cette contrainte s'exprime par l'inégalité : $15x_1 + 10x_2 \leq 90$.

De plus les variables x_1 et x_2 ne peuvent être négatives puisqu'elle représentent des entités physique concrets. D'ou les inégalités :

$x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$.

3)La fonction objectif :

La fonction objectif à optimiser dépend du nombre de tables et de chaises vendus et de leurs prix unitaires, et comme cette fonction concerne un profit, elle est donc à maximiser, si on la note par Z, elle peut s'écrire comme suit :

Maximiser$Z = 800x_1 + 500x_2$.

En effet, le modèle complet est le suivant :

$$(P)\begin{cases} \max Z = 800x_1 + 500x_2 \\ 10x_1 + 5x_2 \leq 50 \\ 15x_1 + 10x_2 \leq 90 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

2.5 Structure d'un programme linéaire

Un programme linéaire s'écrire sous l'une des deux formes suivante :

a)La forme canonique :

$$(P)\begin{cases} \max Z(x) = c^T x \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

où : $x \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}, A(m \times n)$ matrice réelle.

b)La forme standard :

$$(P)\begin{cases} \max Z(x) = c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

où : $x \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}, A(m \times n)$ matrice réelle.

Remarque 4 :

1- On peut vérifiée facilement l'équivalence entre les deux formes précédentes. En effet, toute inégalité peut être transformé en une égalité par une addition d'une variable positive, dit variable d'écart comme suit :

$a_i^T x \leq b_i \Longrightarrow a_i^T x + e_i = b_i \qquad e_i \geq 0.$

Et tout égalité équivaux deux inégalités comme suit :

$$a_i^T x = b_i \quad \Longleftrightarrow \begin{cases} a_i^T x \leq b_i \\ -a_i^T x \leq -b_i \end{cases}$$

2- Pour trouver une solution optimale x^* d'un problème de minimisation, il suffit de multiplier la fonction objectif Z par (-1), prendre $\max Z = \min(-Z)$ et la valeur optimale s'obtient par : $\max Z(x^*) = \min Z(-x^*)$.

2.6 Résolution graphique d'un problème linéaire

L'objet principal de cette section est de proposer une méthode de résolution d'un problème linéaire ne comportant que deux variables de décision. La méthode consiste à délimiter l'intersection des demi-plans représentant les inéquations des contraintes et à rechercher sur le bord de se domaine les points donnant l'optimum de La fonction objectif.

Avant de présenter la technique de la résolution, on va donner les définitions suivantes :

Définition 8 : *Une solution x est dite réalisable (admissible), si elle vérifie toutes les contraintes.*

Définition 9 : *On appelle domaine réalisable (admissible), l'ensemble S des solutions réalisables (admissibles) du problème.*

Définition 10 : *On appelle solution optimale, toute solution réalisable donnant la meilleure évaluation de La fonction objectif.*

2.7 Principes de la résolution algébrique

la résolution algébrique utilise la forme standard, où A est une matrice $m \times n$ de rayon m

$$(P)\begin{cases} \max z = cx \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

2.8 Bases, solutions de bases et solutions réalisables

Définition 11 *: les bases de A sont des matrice $m \times m$ inversibles extraintes de A.*

Théorème 14 *: Soit $x \in \mathbb{R}_+^n$ une solution de base réalisable de (P) par rapport à une base j $(|j| = m = rangA)$*

Soit $z_j = \sum_{i \in j} c_i a_{ij}$ si $z_j - c_j \geq 0$ pour tous $j = 1, ..., n$, x solution de base réalisable optimale.

Théorème 15 *: Soit $x \in \mathbb{R}_+^n$ une solution de base réalisable(P) par rapport à une base $J(|J| = m = rangA)$.Soit $z_j = \sum_{i=j} c_i a_{ij}$ supposons que $a_{ij} \leq 0$ pour tous $i \in J$ et pour tous $J \in \{1, ..., n\}$tel que $z_j - c_j <$ alors l'ensemble $\{z(x), x$ est solution réalisable$\}$ est un ensemble non borné.*

2.8.1 Structure géométrique des solution rélisables

Théorème 16 *:* $\begin{pmatrix} x_0 \\ e_0 \end{pmatrix}$ *est solution de base réalisable de* (P) *si et seulement si* $\begin{pmatrix} x_0 \\ e_0 \end{pmatrix}$ *est un point extrémal de* ε.

Remarque 5 *:* ε *ensemble convexe et fermés définie par :*

$$\varepsilon = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ e \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}, (A, I_m) \begin{pmatrix} x \\ e \end{pmatrix} = 0, x \in \mathbb{R}_+^n, e \in \mathbb{R}_+^m \right\}.$$

Théorème 17 *: Chaque solution optimal de* (P) *fait partie du bord de* $\Gamma\,(resp\ de\ \varepsilon)$.

Remarque 6 *:* Γ *ensemble convexe et fermé définie par :*

$\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n, Ax \leq b, x \geq 0\}$.

Théorème 18 *: Si* (P) *possède une solution optimal, alors* (P) *possède une solution de base réalisable optimale.*

2.9 Caractérisation algébrique des points extrêmes

Définition 12 *: Une combinison linéaire d'éléments* $\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_I x_i\right)$ *et dite convexe si :*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \text{ et } \lambda_i \geq 0$$

notons $x = \{x/Ax = b, x \geq 0\}$, l'ensemble des solutions rélisables dans (P), cette ensemble est convexe.

Définition 13 *: L'ensemble* x *et appelé un polytope convexe.*

· Un polytope borné est polyédre convexe.

· Un point extrême d'un polytope ou d'un polyèdre convexe x est un point qui ne peut êtrre exprimé comme combinaison convexe d'autre point de x.

· On appelle support de x, l'ensemble des indices des composantes nulle, on le note $supp(x)$.

Théorème 19 *: L'ensemble des point extrêmes du polytope x correspond à l'ensemble des solutions de base réalisable.*

2.10 Propriétés fondamentales de la programmation linéaire

Proposition 2 *: Si $x \neq \phi$, il existe au mois un sommet (point extêrme).*

2.11 La dualité en programmation linéaire

La notion de dualité est un concept fondamontal en programmation linéaire qui conduit à un résultat de partie théorique et pratique le théorème de dualité A chauque programme linéaire est assocé un autre programme linéaire appelé duale.

2.11.1 Définition formelle d'un programme linéaire duale

Soit le programme linéaire écrite sous forme standard :

$$\begin{cases} \min C^t x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad \text{primal}$$

$c, x \in \mathbb{R}^n, A \in M_{m,n}(R), b \in \mathbb{R}^m.$

On appelle dual du (primal) le programme linéaire :

$$\begin{cases} \max b^t y \\ A^t y \leq c \\ y \in \mathbb{R}^m \end{cases}$$

Exemple 3 *:*

Soit le probléme linéaire suivant considère comme étant le primal

$$\begin{cases} \min (2x_1 + x_2) \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_i + x_2 + x_3 = 1 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

Le dual de ce programme s'ecrire

$$\begin{cases} \max y_2 \\ y_1 + y_2 \leq 2 \\ y_1 + y_2 \leq 1 \\ y_2 = 0 \\ y \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

1) le dual du dual est le primal.

2) A primal de la relation primal-dual définie pour la forme standard, il est possible de retrouver le programme dual de tous les programmes linéaire non formulés sous cette forme.

Par exemple, le dual du programme suivant :

$$\begin{cases} \min c^t x \\ Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \max b^t y \\ A^t y \leq c \\ y \geq 0 \end{cases}$$

La solution d'un programme primal-dual est liée par les théorème de la dualité faible et fort.

Proposition 3 *: (dualité faible)*

Si x est primal réalisable alors $b^t y \leq c^t x$.

Proposition 4 *: (dual forte)*

Si x est optimal pour le programme primal, alors le programme dual a

une solution optimal y telle que $b^t y = c^t x$.

Proposition 5 *: Soit x primale réalisable et y dual réalisable $s = c - A^t y$, alors on a : $c^t y - b^t y = s^t x$.*

Théorème 20 *: (théorème de dualité)*

Soient (P) et (D) deux problèmes duaux

a) si (P) et (D) ont des solution réalisables, alors ils ont des solutions optimals et $Z^* = \max(P) = \min(D)$.

b) Si l'un d'autre en x a un optimum non borné, l'autre n'a pas de solution réalisable.

Théorème 21 *: (Théorème de complément arité)*

Deux solutions $(\overline{x}, \overline{y})$ du primal et du duial respectivement sont optimal si et seulement si :

$$(\overline{y}A_j - C_j)\,\overline{x}_j = 0, \forall j = 1, ..., n.$$
$$\left(A_j = j^{ème} \text{ colonne de } A\right).$$

Théorème 22 *: (lemme de Farkas)*

Si pour tout m vecteur y tel que :

$ya \leq 0$ on a $yb \leq 0$, alors $\exists x \geq 0$ tel que $ax = b$.

Théorème 23 *: (théorème des alternatives)*

L'un et seulement l'un des systèmes de contraintes suivants a une solution :

$$(I)\begin{cases} ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad (II)\begin{cases} ya \leq 0 \\ yb > 0 \end{cases}$$

Théorème 24 *: Si l'objectif d'un programme (dual ou primal) n'est pas borné, l'autre problème n'est pas de solution réalisable.*

Chapitre 3

Méthode du simplexe

Introduction

La méthode du simplexe à était crée par l'américain Géorge Danzig (1914-2005) en 1947 et elle a été connue en 1951.

Le mot "simplexe" dans l'appellation de la méthode est dit :

– soit au fait que l'ensemble des contraintes S a toute les propriétés mathématiques des simplexes.

– soit au fait que l'algorithme utilise les points sommets simples (non dégénérés) du polytope S.

3.1 Définitions et résultats fondamentaux

Considérons le problème linéaire suivant :

$$(P)\begin{cases} \max Z(x) = c^T x \\ Ax = b \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, n}. \end{cases}$$

où : $x \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}, b \in \mathbb{R}^n, A(m, n)$ matrices réelle.

Soit : $I = \{1, 2, ..., m\}$ ensemble des indices lignes de A (les indices des contraintes) $J = \{1, 2, ..., n\}$ ensemble des indices colonnes de A (les indices des variables)

$A = A = (a_1, a_2, ..., a_n) = (a_j, j \in J)$ ie : a_j sont les colonnes de A.

avec $rangA = m \leq n$.

On pose : $S = \left\{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b, x_j \geq 0, \forall j = \overline{1, n}\right\}$.

S est appelée l'ensemble des solutions réalisables (ensemble des contraintes), et

$Z(x)$ est la fonction objectif.

Le problème (P) consiste à trouver un point $x^* \in S$ tel que :

$Z(x^*) \geq Z(x)$, $\forall x \in S \Longleftrightarrow Z(x^*) = \max\limits_{x \in S} Z(x)$

(ie : x^* est la solution optimale de (P)).

Définition 14 *: Oppelle base du problème (P) toute sous matrice carré*

$A_B = A(I, J_B)$ où $J_B = \{j_1, j_2, ..., j_m\} \subset J$ tel que : $\det(A_B) \neq 0$.

Soit A_B une base du problème (P), posons : $J_N = J \backslash J_B$.

Donc : $A = [A_B \mid A_N]$, tel que : $A_N = (I, J_N)$ est une sous-matrice de A de type $(m, (n-m))$, formée des vecteurs de A qui ne sont pas dans la base A_B, ces vecteurs s'appellent les vecteurs non basique (ou bien hors base).

De même on peut partitionner x et c comme suit :

$$x^T = (x_1, x_2, ..., x_n), x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}.$$

x_B : est le vecteur de variables de base.

x_N : est le vecteur de variables hors base.

$$c^T = (c_1, c_2, ..., c_n), c = \begin{pmatrix} c_B \\ c_N \end{pmatrix}.$$

tel que c_B et c_N sont les vecteurs correspond aux vecteurs de variables de base et hors base respectivement.

En effet on aura :

$$A_B x_B + A_N x_N = b. \qquad (3.1)$$

On appelle solution de base (associée à la base A_B), la solution particulière de l'équation (3.1) obtenue en posant $x_N = 0$.

x_B est alors déterminé d'une façons unique en résolvant le système : $\qquad A_B x_B = 0.$

Ce qui donne : $x_B = A_B^{-1} b$, donc :

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_B^{-1} b \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{est la solution de base.}$$

Une solution de base est dite réalisable si $x_B \geq 0$, c'est-à-dire : $\qquad A_B^{-1} b \geq 0.$

La base correspondante à la solution de base réalisable est appelée base réalisable.

Une solution de base réalisable est dite dégénéré si le vecteur $x_B = A_B^{-1} b$ à des composantes nulles, et elle est dite non dégénéré ou bien simple si :

$$x_B = A_B^{-1} b > 0.$$

3.2 Caractérisation des points extrêmes

Théorème 25 *: Soit le programme linéaire*

$$(P) \begin{cases} \max Z(x) = c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} .$$

Soit le polyèdre convexe $S = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b, x \geq 0\}$, alors :

($x \in S$ est solution de base réalisable) $\Longleftrightarrow$($x \in S$ est point sommet de S).

Corollaire 1 *:*

Le polyèdre convexe $S = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b,\ x \geq 0\}$ a un nombre fini de points extrêmes qui ne dépasse pas C_n^m.

Autrement dit, le nombre de points extrêmes de $S \leq C_n^m$, où $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$.

3.3 Critère d'optimalité

Formule de l'accroissement de la fonction objectif :

Considérons le problème de programmation linéaire suivant :

$$(P) \begin{cases} \max Z(x) = c^T x \\ \quad Ax = b \\ \quad x \geq 0 \end{cases}$$

avec : $A = A(I, J)$; $I = \{1, 2, ..., m\}$; $J = \{1, 2, ..., n\}$ et $rangA = m$.

Soit $x = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ une solution de base réalisable, et $A_B = A(I, J_B)$ la matrice de base associée, avec $J_B$est les indice de base.

Soient $J_N = J \setminus J_B$, $A_N = A(I, J_N)$, et $x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$ tel que :

$x_B = \{x_j, j \in J_B\} = x(J_B)$, $x_N = \{x_j, j \in J_N\} = x(J_N)$.

$$c = \begin{pmatrix} c_B \\ c_N \end{pmatrix}, \text{ tel que :}$$

$c_B = \{c_j, j \in J_B\} = c(J_B)$, $c_N = \{c_j, j \in J_N\} = c(J_N)$.

Introduisons une autre solution de base éalisable $\overline{x}$ quelconque tel que :

$\overline{x} = x + \Delta x$, alors : $\Delta Z = c^T \overline{x} - c^T x = c^T (x + \Delta x) - c^T x$

alors on aura :

$$\Delta Z = c^T \Delta x \tag{3.2}$$

Comme x et $\overline{x}$ sont tout les deux des solutions réalisables alors :

$$\begin{cases} Ax = b \\ A\overline{x} = b \end{cases} \Longrightarrow A(\overline{x} - x) = 0 \Longrightarrow A\Delta x = 0$$

$$A\Delta x = A_B \Delta x_B + A_N \Delta x_N = 0 \tag{3.3}$$

$$\Longrightarrow \ \Delta x_B = -A_B^{-1} A_N \Delta x_N \tag{3.4}$$

De (3.2) et (3.3) on aura : $\Delta Z = c^T \Delta x = c_B^T \left(-A_B^{-1} A_N \Delta x_N\right) + c_N^T \Delta x_N$

$$\Longrightarrow \Delta Z = -\left(c_B^T A_B^{-1} A_N - c_N\right) \Delta x_N \tag{3.5}$$

Construisons le vecteur des potentiels $U = U(I) \in \mathbb{R}^m$, donné par :

$$U^T = c_B^T A_B^{-1} \tag{3.6}$$

et le vecteur des estimations $E = E(J) \in R^n$ donné par $E^T = U^T A - c^T$, en effet on aura :

$$\begin{cases} E_B^T = E(J_B) = U^T A_B - c_B^T = 0 \\ E_N^T = E(J_N) = U^T A_N - c_N^T \end{cases} \tag{3.7}$$

De (3.6) et (3.7) on aura :

$$\Delta Z = -\left(U^T A_N - c_N^T\right) \Delta x_N = E_N^T \Delta x_N$$

donc :

$$\Delta Z = -\sum_{j \in J_N} E_j \Delta x_j \tag{3.8}$$

Critère d'optimalité :

Soit x solution de base réalisable du problème (P) avec $A_B = A(I, J_B)$ la base associée.

Théorème 26 *: (Critère d'optimalité)*

1) L'inégalité :

$$E_N = E(J_N) \geq 0 \tag{3.9}$$

est suffisante pour l'optimalité de la solution de base réalisable x.

ie : $E_N \geq 0 \Longrightarrow x$ est une solution optimale.

2) Cette même condition est aussi nécessaire si x est non dégénérée.

Preuve :

1) On montre que si "$E_N \geq 0 \Longrightarrow x$ est une solution optimale", on a x est une solution de base réalisable $\Longrightarrow x = \binom{x_B}{x_N}$, $x_B \geq 0$ et $x_N = 0$.

Soit $\overline{x}$ une solution de base réalisable quelconque et $\overline{x_N} \geq 0$ alors :

$$\Delta x_N = \overline{x_N} - x_N = \overline{x_N} \geq 0$$

De (3.8) on a : $\quad \Delta Z = Z(\overline{x}) - Z(x) = -E_N^T \Delta x_N$

si : $E_N \geq 0 \Longrightarrow \Delta Z = -E_N^T \Delta x_N \leq 0$

$\Longrightarrow Z(x) \geq Z(\overline{x}), \forall \overline{x} \in S$

$\Longrightarrow x$ est une solution optimale du problème (P)

2) On montre que si x est une solution optimale non dégénéré du $(P) \Longrightarrow E_N \geq 0$:

On a : x est une solution optimale non dégénéré, c'est-à-dire :

$$x_j > 0, \forall j \in J_B \tag{3.10}$$

-Démontrons par absurde l'implication ("$\Longleftarrow$") :

Alors supposons que $E_N \ngeq 0$, c'est-à-dire : $\exists j_0 \in J_N$ tel que $E_{j_0} < 0$

Construisons alors un vecteur $\overline{x}$ de la forme :

$\overline{x} = x + \theta l$ avec : $\theta \geq 0 \in \mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$Al = 0. \tag{3.11}$$

$$l_j = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad j = j_0 \\ 0 & \text{si} \quad j \neq j_0 \end{cases}, \quad j \in J_N.$$

$l = \binom{l_B}{l_N}$, tel que : $l_B = l\left(J_B\right), \, l_N = l\left(J_N\right)$

On a : $A\overline{x} = Ax + \theta Al = Ax = b$, (car $Al = 0$)

$\overline{x_B} = x_B + \theta l_B \overline{x}$ vérifie les contraintes.

De (3.11) on aura : $Al = A_B l_B + A_N l_N = 0$

$$\Longrightarrow l_B = -A_B^{-1} A_N l_N, \text{ on a : } A_N l_N = a_{j_0}$$

$$\Longrightarrow l_B = -A_B^{-1} a_{j_0} \tag{3.12}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \overline{x}_B &= x_B + \theta l_B \\ &= x_B - \theta A_B^{-1} a_{j_0} \end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\overline{x}_N = x_N + \theta l_N = \theta l_N \geq 0 \tag{3.14}$$

De (3.13) et (3.10) on déduit que pour un θ suffisamment petit, $\overline{x_B} \geq 0$.

Donc on a :

$$\begin{cases} A\overline{x} = b \\ \overline{x} \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \overline{x} \text{ est une solution réalisable de } (P).$$

De (3.8) on aura :

$$\begin{aligned} \Delta Z = c^T \overline{x} - c^T x &= -\sum_{j \in J_N} E_j \Delta x_j \\ &= -\theta \sum_{j \in J_N} E_j l_j = -\theta E_{j_0} > 0 \end{aligned}$$

Alors $\exists \overline{x} \in S$, tel que : $Z(\overline{x}) > Z(x)\,; \forall x \in S$, donc :

x n'est pas une solution optimale de(P).

$E_N \not\geq \Rightarrow x$ n'est pas optimale.

En effet, si x est une solution optimale non dégénéré $\Rightarrow E_N \geq 0$.

Condition suffisante pour l'existence d'une solution optimale non borné :

Soit le problème :

$$(P)\begin{cases} \max Z(x) = c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Admettons que pour une solution réalisable de base x, le critère d'optimalité (3.9) n'est pas vérifié, c'est-à-dire : $\exists j_0 \in J_N$ tel que : $E_{j_0} < 0$.

On utilise les relations(3.13) et (3.14), si : $A_B^{-1} a_{j_0} \leq 0$ on aura :

$$\begin{cases} \overline{x}_B = x_B - \theta A_B^{-1} a_{j_0} \geq 0, \forall \theta \geq 0 \\ \overline{x}_N = x_N - \theta l_N \geq 0 \end{cases}$$

Alors $\overline{x}$ est une solution réalisable.

De (3.15) on a :

$$\Delta Z = -\theta E_{j_0} \geq 0, \forall \theta \geq 0 \Rightarrow \quad \text{si } \theta^{\nearrow} \quad \text{alors} \quad \Delta Z^{\nearrow}.$$

Théorème 27 *: Si parmi les composantes non basiques du vecteur d'estimation E_N, il existe une composante $E_j 0 < 0$ qui correspond au vecteur $A_B^{-1} a_{j_0} \leq 0$, alors la fonction objectif n'atteint pas son maximum, c'est-à-dire le problème est non borné.*

3.4 Algorithme du simplexe

Principe de la méthode :

Géométriquement, l'algorithme du simplexe s'interprète comme un cheminement d'un point extrême à un autre point extrême adjacent de long de la frontière de S (S est l'ensemble des solutions réalisables).

Algébriquement, la procédure s'interprète comme la détermination d'une suite de bases adjacent $A_{B_0}, A_{B_1}, ..., A_k$ et de solution de base réalisable $x_0, x_1, ..., x_k$ jusqu'à l'obtention d'une base optimale et ainsi une solution optimale.

Amélioration de la fonction objectif

Soit x une solution de base réalisable du problème (P) et $A_B = A(I, J_B)$ la base associé.

1) Si le critère d'optimalité (3.9) est vérifié alors x est solution optimale de problème (P).

2) Sinon, deux cas peuvent se représenter :

$i)$ $J_0 \in J_N$ telque : $E_{J_0} < 0$et $A_B^{-1} a_{j_0} \leq 0$, alors le problème (p)est non borné.

$ii)$ Pour $j_0 \in J_N$ tel que : $E_{J_0} < 0$ et le vecteur $A_B^{-1} a_{j_0} \leq 0$ possède des composantes positives alors avec l'algorithme du simplexe on construit une nouvelle solution, qui assure un accroissement maximal de la fonction objectif d'après la relation (3.15).

Alors, il faudra choisir le nombre aussi grand que possible et l'indice J_0 tel que :

$$E_{J_0} = \min[E_J, j \in J_N. \tag{3.16}$$

On prend le plus grand possible tel que le vecteur x donné par les relations (3.13) et (3.14) soit une solution réalisable :

$$\begin{cases} \overline{x}_B = x_B - \theta A_B^{-1} a_{j_0} \\ \overline{x}_N = x_N + \theta l_N \geq 0 \end{cases}$$

Pour cela il faut avoir :

$$\overline{x}_B = x_B + \theta l_N \geq 0 \Longrightarrow \overline{x}_j = x_j + \theta l_j \geq 0, \, \forall j \in J_B. \qquad (3.17)$$

En posant : $\quad A_B^{-1} a_{j_0} = X(J_B) = \{x_{jj_0}, j \in J_B\}$.

De (3.13) on aura :

$$\overline{x}_j = x_j + \theta x_{jj_0} . \forall \; j \in J_B \qquad (3.18)$$

Pour les $x_{jj_0} > 0$ on doit avoir :

$$\theta \leq \frac{x_j}{x_{jj_0}} \text{ pour } j \in J_B. \qquad (3.19)$$

Les composantes de $\overline{x}_j$ sont tous positives $\overline{x}_j \geq 0$ (si $x_{jj_0} < 0$).

Si $\theta \leq \min \left\{ \theta_j = \frac{x_j}{x_{jj_0}}, x_{jj_0} > 0, \; j \in J_B \right\}$, alors le vecteur $\overline{x}$ construit avec (3.13) et (3.14) sera une solution réalisable du problème (P).

Remarquons que pour $\theta > \min \left\{ \theta_j = \frac{x_j}{x_{jj_0}}, x_{jj_0} > 0, j \in J_B \right\}$ le vecteur $\overline{x}$ aura des composantes négatives, donc il ne sera pas une solution réalisable.

Par conséquent la plus grand valeur θ^0 telle que : $\overline{x} = x +\, \theta^0 l$ soit solution réalisable est égale :

$$\theta^0 = \theta_{j_1} = \frac{x_j}{x_{jj_0}} = \min \left\{ \theta_j = \frac{x_j}{x_{jj_0}}, x_{jj_0} > 0, j \in J_B \right\}. \qquad (3,20)$$

Dans le cas où x est une solution de base réalisable non dégénéré, la valeur de θ^0 sera strictement positive et en vertu de la relaiton $(3,15)$ on aura :

$$Z(\overline{x}) = Z(x) - \theta^0 E_N > Z(x).$$

Montrons que le vecteur $\overline{x} = x + \theta^0 l$ est solution de base réalisable :

Remarquons que :

$$\overline{x}_j = x_j = 0, j \neq j_0, j \in J_N.$$

$$\overline{x}_{j_1} = x_{j_1} - \theta^0 A_B^{-1} x_{j_0} = x_{j_1} - \theta^0 x_{j_1 j_0}$$

$$= x_{j_1} - \frac{x_{j_1}}{x_{j_1 j_0}} x_{j_1 j_0} = 0.$$

Le vecteur $\overline{x}$ à $(n - m)$ composantes nulles.

$$\overline{x}_j = 0, \; j \in \overline{J}_N \text{ tel que : } \overline{J}_N = \{(J_N / j_0) \cup j_1\}.$$

$\overline{A}_B = A\left(I, \overline{J}_B\right)$ avec $\overline{J}_B = \{(J_B/j_1) \cup j_0\} = J/\overline{J}_N$.

Pour que $\overline{A}_B$ (matrice associé à $\overline{x}_B$) soit une base réalisable on doit démontrer que les vecteurs a_j, $j \in \overline{J}_B$ sont linéairement indépendants.

Posons :

$$A_B = A_B(I, J_B)$$
$$A_B^{-1} = A_B^{-1}(J_B, I) = (u_{ij}, i \in J_B, j \in I)$$
$$A_B A_B^{-1} = I_m = \sum_{i \in J_B} a_i u_{ij} = e_j,\ j \in I \quad (3.21)$$

On va faire sortir le vecteura_{j_1} et rentrer a_{j_0}.

$$A_B^{-1} a_{j_0} = X(J_B) \Leftrightarrow a_{j_0} = A_B X(J_B)$$
$$a_{j_0} = \sum_{i \in J_B} a_i x_{ij_0} \quad (3.22)$$

$x_{j_1 j_0}$ par construction (3.20), alors de (3.22) on déduit :

$$a_{j_0} = \sum_{i \in J_B} a_i x_{ij_0} = a_{j_1} x_{j_1 j_0} + \sum_{i \in J_B/j_1} a_i x_{ij_0}$$
$$\Rightarrow a_{j_1} = \frac{a_{j_0}}{x_{j_1 j_0}} - \frac{\sum_{i \in J_B/j_1} a_i x_{ij_0}}{x_{j_1 j_0}}$$

De (3.21) on aura :

$$\frac{a_{j_0}}{x_{j_1 j_0}} u_{j_1 j} + \sum_{i \in J_B/j_1} a_i \left(u_{ij} - \frac{x_{ij}}{x_{j_1 j_0}}\right) = e_j, j \in I \quad (3,23)$$

Formons la matrice $\overline{u} = \overline{u}(\overline{J}_B, I) = (\overline{u}_{ij}, i \in \overline{J}_B, j \in I)$

où :

$$u_{ij} = \begin{cases} u_{ij} - \frac{x_{ij_0}}{x_{j_1 j_0}}, i \neq j_0, i \in \overline{J}_B, j \in I \\ \frac{u_{j_1 j}}{x_{j_1 j_0}} \text{ si } i = j_0, j \in I \end{cases} \quad (3.24)$$

De $(3,24)$ on aura : $\sum_{i \in j_B} a_i \overline{u}_{ij} = e_j, j \in I$, c'est-à-dire : $A(I, J_B)\overline{u} = I_m$.

Ce qui montre que $\overline{A}_B = A(I, \overline{J}_B)$ est inversible et que :

$$\overline{A}_B^{-1} = \overline{u}. \quad (2.25)$$

Remarque 7 *: Les éléments $\overline{u}_{ij}$ de la matrice inverse de $\overline{A}_B = A(I, \overline{J}_B)$ sont calculés en fonction de ceux de A_B^{-1} et des composants du vecteur $A_B^{-1} a_{j_0}$.*

On peut encore calculer A_B^{-1} de la manière suivante :

$$\overline{A}_B^{-1} = A_B^{-1}(\overline{J}_B, I) = D(\overline{J}_B, J_B) A_B^{-1}(J_B, I). \quad (2.26)$$

Où : $\quad D = D(\overline{J}_B, J_B) = (d_{ij}, i \in \overline{J}_B, j \in J_B)$

$$d_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j, \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j, j \neq j_1, \\ \frac{-x_{ij_0}}{x_{j_1 j_0}} & \text{si} \quad i \neq j_0, j = j_1, \\ \frac{1}{x_{j_1 j_0}} & \text{si} \quad i = j_0, j = j_1. \end{cases}$$

En posant :

$J_B = \{i_1, i_2, ..., i_{k-1}, i_k = j_1, i_{k+1}, ..., i_m\}$.

$\overline{J}_B = \{i_1, i_2, ..., i_{k-1}, i_k = j_0, i_{k+1}, ..., i_m\}$.

$$D = D(\overline{J}_B, J_B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{-x_{1j_0}}{x_{j_1 j_0}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \frac{-x_{2j_0}}{x_{j_1 j_0}} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \frac{1}{x_{j_1 j_0}} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \frac{-x_{imj_0}}{x_{j_1 j_0}} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

En utilisant tous les résultats précédant, l'algorithme du simplexe s'écrit :

Schéma de l'algorithme :

Soit J_B les indices de base, avec A_B est inversible et x est une solution de base réalisable.

Etape1 : Calculons $U^T = c_T^B A_B^{-1}$.

Etape2 : Calculons $E_j = U^T a_j - c_j, j \in J_N$.

Etape3 : Il y a deux cas :

1. Si : $E_j \geq 0, \forall j \in J_N$, alors x est une solution optimale du problème (P), et le processus de résolution est terminé.

2. Sinon : $\exists j_0 \in J_N$ tel que : $E_{j_0} < 0, E_{j_0} = \min\{E_j, j \in J_N\}$ et calculons le vecteur $A_B^{-1} a_{j_0} = X(J_B) = (x_{jj_0}, j \in J_B)$:

a) Si le vecteur $A_B^{-1} a_{j_0} \leq 0$ alors : le problème (P) est non borné ie :

$\sup\limits_{x \in S} Z(x) = +\infty$, et le processus est arrêté.

b) Sinon :

– Calculons : $\theta^0 = \theta_{j_1} = \min\{\frac{x_j}{x_{jj_0}}, x_{jj_0} > 0, j \in J_B\} = \frac{x_{j_1}}{x_{j_1 j_0}}$

– Calculons : $\overline{x} = (\overline{x}_B, \overline{x}_N)$, tel que :

$$\begin{cases} \overline{x}\,(j_B) = x\,(j_B) - \theta^0 A_B^{-1} a_{j_0} \\ \overline{x}_j = x_j = 0, j \in (J_N / j_0) \\ \overline{x}_{j_0} = \theta^0 \end{cases}$$

– Posons :

$J_B = (J_B / j_1) \cup j_0$

$J_N = (J_N / j_0) \cup j_1$

À l'aide de la relation suivante calculons :

$$A_B^{-1} = A_B^{-1}(J_B, I) = D(J_B, J_B) A_B^{-1}(J_B, I)$$

où $$D = D(\overline{J}_B, J_B) = d_{ij}, i \in \overline{J}_B, j \in J_B.$$

Avec :

$$d_{ij} = \begin{cases} 1 & si \quad i = j \\ \frac{1}{x_{jj_0}} & si \quad i = j_0, j = j_1 \\ 0 & si \quad i \neq j, j \neq j_1 \\ \frac{-x_{jj_0}}{x_{j_1j_0}} & si \quad i \neq j_0, j \neq j_1 \end{cases}$$

En posant :

$J_B = \{i_1, i_2, ..., i_{K-1}, i_K = j_1, i_{K+1}, ..., i_m\}$.

$\overline{J}_B = \{i_1, i_2, ..., i_{K-1}, i_K = j_0, i_{K+1}, ..., i_m\}$.

Etape4 : Aller a **l'étape 1** avec $J_B = \overline{J}_B$

Théorème 28 *: Sous l'hypothèse de non dégénéréssance, l'algorithme du simplexe converge en un nombre finie d'itérations (qui ne peut pas dépasser le nombre de sommet de S).*

Preuve : Il suffit d'observer qu'il existe un nombre finie de point sommet de $S(\leq C^m)$, et que la croissance stricte de la fonction objectif Z interdit de passer deux fois même point sommet $(Z(x^0) < Z(x^1) < ....)$.

Exemple 4 *:*

Soit le problème :

$$(PL) \begin{cases} \max Z = 800x_1 + 500x_2 \\ 10x_1 + 5x_2 \leq 50 \\ 15x_1 + 10x_2 \leq 90 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Le programme standard de (PL) est :

$$(PL) \begin{cases} \max Z = 800x_1 + 500x_2 + 0e_1 + 0e_2 \\ 10x_1 + 5x_2 + e_1 = 50 \\ 15x_1 + 10x_2 + e_2 = 90 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, e_1 \geq 0, e_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 1 & 0 \\ 15 & 10 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; b = \begin{pmatrix} 50 \\ 90 \end{pmatrix} ; c^T = (800, 500, 0, 0) .$$

On a : $rang\ A = 2$; $x^T = (x_1, x_2, e_1, e_2)$; $J = \{1, 2, 3, 4\}$; $I = \{1, 2\}$.

$$A_{B_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{est la base de départ} \Longrightarrow A_{B_0}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

$J_B = \{3, 4\}, J_N = \{1, 2\}$

$$A_N = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 15 & 10 \end{pmatrix} , c_B = (0, 0) , c_N = (800, 500) .$$

On a : $x_B = A_B^{-1} b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50 \\ 90 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 90 \end{pmatrix}$

Donc : $x_0 = (0, 0, 50, 90)^T$ est la solution de base réalisable de départ associée à A_{B_0} .

Itération 1 :

Etape1 : Calculons U^T :

$U^T = c^T$

$$U^T = c_B^T A_B^{-1} = (0, 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (0, 0)$$

Etape2 : Calculons E_N :

$$E_N = U^T A_N - c_N = (0, 0) \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 15 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 800 \\ 500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -800 \\ -500 \end{pmatrix} < 0.$$

Etape3 : On a :

$E_{j_0} = \min\{E_j, j \in J_N\} = \min\{-800, -500\} = -800 \Longrightarrow j_0 = 1.$

Calculons le vecteur $A_B^{-1} a_{j_0} = A_B^{-1} a_1$:

$$A_B^{-1}a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix}$$

On a : $\quad A_B^{-1}a_1 = \{x_{j_1}, j \in J_B\} > 0 \quad$ donc :

Calculons :

$$\theta_{j_1} = \frac{x_{j_1}}{x_{j_1 1}} = \min\left\{\frac{x_j}{x_{j1}}, x_{j1} > 0, j \in J_B\right\} = \min\left\{\frac{50}{10}, \frac{90}{15}\right\}$$

$$\theta_3 = 5 \Longrightarrow j_1 = 3$$

Calculons : $\quad \overline{x} = (\ \overline{x}_B, \overline{x}_N)$

On a : $\quad \overline{x}_B = \quad x_B - \theta_3 A_B^{-1}a_1 = \begin{pmatrix} 50 \\ 90 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \end{pmatrix}$

$\overline{x}_j = x_j = 0, j \in (J_N / \{1\}) \Longrightarrow \overline{x}_2 = 0$

$\overline{x}_1 = \theta_3 = 5 \Longrightarrow \overline{x}_N = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

Donc : $\quad \overline{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}$

Posons :

$\overline{J}_B = (J_B / j_1) \cup j_0 = \{1, 4\}$

$\overline{J}_N = (J_N / j_0) \cup j_1 = \{3, 2\}$

Donc : $\overline{A}_B = A\left(\overline{J}_B\right) = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 15 & 1 \end{pmatrix}, \overline{A}_N = A\left(\overline{J}_N\right) = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$

$\overline{c}_B^T = c^T\left(\overline{J}_B\right) = (800, 0), \overline{c}_N^T = c^T\left(\overline{J}_N\right) = (0, 500)$

On a : $\det\left(\overline{A}_B\right) = 10 - 0 = 10 \neq 0$

Aors : $\overline{A}_B^{-1} = \frac{1}{\det\left(\overline{A}_B\right)}\left(conv\overline{A}_B\right)^T = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -15 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & 0 \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$

Itération 2 :

On pose : $J_B = \overline{J}_B = \{1,4\}$, $J_N = \overline{J}_N = \{3,2\}$

$A_B^{-1} = \overline{A}_B^{-1}$, $A_N = \overline{A}_N$, $c_B^T = \overline{c}_B^T$, $c_N^T = \overline{c}_N^T$, $x = \overline{x}$

Etape1 : Calculons U^T :

$$U^T = c_B^T A_B^{-1} = (800,0)\begin{pmatrix} \frac{1}{10} & 0 \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} = (80,0)$$

Etape2 : Calculons E_N :

$$E_N = U^T A_N - c_N = (80,0)\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} - (0,500) = (8,-100)$$

Etape3 : On a : $E_{j_0} = \min\{E_j, j \in J_N\} = \min\{80,-100\} = -100 \Longrightarrow j_0 = 2$

Calculons le vecteur $A_B^{-1}a_{j_0} = A_B^{-1}a_2$:

$$A_B^{-1}a_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & 0 \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

On a : $A_B^{-1}a_2 = \{x_{j_2} \;\; , j \in J_B\} > 0$ donc :

– calculons :

$$\theta_{j_1} = \frac{x_{j_1}}{x_{j_1 2}} = \min\left\{\frac{x_j}{x_{j2}}, x_{j2} > 0, j \in J_B\right\} = \min\left\{\frac{5}{\frac{1}{2}}, \frac{15}{\frac{5}{2}}\right\} = \min\{10,6\} = 6$$

$$\theta_4 = 6 \Longrightarrow j_1 = 4$$

– Calculons : $\overline{x} = (\overline{x}_B, \overline{x}_N)$:

On a : $\overline{x}_B = x_B - \theta_4 \; A_B^{-1}a_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 15 \end{pmatrix} - 6\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\overline{x}_j = x_j = 0, j \in (J_N/2) \Longrightarrow \overline{x}_3 = 0$

$\overline{x}_3 = \theta_4 = 6 \Longrightarrow \overline{x}_N = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$

Donc : $\overline{x} = (2,6,0,0)^T$

– Posons : $\overline{J}_B = (J_B/j_1) \cup j_0 = \{1,2\}$

$\overline{J}_N = (J_N/j_0) \cup j_1 = \{3,4\}$

Donc : $\overline{A}_B = A\left(\overline{J}_B\right) = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 15 & 10 \end{pmatrix}$, $\overline{A}_N = A\left(\overline{J}_N\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\overline{c}_B^T = c^T\left(\overline{J}_B\right) = (800, 500)\,, c_N^T = c^T\left(\overline{J}_N\right) = (0, 0)$

On a : $\det\left(\overline{A}_B\right) = 100 - 75 = 25 \neq 0$

$$\overline{A}_B^{-1} = \frac{1}{\det\left(\overline{A}_B\right)}\left(conv\overline{A}_B\right)^T = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 10 & -5 \\ -15 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

Itération 3 :

On pose :

$J_B = \overline{J}_B = \{1, 2\}, J_N = \overline{J}_N = \{3, 4\}$

$A_B^{-1} = \overline{A}_B^{-1}$, $A_N = \overline{A}_N$, $c_B^T = \overline{c}_B^T$, $c_N^T = \overline{c}_N^T$, $x = \overline{x}$

Etape1 : Calculons U^T :

$$U^T = c_B^T A_B^{-1} = (800, 500)\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} = (20, 40)$$

Etape2 : Calculons E_N :

$$E_N = U^T A_N - c_N = (20, 40)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - (0, 0) = (20, 40) > 0$$

$$E_j > 0,\ \forall j \in \{3, 4\}$$

Donc : $x^* = (2, 6)$ est une solution optimale de Z, et la valeur optimale

$Z(x^*) = \max Z(x) = 800(2) + 500(6) = 4600$

3.4.1 Algorithme du simplexe en tableau

Le tableau simplexe est un tableau qui rassemble tous les éléments nécessaires pour faire marcher l'algorithme manuellement, en essayant d'éviter le calcule de l'inverse de la matrice de base A_B dans chaque itération, en utilisant à chaque itération la base unité.

La méthode du simplexe consiste à transiter d'un sommet du polyèdre convexe à un autre, en améliorant la valeur de la fonction objectif, jusqu'à l'obtention du sommet qui assure une valeur optimale. Or, comme chaque nouveau sommet correspond à une nouvelle base réalisable, il est nécessaire de pouvoir effectuer algébriquement le changement de base grasse au pivotage, afin, d'avoir une base unité.

-Dans chaque itération simplexe il faut :

1. Choisir une variable entrante.
2. Choisir une variable sortante.
3. Faire le pivotage pour que la variable entrante prend la colonne de la variable sortante dans le système d'équations.

Le premier tableau du simplexe reprend les éléments du programme linéaire standard (PLS), supposons que les variables de base (VB) sont x_j, $j \in J_B$ et les variables hors base (VHB) sont $x_j, j \in J_N$.le premier tableau du simplexe est représenté comme suite :

Base	x_B^T	x_N^T	b	θ
x_B	$A_B = I$	A_N		
Z	$E_B^T = 0$	$E_N^T = U^T A_N - c_N^T$	$Z =$	

Table (3.1) - Le premier tableau du simplexe.

L'intérêt du tableau simplexe est de rassembler de façons condensée tous les éléments nécessaires au déroulement de l'algorithme du simplexe. En effet, la solution de base réalisable s'obtient par lecture directe du tableau, comme les (VHB) $x_j, j \in J_N$ sont nulles, c'est-à-dire : $x_N = 0$.

En outre, le vecteur de variable de base :$x_B = A_B^{-1}b = Ib = b$,

alors :

$Z = c_B^T x_B + c_N^T x_N = c_B^T x_B = c_B^T b.$

En fin, le vecteur des estimations E_N est obtenue par lecture directe de la dernier ligne du tableau, il permet en particulier de voir immédiatement si la solution de base courante est optimale ($E_N \geq 0$) ou non.

3.4.2 Changements de bases

a) Critère d'entrée dans la base :

Une variable hors base x_j candidate à entre en base est celle qui possédé le coefficient le plus petit dans la fonction objectif. Il est définie par l'indice j_0 tel que :

$$j_0 = \arg\min_{j \in J_N} E_j$$

b) Critère de sortie de la base :

Une variable de base x_j quitte la base c'est-à-dire, sera hors base, celle définie par l'indice j_1 qui s'obtient par :

$$j_1 = \arg\min_{j \in J_N} \theta_j$$

Tel que : $\theta_j = \min\{\frac{x_j}{x_{jj_0}}, x_{jj_0} > 0, j \in J_B\}; x_{j_1 j_0}$ est le pivot.

Critère d'arrêt :

La solution de base courante est optimale si tous les coefficients $E_{j_0} \geq 0, j \in J_N$.

Renouvellement des tableaux (opération de pivotage)

Soient j_0 et j_1 les indices des variables entrantes et sortantes, soit $a_{ij}^{(k)}$ l'élément de la $i^{ème}$ ligne et la $j^{ème}$ colonne du $k^{ème}$ tableau et $a_{j_1 j_0}^{(k)}$ le pivot du $k^{ème}$ tableau.

– Ligne pivot (Diviser sur le pivot) $a_{j1j}^{(k+1)} = \frac{a_{j_1 j}^{(k)}}{a_{j_1 j0}^{(k)}}$

– Règle Z :$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - (a_{j1j}^{(k)} \times a_{ij_0}^{(k)})/(a_{j_1 j_0}^{(k)})$; $i \neq j_0; j = 1, ..., n+1$

$nouveau élément = \frac{ancien\ élément\ -\ élément\ correspond\ dans\ la\ ligne\ du\ pivot\ \times\ élément\ de\ la\ colonne\ du\ pivot}{pivot}$

Exemple 5 *:*

Soit le problème (l'exemple précédent) :

$$(PL)\begin{cases} \max Z = 800x_1 + 500x_2 \\ 10x_1 + 5x_2 \leq 50 \\ 15x_1 + 10x_2 \leq 90 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Le programme standard du (PL) est :

$$\begin{cases} \max Z = 800x_1 + 500x_2 + 0e_1 + 0e_2 \\ 10x_1 + 5x_2 + e_1 = 50 \\ 15x_1 + 10x_2 + e_2 = 90 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, e_1 \geq 0, e_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 10 & 5 & 1 & 0 \\ 15 & 10 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}, \; b = \begin{pmatrix} 50 \\ 90 \end{pmatrix}, \; c^T = (800, 500, 0, 0)$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}, \; J = \{1, 2, 3, 4\}, \; I = \{1, 2\}, \text{ on a : } rang \; A = 2$$

$J_B = \{3, 4\}, J_N = \{1, 2\} \Rightarrow$ la base initiale est : $A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et $\quad A_N = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 15 & 10 \end{pmatrix}, c_B = (0, 0), c_N = (800, 500).$

On a : $x_B = A_B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50 \\ 90 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 90 \end{pmatrix}$

$E_N = U^T A_N - c_N = c_B^T A_B^{-1} A_N - c_N = -c_N = (-800, -500) = (E1, E2)$.

La solution de base réalisable associé à la base $A_B = I_2$ est $x^0 = (0, 0, 50, 90)^T$,

avec : $Z(x^0) = 0$.

base	x_1	x_2	e_1	e_2	b	θ
e_1	$\boxed{10}$	5	1	0	50	5
e_2	15	10	0	1	90	6
Z	-800	-500	0	0	$Z = 0$	

$\min\{-800, -500\} = -800 \Longrightarrow x_1$ la rentre dans la base.

$\min\{5, 6\} = 5 \Longrightarrow e_1$ sorte de base.

base	x_1	x_2	e_1	e_2	b	θ
x_1	1	1/2	1/10	0	5	10
e_2	0	$\boxed{5/2}$	-3/2	1	15	6
Z	0	-100	80	0	$Z = 4000$	

$min\{10, 6\} = 6 \Longrightarrow e_2$ sorte de la base.

$\min\{-100\} = -100 \Longrightarrow x_2$ rentre dans la base.

$min\{10, 6\} = 6 \Longrightarrow e_2$ sorte de la base.

base	x_1	x_2	e_1	e_2	b	θ
x_1	1	0	2/5	-1/5	2	
x_2	0	1	-3/5	2/5	6	
Z	0	0	20	40	$Z = 4600$	

Le critère d'optimalité est vérifieé, la solution optimale est d'optimaité

$$x^* = (2, 6) \text{ avec } Z(x) = 4600.$$

Problèmes linéaires particuliers

Le problème non réalisable :

Un programme linéaire est dit non réalisable si certaines des ses contraintes sont contradictoires, lorsque un tel cas se présente, la formulation doit être revue on reconnait tel modèle, à la fin de la **phase 1** de la méthode des deux phases ou la méthode du big M par la présence d'une variable artificielle non nulle.

Le problème non borné :

Un programme linéaire est dit non borné si son optimum est infini. On reconnait un tel cas, lorsqu'à une itération donnée du simplexe, tous les éléments de la colonne de la variable rentrante sont négatifs ou nuls.

Le problème linéaire a infinité de solutions optimales :

Ce type de modèle apparaît lorsqu'à la fin de la résolution par la méthode du simplexe, une variable hors base possède un coefficient nul dans la fonction objectif.

Dans ce cas une itération supplémentaire donnera le second point extrême.

3.5 Obtention d'une base réalisable de départ

En principe dans l'algorithme du simplexe on peut prendre n'importe quelle base réalisable comme base de départ.

Généralement, on s'arrange pour avoir une matrice unité comme base de départ, en transformant le problème initiale par l'ajoute des variables artificielles (supplémentaires) y_{i_0} et appliquer, en suite, l'algorithme du simplexe en deux phases appelé méthode de deux phases ou encore utiliser la méthode du **Big M** (pénalité).

3.5.1 La méthode des deux phases

Lorsque les problèmes de PL ne permettent pas de mettre une solution de base réalisable en évidence, nous pouvons utiliser la méthode des deux phases pour essayer.

D'en générer une, Comme son nom l'indique, la méthode des deux phases est composée de deux étapes.

Mais avant de lancer la première phase, il faut d'abord transformer le problème de programmation linéaire sous forme standard, en ajoutant des variables d'écart et des variables artificielles nécessaires, et construire la fonction objectif artificielle en changeant les coefficients de la fonction objectif originale de la manière suivante :

$$(PLS)\begin{cases} \max Z = c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0, \end{cases} \qquad \rightarrow (PLA)\begin{cases} \max \varphi = -\sum\limits_{k=1}^{nbr} y_K \\ A_x + y = b \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

Tel que : le (PLS) est le programme linéaire standard et son PL auxiliaire associé (PLA), et nbr est le nombre de variables artificielles ajoutées, le vecteur x est constitué des variables de décision et de variables d'écart et le vecteur y des variables artificielles.

Le principe de la méthode des deux phases consiste à appliquer le simplexe en deux phases :

– **Phase 1** : Résoudre le Problème auxiliaire (PLA) par la méthode du simplexe.
Si le problème possède une solution optimale finie, alors cette solution est de base réalisable pour le (PLS).

– **Phase 2** : Résoudre le (PLS) en utilisant la solution obtenue à la fin de la première phase comme solution de base réalisable de départ.

Algorithme du simplexe en deux phases :

1. Mettre les contraintes sous forme d'égalités.

2. Rendre positif le second membre des contraintes.

3. Introduire les variables artificielles dans les contraintes.

4. **Phase 1** : résoudre le (PLA)

· Si tous $y_i = 0$ $(\varphi = 0)$ passer à 5.

· Sinon FIN. Le problème est non réalisable.

5. **Phase 2** : Résoudre le (PLS) en utilisant la solution obtenue en 4.

1. Il n'est pas toujours nécessaire d'introduire m variables artificielles pour les contraintes, il suffit de les introduire en nombre sufficant pour avoir une première solution de base réalisable.

2. Lorsqu'une variable artificielle sorte de la base, elle ne doit plus être prise en considération dans la suite de la procédure.

3. Dans la méthode des deux phases, le premier tableau du simplexe de la phase 2 est identique au dernier tableau du simplexe de la phase 1, à l'exception de la ligne des Ej, qui est modifiée.

3.5.2 La méthode du Big M (Pénalité)

La méthode de Pénalité consiste à choisir un paramètre $M > 0$ suffisamment grand pour que toutes les variables artificielles sortent de la base (c'est-à-dire $yi = 0$). On obtient, ainsi, la solution optimale du problème linéaire si une telle solution existe.

Supposons que dans un problème de programmation linéaire sous forme standard (PLS), la matrice A ne contient pas de sous-matrice identité, on considère, alors, le problème linéaire auxiliaire (PLA) :

$$(PLS)\begin{cases} \max Z = c^T x \\ Ax = b \\ x \geq b, \end{cases} \longrightarrow \text{associé}(PLA)\begin{cases} \max \varphi = c^T x - M\sum_{k=1}^{nbr} y_k \\ Ax + y = b \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

où nbr est le nombre de variables artificielles ajoutées, le vecteur x est constitué des variables de décisions et de variables d'écarts, et le vecteur y est constitué des variables artificielles, et on résoudre le (PLA) par la méthode du simplexe :

– Si tous $y_i = 0$ Fin. La solution optimale du PL de départ est atteinte.

– Sinon, le problème original est non réalisable.

Conclusion générale

On conclut que la méthode de simplexe est une méthode algébrique itérative qui permet de trouver la solution exacte en un nombre fini d'étapes et l'une des méthode les plus efficaces pour la résolution des programme linéaire même de grandes dimension ce qui rend intéressant l'opération d'approximer un problème d'optimisation non linéaire par une suite de programme linéaire.

Bibliographique

[1] Analyse numérique 1, télé-enseignement, L3, Université Aix-Marseille1, R, Herbin,12 décembre 2011.

[2] Introduction à l'analyse numérique matriciélle et à l'optimisation, P.G Giarlet, Paris (1988).

[3] S. BOUKAROURA, Support du cours de programmation linéaire, Centre Universitaire de Mila 2011 - 2012.

[4] M. AZI, Méthode adaptée pour la résolution d'un programme linéaire, mémoire de master, Mila 2013.

[5] M. AZI, Support du cours de programmation linéaire, Centre Universitaire de Mila 2012 - 2013.

[6] N. HEMRI, Support du cours de l'analyse numérique, Centre Universitaire de Mila 2009 - 2010.

[7] J. JAVET, Programmation lineaire, 2MSPM-2004.

[8] D. DE WOLF : Recherche opérationnelle, Dunkerque, Septembre 2006.