الجمهوريـة الجزائـريـة الديمقراطيـة الشعبيـة
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليـم العالـي والبحـث العلمـي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Nº Réf : ……………

Centre Universitaire de Mila

Institut des Sciences et de la Technologie   Département de Mathématiques et informatiques

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de licence

En : Filière mathématiques fondamentales

Thème

Étude générale d'un problème linéaire

Préparé par : *Ayoub Nassira*
Guenifi Nor El Houda
Ayachi Ayoub

Encadré par : *Fadel Wahida*

grade : *M.A.B*

Année universitaire : 2013/2014

شكر وعرفان

بسم الله الرحمان الرحيم

" سبحانك لاعلم لنا إلا ما علمتنا إنك أنت العليم الحكيم "

صدق الله العظيم

إلهي لا يطيب الليل إلا بشكرك ولا يطيب النهار إلا بطاعتك ولا تطيب اللحظات إلا بذكرك، ولا تطيب الآخرة إلا بعفوك، ولا تطيب الجنّة إلا برؤيتك، لك الشكر ولك الحمد يا أرحم الراحمين.

إلى من بلّغ الرسالة وأدّى الأمانة ونصح الأمة، إلى نبيّ الرحمة وسيد الخلق ونور العالمين محمد الأمين عليه أزكى الصلوات والتسليم.

نتقدّم بالشكر الجزيل وأعزّ التقدير لكل من ساعدنا على إنجاز هذا العمل المتواضع، حيث نخص بالذكر الأستاذة " وحيدة فاضل " التي تفضّلت بالإشراف على هذا البحث فجزاها الله عنّا كل خير فلها منّا كل التقدير والإحترام.

إهــداء

بسم الله الرحمان الرحيم

إلى من أرضعتني الحب والحنان، إلى رمز الحب وبلسم الشفاء،إلى القلب الناصع إلى قرة عيني
" أمـي الحبيبة "

إلى القلوب الطاهرة الرقيقة والنفوس الصافية إلى رياحين حياتي جدتي الغالية وخالتي حورية أطال الله في عمرها

الى أمي الثانية الخالة العزيزة مسعودة إلى ابن خالتي " علاء الدين" والكتكوت الصغير" مروان"

إلى من حبهم يجري في عروقي و يلهج بذكراهم فؤادي إلى" وسام ، عبد المنعم ، هارون "

إلى الأخوات اللواتي لم تلدهن أمي " هدى و نصيرة "

إلى الذين بذلوا كل جهدٍ وعطاء لكي أصل إلى هذه اللحظة أساتذتي الكرام لا سيما أستاذتي ومنيرة دربي في مذكرتي الأستاذة" وحيدة فاضل" وأستاذة طفولتي وزارعة حب العلم في قلبي الأستاذة الفاضلة " مالك حدة "

إلى توأم روحي ورفيق دربي .. إلى صاحب القلب الطيب والنوايا الصادقة " أحمد "

إلى من رافقتني منذ أن حملنا حقائب صغيرة ومعه سرت الدرب خطوة بخطوة
صديقي العزيز"فاروق"

الآن تفتح الأشرعة وترفع المرساة لتنطلق السفينة في عرض بحر واسع مظلم هو بحر الحياة وفي هذه الظلمة لا يضيء إلا قنديل الذكريات، ذكريات الأخوة البعيدة إلى الذين أحببتهم و أحبوني أصدقائي" محمد،مصطفى، أمير، معاد،نافع، تقي الدين، عيسى، موسى "

أيوب عياشي

إهــداء

بسم الله الرحمان الرحيم

إلى من بلغ الرسالة وأدى الأمانةونصح الأمة, إلى نبي الرحمة ونورالعالمين سيدنا محمد صلى الله عليه وسلم

إلى من كلله الله بالهيبة والوقار، إلى من علمني العطاء بدون انتظار، إلى من أحمل اسمه بكل افتخار "والدي العزيز "

إلى معنى الحب و معنى الحنان والتفاني, إلى بسمة الحياة و سر الوجود

إلى من كان دعائها سر نجاحي وحنانها بلسم جراحي " أمي الحبيبة "

الى من لن انسى يوما أنه ساندني و وقف معي في أشد المحن " عمي الغالي "

الى الينبوع الذي لا يمل العطاء, الى من حاكت سعادتي بخيوط منسوجة من قلبها

"جدتي اطال الله في عمرها"

إلى من بهم أكبر وعليهم أعتمد, إلى من بوجودهم أكتسب قوة ومحبة لا حدود لها

اخوتي " محمد و جلول " أخواتي " شفيقة, أمينة و سمية "

إلى من أرى التفاؤل بعيونهم والسعادة في ضحكتهم, إلى الوجوه المفعمة بالبراءة

" رائد, وسيم, وئام و الزائر الجديد لؤي"

إلى الأخوات اللواتي لم تلدهن أمي, إلى ينابيع الصدق الصافي " نور الهدى, أمينة "

الى من شاركاني هذا العمل معهما قضيت أجمل أوقاتي " نور الهدى, أيوب "

أيوب نصيرة

إهــداء

بسم الله الرحمان الرحيم

الحمد لله الذي كلما سألته أعطاني وكلما شكرته زادني، لك الحمد إلهي وربي وخالقي.

أهدي ثمرة جهدي إلى من كلّه الله بالهيبة والوقار إلى من علمني العطاء بدون انتظار إلى منأحمل اسمه بكل افتخار

إلى من تطلّع لنجاحي بنظرات الأمل والإصرار، يا من يرتعش قلبي لذكر روحه الطاهرة ونفسه البريئة أبي الغالي عزّك الله برحمته وأسكنك فسيح جنانه إن شاء الله.

إلى من ركع العطاء أمام قدميه وأعطتنا من دمها وروحها وعمرها حبّـًا وتصميمًا ودفعًا لغذ أجمل ، إلى التي لا نرى الأمل إلا من عينيها، إلى من كان دعاؤها سر نجاحي وينبوع الصبروالتفاؤل والأمل، إلى كل من في الوجود بعد الله ورسوله إليك أمي الغالية إلى رياحين قلبي.

إلى سندي وقوتي إلى أبي وعائلتي، إلى من أستمدّ منه القوة والحب إليك صديقي و أخي العزيز " علي"

إلى من بها أكبر وعليها أعتمد، إلى شمعة مُتّقدة تنير ظلمة حياتي، إلى من بوجودها كسبت قوة ومحبة لا حدود لها، إلى من عرفت معها أخطو حياتي أختي " زينب"

إلى توأم روحي ورفيقة دربي التي تفيض حبا وطفولة ونقاء إلى بسمة بيتنا وفرحتها إليك أختي " سمية "

إلى من أرى التفاؤل بعينه والسعادة في ضحكته، إلى الوجه المفهم بالبراءة، والذي بحبه أزهرت أيامي أخي الصغير" حسام"

إلى من زرعِ التفاؤل في دربي وقدّم لي السعادة ربما دون أن يشعر بذلك فله مني كل الشكر

خالي "عمّار"

إلى من تذوقت معهم أجمل لحظاتي إلى أصدقائي الذين رسمت صورهم وأصواتهم أجمل أيامي

إليكم " إبراهيم، أيوب، نصيرة، وسام، أميرة، إيناس، بسمة، فاطمة "

إلى جميع أفراد أسرتي، إلى كل من ذكرهم قلبي ونساهم قلمي، إليكم جميعا أهدي ثمرة جهدي ونجاحي.

هدى قنيفي

Résumé :

Ce mémoire à l’étude d’un problème linéaire, en présentant tout d’abord des résultats d’analyse convexe et de la programmation mathématique.

Enfin de passe la formule du problème étudie, Ensuit en vue quelque méthodes de résolution.

الملخص :

هذه المذكرة هي دراسة مشكل خطي,

في البداية نستعرض نتائج التحليل المحدب والبرمجة الرياضية.

بعدها نمر الى صيغة المشكل المدروس و في النهاية نرى بعض طرائق الحل.

Table des matières

Introduction **2**

1 Programmation mathématique : généralités et outils de base **5**

1.1 Introduction 5

1.2 Généralités 5

1.2.1 Notions fondamentales d'analyse convexe 5

2 Programmation mathématique **8**

2.1 Définitions 8

2.2 Principaux résultats d'existence et d'unicité 9

2.2.1 Conditions d'optimalités 9

3 Programmation linéaire **13**

3.1 Introduction 13

3.2 Définitions 15

3.3 Caractérisation des points extrêmes 15

3.4 Dualité 16

3.5 Formulation d 'un modèle mathématique linéaire 17

3.5.1 Exemples de formulations : 18

4 Résolution d'un probléme linéaire **26**

4.1 Introduction 26

4.2 Méthode d'énumération 26
4.3 Méthode graphique 27
4.4 Méthode du simplexe ou methode de G. B Dantzing 28

Bibliographie **33**

Introduction

Le développement de la théorie et des outils de la programmation linéaire a réellement pris son essor à partir des années 1940 même si les structures mathématiques sous-jacentes ainsi que quelques éléments algorithmiques ont vu le jour durant la période 1870 -1930 avec les travaux de J.B. Fourier (fondements de la programmation linéaire et de la méthode du simplexe), T. Motzkin (théorie de l'élimination, dualité) Farkas (dualité), Minkowski (dualité), Caratheodory (polyèdres et polytopes), de la Vallée Poussin (méthode d'élimination de Motzkin), Von Neuman (théorie des jeux).

La fondation de la programmation linéaire en tant que domaine d'étude est principalement créditée à D.B.Dantzig auteur de l'algorithme du simplexe en 1947 dans le contexte du projet SCOOP (Scientific Computation of Optimal Programs) et du complexe militaro-industriel installéau sein de l'US Air Force au Pentagone.

L'algorithme devait répondre aux besoins de planification des transports lors d'opérations militaires modélisés comme un problème de programmation linéaire. Signalons que L.V. Kantorovich, mathématicien et économiste soviétique, a proposé des modèles de programmation linéaire pour des applications industrielles en économie planifiée ainsi qu'une méthode expérimentale de résolution par des variables duales, malheureusement non soutenue par une théorie formelle. Cela lui a valu de partager « le prix Nobel » d'économie avec T.Koopmans en 1975.

Aussi performant et largement utilisé que peut être l'algorithme du simplexe, le fait qu'il appartienne à la classe des algorithmes non polynomiaux a incité les chercheurs à proposer d'autres algorithmes dont la polynomialité était avérée.

Le premier algorithme polynomial pour la programmation linéaire est dérivé de la méthode générale de l'ellipsoïde défini par A. Nemirovski (Prix John von Neumann 2003), D. B. Yudin et N. Shor en 1970. L. Khachiyan a ainsi construit un algorithme de l'ellipsoide adapté à la programmation linéaire en 1979 dont le mérite tient plus à la contribution en théorie de la complexité et à l'ouverture ainsi réalisée vers les méthodes polynomiales plutôt qu'en son efficacité pratique jugée médiocre.

Une nouvelle avancée décisive a été réalisée en 1984 qu'en son efficacité pratique jugée médiocre. Une nouvelle avancée décisive a été réalisée en 1984 par N. Karmarkar, chercheur à IBM qui a proposé, pour la première fois, une méthode des points intérieurs dont il a démontré la complexité polynomiale dans le pire des cas.

La majorité des solutions logicielles actuelles sont construites autour de l'algorithme du simplexe et d'algorithmes des points intérieurs.

Dans ce travail, on va présenter des notions de base sur la programmtion mathématique et particulierement linéaire, et on va voir des méthodes de résolution de ce problème.

Ce mémoire est composé de quatre chapitre :

Dans le premier, nous rappelons des résultas fondamentaux d'analyse convexe.

Le deuxième chapitre est consacré a une présentation générale des problémes mathématiques.

Le troisième chapitre est a étudie le probléme linéaire.

Le dernier chapitre contient la discription de quelques méthodes de résolution de ce dernier problème.

Chapitre 1

Programmation mathématique : généralités et outils de base

1.1 Introduction

Ce chapitre comprend des résultats fondamentaux d'analyse convexe et de la programmation mathématique qui seront utilisé ultérieurement.

1.2 Généralités

1.2.1 Notions fondamentales d'analyse convexe

La notion de convexité est un outil mathématique important pour l'étude théorique des problèmes d'optimisation.

On présente dans ce paragraphe quelques notions d'analyse convexe d'usage courant.

• Un sous ensemble C de $\mathbb{R}^n$ est dit convexe si :

$$(1-\lambda)\,x + \lambda y \in C, \ \forall\ x,\ y \in C, \ \forall \lambda \in [0,1]\,.$$

Dans le présent paragraphe, on considère une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$, avec

$\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \ +\infty\}$.

• L' intersection de tous les ensembles convexes contenant un sous ensemble S de $\mathbb{R}^n$ est appelée : enveloppe convexe de S,

on la note $conv\,(S)$ ou $co\,(S)$: c'est le plus petit convexe de $\mathbb{R}^n$ contenant S.

• L'enveloppe convexe d'un sous ensemble fini de $\mathbb{R}^n$, $conv\left(\left\{x_i, \ i = \overline{1, k+1}\right\}\right)$ est appelé : polytôpe. Si de plus, les vecteurs $\left\{x_i - x_1, \ i = \overline{2, k+1}\right\}$ sont linéairement indépendants, alors $conv(\left\{x_i, i = \overline{1, k+1}\right\})$ est appelé :

un k_simplexe de sommets $x_1, ..., x_{k+1}$.

• Un polytope convexe est dit polyèdre.

• L'ensemble :

$$dom(f) = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ f(x) < +\infty\}.$$

est dit domaine effectif de f.

• La fonction f est dite propre si :

$$dom(f) \neq \varnothing \ \text{ et } \ f(x) > +\infty, \ \forall \ x \in \mathbb{R}^n.$$

Dans le cas contraire on dit que f est impropre.

• Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, l'ensemble :

$$S_\alpha(f) = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ f(x) \leq \alpha\}.$$

est appelé ensemble de niveau α ou section (inferieur large) de f.

• L'ensemble

$$S_\alpha(f) = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ f(x) < \alpha\}.$$

est dit de niveau α inférieur strict de f.

• La fonction f est dite convexe si :

$$f\left((1-\lambda)\,x+\lambda y\right) \leq (1-\lambda)\,f(x)+\lambda f(y),\ \ \forall\ x,\ y \in \mathbb{R}^n,\ \forall\ \lambda \in [0,1]$$

Par convention, on prend $\infty - \infty = +\infty$.

On montre que f est convexe si et seulement si pour tout entier $m > 0$ et pour tout $\lambda_i \geq 0$ tels que $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$ on a :

$$f\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\ f\ (x_i), \qquad \forall\ x_i \in \mathbb{R}^n$$

• La fonction f est dite strictement convexe si :

$$f\left((1-\lambda)\,x+\lambda y\right) < (1-\lambda)\ f\ (x)+\lambda\ f\ (y),\ \forall\ x,\ y\ \in \mathbb{R}^n,\ x \neq y,\ \forall\ \lambda \in \,]0,1[\,.$$

• Etant donnée une fonction $g : C \to \mathbb{R}^n$ avec $C \subset \mathbb{R}^n$, prenons

$$h(x) = \begin{cases} g(x), & si\ x \in c \\ +\infty, & ailleurs \end{cases}$$

On a alors $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ la fonction h, s'appelle prolongement ou étendue de g sur $\mathbb{R}^n$.

Si C est convexe alors, la fonction g est convexe sur C si et seulement si son prolongement h est convexe sur $\mathbb{R}^n$.

Chapitre 2

Programmation mathématique

2.1 Définitions

Définitions 2.1.1 *:*

Etant donné un domaine $C \subset \mathbb{R}^n$ *et une fonction* $f : C \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *:*

• *Un problème de programmation mathématique consiste à minimiser (ou maximiser)* f *sur* C*.*

Autrement dit, il s'agit de trouver un point $x^* \in C$ *(si un tel point existe) pour lequel :* $f(x) \geq f(x^*)$ *pour tout* $x \in C$ *(dans le cas de maximisation,* $f(x) \leq f(x^*)$ *pour tout* $x \in C$*).*

• *Un problème de programmation mathématique (de minimisation) est formulé comme suit :*

$$\begin{cases} \min f(x) \\ x \in C \end{cases} \tag{P}$$

• *Tout point de* C *est appelé solution réalisable de* (P)*.*

• *On appelle solution optimale globale de* (P) *toute solution réalisable* x^* *réalisant le minimum de* f *sur* C*.*

L'ensemble des solutions optimales globales est noté :

$$\arg\min_{C} f(x)$$

•*On dit que x^* est une solution optimale local de (P) s'il existe un voisinage V de x^* tel que $f(x) \leq f(x^*)$, $\forall\, x \in V$.*

L'ensemble des solutions optimales locales est noté par loc $\min_{C} f(x)$.

Nous avons toujours :

$$\arg\min_{C} f(x) \subseteq loc\min_{C} f(x)$$

•*Soit $x \in C$, on dit que $d \in \mathbb{R}^n$ est une direction admissible s'il existe $\alpha > 0$ tel que : $x + td \in C$, $\forall\, t \in [0, \alpha]$.*

2.2 Principaux résultats d'existence et d'unicité

Théorème 2.2.1 ***: (Existence)***

Si f est propre, continue, coercive (i. e $f(x) \to +\infty$ lorsque $\| x \| \to \infty$ avec $x \in C$) alors (P) admet où moins une solution optimale.

Théorème 2.2.2 ***: (unicité)***

Si de plus f est strictement convexe alors (P) admet une solution optimale unique.

2.2.1 Conditions d'optimalités

(A) Cas sans contraintes :

Prenons $C = \mathbb{R}^n$, le problème est donc :

$$\begin{cases} \min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \end{cases} \tag{1}$$

et supposons que f est ou moins deux fois continûment différentiable.

Définition 2.2.1 *: (direction de descente)*

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, *un élément* $d \in \mathbb{R}^n$ *est dit direction de descente au point* x *si et seulement s'il existe un* $\delta > 0$ *tel que :*

$$f(x + \lambda d) < f(x), \quad \forall \lambda \in \left]0, \delta\right[.$$

Schémas général des algorithmes d'optimisation sans contraintes :

Supposons que d_k soit une direction de descente au point x_k, ceci nous permet de considérer le point x_{k+1} successeur de x_k, de la manière suivante :

$$x_{k+1} = x_k + \lambda_k d_k, \;\; \lambda_k \in \left]0, +\delta\right[.$$

Vu la définition de direction de descente, il est clair que :

$$f(x_{k+1}) = f(x_k + \lambda_k d_k) < f(x_k).$$

Un bon choix de d_k et λ_k permet ainsi de construire une multitude d'algorithmes d'optimisation.

Exemple de choix de direction de descente :

Si on choisit $d_k = -\nabla f(x_k)$ ($\nabla f(x_k)$ designe le gradient de f au point x_k) et si $\nabla f(x_k) \neq 0$, on obtient la méthode de gradient.

La méthode de Newton correspond à : $d_k = -(\nabla^2 f(x_k))^{-1} \nabla f(x_k)$, ($\nabla^2 f(x_k)$ designe la matrice hessienne de f au point x_k)

Exemple de choit de pas λ_k :

On choisit on général λ_k de façon optimal, c-à-d que λ_k doit vérifier :

$$f(x_k + \lambda_k d_k) \leq \; f(x_k + \lambda d_k), \, \forall \; \lambda \in \left[0, +\infty\right[.$$

En d'autre terme on est ramené à étudier à chaque itération, un problème de minimisation d'une variable réelle, c'est ce qu'on appelle recherche linéaire.

• **Conditions d'optimalité :**

Théorème 2.2.3 *: (condition nécessaire du 1er ordre CN1)*

Si f admet un minimum local en $x^* \in \mathbb{R}^n$ alors $\nabla f(x^*) = 0$.

Théorème 2.2.4 *: (condition suffisante du 1er ordre CS1)*

Si f est convexe et $\nabla f(x^*) = 0$ avec $x^* \in \mathbb{R}^n$ alors f admet un minimum global en x^*.

Théorème 2.2.5 *: (condition nécessaire du 2ème ordre CN2)*

Si f admet un minimum local en $x^* \in \mathbb{R}^n$ alors $\nabla f(x^*) = 0$ et la matrice hessienne $\nabla^2 f(x^*)$ est semi définie positive sur $\mathbb{R}^n$.

Théorème 2.2.6 *: (condition suffisante du 2ème ordre CS2)*

Si $\nabla f(x^*) = 0$ et si la matrice hessienne $\nabla^2 f(x^*)$ est définie positive, alor f admet un minimum local en x^*.

(B) Cas avec contraintes :

Soit le programme mathématique non linéaire (Pm) :

$$\begin{cases} \min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \\ s.c \\ g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, ..., k \\ h_j(x) = 0, \quad j = 1, ..., m \end{cases} \qquad (Pm)$$

c-à-d l'ensemble des contraintes est :

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, ..., k, \quad h_j(x) = 0, \ j = 1, ..., m\}$$

ou les fonctions f, g_i et h_j sont au moins deux fois continûment différentiables.

Définition 2.2.2 *:*

Le Lagrangien du programme mathématique (Pm) *est défini par :*

$$L(x,\lambda,\mu)=f(x)+\sum_{i=1}^{k}\lambda_i g_i(x)+\sum_{j=1}^{m}\mu_j h_j(x).$$

L'obtention des conditions nécessaires d'optimalité nécessite que certains condition appelées conditions de qualification des contraintes soient vérifiées. Ici nous limiterons aux trois conditions de qualification suivantes :

•**(CQ1)** C **est un polyèdre convexe :**

c'est le cas lorsque les fonctions $g_i$et$h_j$sont affines.

•**(CQ2) condition de Slater :**

La condition de qualification des contraintes de Slater est comme suit :

1- Les fonctions g_i sont convexes est les fonctions h_j sont affines.

2- Il existe x^0 tel que $g_i(x^0)<0$ et $h_j(x^0)=0$ pour tout i, j.

•**(CQ3) condition de Mangasarian-Fromowitz :**

La condition de qualification des conditions de Mangasarian-Fromowitz en un point $\bar{x}\in C$ est comme suit :

1- Les m vecteurs $\nabla h_j(\bar{x})$ sont linéairement indépendants.

2- Il existe $\bar{d}$ tel que $\left\langle \nabla h_j(\bar{x}),\bar{d}\right\rangle=0$ pour tout $j=1,...,m$ et

$\left\langle \nabla g_i(\bar{x}),\bar{d}\right\rangle<0$, pour tout $i=1,...,k$.

Théorème 2.2.7 ***: (Karush Kuhn Tucker)***

Supposons que les contraintes vérifient une des trois conditions de qualifications ci-dessus.

Si f *à un minimum* x^**sur* C *alors il existe* $\lambda\in\mathbb{R}^k$ *et* $\mu\in\mathbb{R}^m$ *tels que :*

$$\nabla f(x^*)+\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\nabla g_i(x^*)+\sum_{j=1}^{m}\mu_j\nabla h_j(x^*)=0.$$

$\lambda_i\geq 0,\ g_i(x^*)\leq 0,\ \lambda_i g_i(x^*)=0,\ \forall i$ *et* $h_j(x^*)=0,\forall\, j.$

Les quantités λ_i *et* μ_j *sont appelées multiplicateurs de Karush -Kuhn-Tucker-Lagrange.*

Chapitre 3

Programmation linéaire

3.1 Introduction

Un programme linéaire est un programme mathématique dans lequel :

1- La fonction objectif f est linéaire.

2- Le domaine C est défini par un ensemble des équations ou d'inéquations affines ou les deux à la fois appelées contraintes.

•Un programme linéaire (PL) s'exprime de façon générique sous la forme standard

$$\min \left[c^{\top} x \;:\; x \geq 0,\;\; Ax = b \right] \tag{P_0}$$

avec c, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ et $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

•On dit qu'un programmation linéaire est écrit sous forme canonique si le domaine des solutions réalisables est défini par un système d'inéquations affines.

Remarque 3.1.1 *:*

On peut toujours mettre un programme linéaire quelconque sous forme générique en ajoutant des variables supplémentaires appelée ***variables d'écart.***

$$\begin{cases} \max \ Z = x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \leq 2 \\ 2x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \qquad (P)$$

En introduisant les variables d'écart $x_3 \geq 0$ et $x_4 \geq 0$ dans la première et la deuxième contrainte on met le probléme sous la forme équivalente :

$$\begin{cases} \max \ Z = x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_2 + x_2 - x_4 = 1 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \qquad (P')$$

Le problème (P') est la forme standard du problème (P).

Remarque 3.1.2 *:*

Tout problème de minimisation peut être transformer en un problème équivalent de maximisation.

Remarque 3.1.3 *:*

La nature d'un programme linéaire ne dépend pas de la forme particulière qu'on lui donne ; par contre, elle dépend de la nature des variables x_i (composantes du vecteur x) qu'il contient :

- Un (PL) est dit continu si les variables x_i peuvent prendre n'importe quelle valeur réelle.(i. e, s'il est de la forme (P_0)).

- Un (PL) est dit booléen si les variables x_i ne peuvent prend que 0 ou 1.

- Un (PL) est dit entier si les variables x_i ne peuvent prendre que des valeurs entières.

Convention :

Dans la suite, l'expression "programme linéaire" désignera toujours un programme linéaire continu (optimisation continue).

3.2 Définitions

Définitions 3.2.1 *:*

Etant donné un programme linéaire de la forme (P_0).

- *On appelle solution tout vecteur* x *tel que* $Ax = b$ *et solution réalisable (admissible) tout vecteur* x *tel que* $Ax = b$, $x \geq 0$.
- *Supposons que* $rang(A) = m$, *on appelle une base* B, *toute sous matrice carrée régulière d'ordre* m *extraite de* A.

Corollaire 3.2.1 *:*

On associe à toute base B, *les décompositions* $A = [B/N]$ *et* $x = \binom{x_B}{x_N}$ *et* $c = \binom{c_B}{c_N}$.
Si l'on fixe le vecteurs x_N *à zéro, alors le vecteur* x=$\binom{B^{-1}b}{0}$ *vérifiant* $Ax = b$ *est dit solution de base.*

- *Une solution de base est dite réalisable si* $x_B \geq 0$.
- *Les composantes du vecteurs* x_B *sont appelées variables de base et les composantes du vecteurs* x_N *sont appelées variables hors-base.*
- *Une solution de base est dite dégénérée si certaines de ses variables de base sont nulles.*
- *Une solution de base est dite optimale si elle rend la fonction objectif* $c^\top x$ *optimale.*

3.3 Caractérisation des points extrêmes

Définition 3.3.1 *:*

On appelle un point extrême d'un polytope ou d'un polyèdre C, *tout point* $x \in C$ *qui ne peut pas être exprimé comme combinaison convexe d'autres points :*
$y \in C$, $(y \neq x)$.

Tout point extrême est une solution réalisable de base.

Corollaire 3.3.1 *:*

L'ensemble convexe :

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n : \ Ax = b, \ x \geq 0\}$$

a un nombre fini $\sigma(x)$ des points extrêmes et $\sigma(x) \leq C_n^m$.

Corollaire 3.3.2 *:*

Tout point d'un polyèdre $C \in \mathbb{R}^n$ est combinaison convexe des points extrêmes de C.

Théorème 3.3.1 ***: (optimalité en point extrême)***

L'optimum de Z, fonction linéaire, sur un polyèdre $C \in \mathbb{R}^n$, est atteint en au moins un point extrême.S'il est atteint en plusieurs points extrêmes, il est atteint en tout point combinaison convexe de ces points extrêmes.

3.4 Dualité

La dualité est un concept fondamental en programmation linéaire, elle conduit à un résultat de grande portée théorique et pratique : le théorème de dualité.

Definition 1 *:*

Le dual du programme linéaire (P_0) est le programme linéaire suivant :

$$\max \left[b^\top y \ : \ A^\top y \leq c, \, y \in \mathbb{R}^m\right] \qquad (P_0)$$

Le programme (P_0) est dit primal.

Propriétés fondamentales de la dualité :

Etant donnés deux programme duaux sous la forme (P_0) et (D_0), on a :

Lemme 3.4.1 *:*

Si $\bar{x}$ est une solution réalisable de (P_0) et $\bar{y}$ une solution réalisable de (D_0), alors :

$$c^\top \bar{x} \geq b^\top \bar{y}$$

Corollaire 3.4.1 *:*

Soient $\bar{x}$ une solution réalisable de (P_0) et $\bar{y}$ une solution réalisable de (D_0) telles que :

$$c^\top \bar{x} = b^\top \bar{y}$$

alors $\bar{x}$ est une solution optimale de (P_0) et $\bar{y}$ est une solution optimale de (D_0).

Théorème 3.4.1 ***: (Théorème de dualité)***

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une solution réalisable $\bar{x}$ (ou $\bar{y}$) de l'un des programmes duaux, soit optimale est qu'il existe une solution réalisable $\bar{y}$ (ou $\bar{x}$) de l'autre programme telle que :

$$c^\top \bar{x} = b^\top \bar{y}$$

Cette solution $\bar{y}$ (ou $\bar{x}$) du deuxième programme est aussi optimale.

Théorème 3.4.2 ***: (Théorème faible des écarts complémentaires)***

Si $\bar{x}$ et $\bar{y}$ sont respectivement deux solutions réalisables du primal et du dual, alors elles sont optimales si et seulement si

$$(A\bar{x} - b)^\top \bar{y} = 0 \quad \textit{et} \quad (c - A^\top \bar{y})^\top \bar{x} = 0$$

3.5 Formulation d 'un modèle mathématique linéaire

la formulation du modèle mathématique est l'étape la plus délicate de la résolution d'un problème, elle nécessite un effort de conception qui doit aboutir à la détermination des trois éléments suivante :

a) les variables de décision pour lesquelles on doit décider du niveau à atteindre, let que le niveau d'activité l'entreprise.

On suppose, dans un premier temps, que ces variables peuvent prendre n'importe quelle valeur positive.

b) La fonction objectif qui décrit la relation linéaire représentant l'objectif de l'entreprise, à l'aide des variables de décision.

c) Les contraintes du modèle qui décrivent les relations linéaire entre les variables de décision représentant les restrictions auxquelles est sujette l'entreprise.

3.5.1 Exemples de formulations :

Exemple 1 : probléme d'agriculture

Un agriculteur veut allouer 150 hectares de surface irrigable entre culture de tomate et celles de piments. Il dispose de 480 heures de main d'œuvre et de 440 m^3 d'eau.

Un hectare de tomates demande 1heure de main d'œuvre, 4 m^3 d'eau et donne un bénéfice net de 100 dinars. Un hectare de piments demande 4 heures de main d'œuvre, 2 m^3 d'eau et donne un bénéfice net de 200 dinars.

Le bureau du périmètre irrigué veut protéger le prix des tomates et ne lui permet pas de cultiver plus de 90 hectares de tomates.

Quelle est la meilleure allocation de ses ressources ?

Formulation du problème en un PL :

Etape 1 : Identification des variables de décision. Les deux activités que l'agriculteur doit déterminer sont les surfaces à allouer pour la culture de tomates et de piments

• x_1 : la surface allouée à la culture des tomate

• x_2 : la surface allouée à la culture des piments

On vérifie bien que les variables de décision x_1 et x_2 sont positives :

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Etape 2 : Identification des contraintes.

Dans ce problème les contraintes représentent la disponibilité des facteurs de production :

• *Terrain* : l'agriculteur dispose de 150 hectares de terrain, ainsi la contrainte liée à la limitation de la surface de terrain est :

$$x_1 + x_2 \leq 150$$

• *Eau* : la culture d'un hectare de tomates demande 4 m^3 d'eau et celle d'un hectare de piments demande 2 m^3 mais l'agriculteur ne dispose que de 440 m^3.

La contrainte qui exprim les limitations des ressources en eau est :

$$4x_1 + 2x_2 \leq 440$$

• *Main d'œuvre* : Les 480 heures de main d'œuvre seront départager (pas nécessaire ment en totalité) ente la culture des tomates et celles des piments. Sachant qu'un hectare de tomates demande une heure de main d'œuvre et un hectare de piments demande 4 heures de main d'œuvre alors la contrainte représentant les limitations des ressources humaines est :

$$x_1 + 4x_2 \leq 480$$

• *Les limitations du bureau du périmètre irrigué* : Ces limitations exigent que l'agriculteur ne cultive pas plus de 90 hectares de tomates. La contrainte qui représente cette restriction est :

$$x_1 \leq 90$$

Etape 3 : Identification de la fonction objectif. La fonction objectif consiste à maximiser le profit apporté par la culture de tomates et de piments. Les contributions respectives 100 et 200, des deux variables de décision x_1 et x_2 sont proportionnelles à leur valeur.

La fonction objectif est donc $z = 100x_1 + 200$.

Le programme linéaire qui modélise le problème d'agriculture est :

$$\begin{cases} \max\ z = 100\ x_1 + 200\ x_2 \\ x_1 + x_2 \leq 150 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 440 \\ x_1 + 4x_2 \leq 480 \\ x_1 \leq 90 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Exemple 2 : problème de production

Pour fabriquer deux produits d_1 et d_2 on doit effectuer des opérations sur trois machines M_1, M_2 et M_3, successivement mais dans un ordre quelconque. Les temps unitaires d'exécution sont donnés par le tableau suivant :

	M_1	M_1	M_3
d_1	11 mn	7 mn	6 mn
d_2	9mn	12 mn	16 mn

On supposera que les machines n'ont pas de temps d'inactivité.

La disponibilité pour chaque machine sont :

- 165 heures (9900 minutes) pour la machine M_1.
- 140 heures (8400 minutes) pour la machine M_2.
- 160 heures (9600 minutes) pour la machine M_3.

Le produit d_1 donne un profit unitaire de 900 dinars et le produit d_2 un profit unitaire de 1000 dinars.

Dans ces condition, combien doit on fabriquer mensuellement de produits d_1 et d_2 pour avoir un profit total maximum ?

Formulation en un PL :

Les variables de décisions sont :

- x_1 : le nombre d'unités du produit d_1 à fabriquer
- x_2 : le nombre d'unités du produit d_2 à fabriquer

Les contraintes outre les contraintes de non-négativité sont :

- $11x_1 + 9x_2 \leq 9900$ pour la machine M_1
- $7x_1 + 12x_2 \leq 8400$ pour la machine M_2
- $6x_1 + 16x_2 \leq 6900$ pour la machine M_3

Le profit à maximiser est :

$$z = 900x_1 + 1000x_2$$

Le programme linéaire résultant est :

$$\begin{cases} \max \ z = 900x_1 + 1000x_2 \\ 11x_1 + 9x_2 \leq 9900 \\ 7x_1 + 12x_2 \leq 8400 \\ 6x_1 + 16x_2 \leq 9600 \\ x_1 \geq 0, \, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Exemple 3 : Problème d'alimentation

On se propose de réaliser une alimentation économique pour des bestiaux, qui contient obligatoirement 4 sortes de composants nutritifs, A, B, C et D. L'industrie alimentaire produit précisément deux aliments M et N qui contiennent ces composants :

$1Kg$ d'aliment M contient $100g$ de A, $100g$ de C, $200g$ de D, $1Kg$ d'aliment N

contient $100g$ de B, $200g$ de C, $100g$ de D.

Un animal doit consommer par jour au moins :

$0.4Kg$ de A, $0.6Kg$ de B, $2Kg$ de C, $1.7Kg$ de D.

L'aliment M coûte $10DT$ le Kg et N coûte $4DT$ le Kg.

Quelles quantités d'aliments M et N doit on utiliser par jour et par animal pour réaliser l'alimentation la moins coûteuse ?

Formulation en un PL :

On peut résumer toutes les données du problème dans le tableau suivant :

	M	N	Quantités prescrites
A	0.1	0	0.4
B	0	0.1	0.6
C	0.1	0.2	2
D	0.2	0.1	1.7
Coût	10	4	

Ce genre de tableau peut aider à mieux analyser le problème et ainsi formuler le programme linéaire correspondant.

Les variables de décision sont :

• x_M : la quantité d'aliments M à utiliser pour l'alimentation des deux bestiaux

• x_N : la quantité d'aliments N à utiliser pour l'alimentation des deux bestiaux

Les contraintes de non-négativité sont Le choix de cette quantité est contraint à la présence dans l'alimentation du composant :

•A :

$$0.1x_1 \geq 0.4 \Longrightarrow x_1 \geq 4$$

• B :

$$0.1x_2 \geq 0.6 \Longrightarrow x_2 \geq 6$$

• C :

$$0.1x_1 + 0.2x_2 \geq 2 \Longrightarrow x_1 + 2x_2 \geq 20$$

• D :

$$0.2x_1 + 0.1x_2 \geq 1.7 \Longrightarrow 2x_1 + x_2 \geq 17$$

La fonction objectif est une fonction coût :

$$z = 10x_1 + 4x_2$$

Le programme linéaire est un programme de minimisation :

$$\begin{cases} \min\ z = 10x_1 + 4x_2 \\ x_1 \geq 4 \\ x_2 \geq 6 \\ x_1 + 2x_2 \geq 20 \\ 2x_1 + x_2 \geq 17 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Exemple 4 : Sélection de Médias

Une entreprise désire effectuer une campagne publicitaire dans la télévision, la radio et les journaux pour un produit lancé récemment sur le marché. Le but de la campagne est d'attirer le maximum possible de clients. Les résultats d'une étude de marché sont donnés par le tableau suivant :

	Télévision Locale	Télévision Par satellite	Radio	Journaux
Coût d'une publicité	40 DT	75 DT	30 DT	15 DT
N de clt potentiel par publicité	400	900	500	200
N de clt potentiel femme par pub	300	400	200	100

Pour la campagne, on prévoit de ne pas payer plus que $800DT$ pour toute la campagne et on demande que ces objectifs soient atteints :

1. Au minimum 2000 femmes regardent, entendent ou lisent la publicité ;
2. La campagne publicitaire dans la télévision ne doit pas dépasser $500DT$;
3. Au moins 3 spots publicitaires seront assurer par la télévision locale et au moins de deux spots par la télévision par satellite.
4. Le nombre des publicités dans la radio ou dans les journaux sont pour chacun entre 5 et 10.

Formulation en un PL :

Les variables de décision du problème sont :

- x_1 : le nombre de spots publicitaires dans la télévision locale
- x_2 : le nombre de spots publicitaires dans la télévision par satellite
- x_3 : le nombre de spots publicitaires dans la radio
- x_4 : le nombre d'affiches publicitaires dans les journaux

Les contraintes de non-négativité sont vérifiées.

Les contraintes du problème sont :

- Coût total de la compagne publicitaire :

$$40x_1 + 75x_2 + 30x_3 + 16x_4 \leq 800$$

- Nombre de clients femmes potentiels par publicité :

$$300x_1 + 400x_2 + 200x_3 + 100x_4 \leq 2000$$

- Contraintes de la télévision :

$$40x_1 + 75x_2 \leq 500, x_1 \geq 3 et x_2 \geq 2$$

- Contraintes sur le nombre de publicités dans la radio et dans les journaux et

$5 \leq x_3 \leq 10$et $5 \leq x_4 \leq 10$

La fonction objectif à maximiser représente le nombre de clients potentiels par publicité

$$z = 400x_1 + 900x_2 + 500x_3 + 200x_4$$

Le programme linéaire résultant est :

$$\begin{cases} \max\ z = 400x_1 + 900x_2 + 500x_3 + 200x_4 \\ 40x_1 + 75x_2 + 30x_3 + 15x_4 \leq 800 \\ 30x_1 + 40x_2 + 20x_3 + 10x_4 \geq 2000 \\ 40x_1 + 75x_2 \leq 500 \\ x_1 \geq 3 \\ x_2 \geq 2 \\ x_3 \geq 5 \\ x_3 \leq 10 \\ x_4 \geq 5 \\ x_4 \leq 10 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Chapitre 4

Résolution d'un probléme linéaire

4.1 Introduction

Les problèmes typiques de programmation linéaire se résolvent à l'aide de méthodes mathématiques particulières. Parmi les méthodes que les mathématiciens ont eu à utiliser on peut citer :

1 - la méthode d'énumération.

2- la méthode géométrique ou graphique.

3- la méthode du simplexe.

dans les trois sectinos suivantes nous présenter ces méthode et mèttre en exergue leurs avantages et inconvénients.

4.2 Méthode d'énumération

C'est la méthode la plus ancienne, elle est basée sur le fait que la solution optimale est un point extrême du polyèdre défini par les contraintes. Elle se résume selon les étapes suivantes :

1 - Déterminer tous les points extrêmes.

2 - Evaluer la fonction objective au niveau de chacun de ces points.

3 - Comparer les valeurs obtenues.

Ce pendant cette méthode est très fastidieuse si nous avons à faire à des problèmes où les points extrêmes sont nombreux ou bien les composantes des vecteurs sont très nombreuses.

4.3 Méthode graphique

L'ensemble des points qui satisfant à un système d'inéquations à deux inconnues est un polygone convexe ; s'il y a plus de deux variables, c'est un polyèdre convexe. Dans la suite cet ensemble de points sera appelé domaine réalisable ou domaine des solutions.

La méthode graphique est basée sur le fait que si le problème admet au moins une solution optimale, alors celle-ci est l'un des points extrêmes du domaine réalisable.

Dans le cas de deux variables, la fonction objective est de la forme :

$$Z = f(x_1, x_2) = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$$

Pour $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$ et quel que soit f_1 fixée, la fonction objective est une équation linéaire à deux variables ; $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = f$ et sa représentation graphique est une droite passante par les points $(0, \frac{f_1}{\lambda_2})$et $(\frac{f_1}{\lambda_2}, 0)$.

En faisant varier f, on obtient une famille de droites qui sont appelées droites d'appui paralléles à la droite d'équation $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = f$.

Les droites les plus proches de l'origine des coordonnées rendent minimale la fonction $f(x_1, x_2)$tandis que les plus éloignée la rendent maximale.

La solution au probléme est soit un point au bien un segment de droite.

Dans le cas ou la solution est un point, ce dernier est l'intersection de la droite d'appui la plus extrême parmi toutes les droites d'appui avec le polygone des solutions, selon qu'il s'agit d'une minimisation ou d'une maximisation.

En notant : $A\,(a_1, a_2)$ point, la valeur de la fonction objective est alors :

$f(A) = a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2$.

La solution est un segment, si l'intersection définie précédemment était un segment. En notant : $B\,(b_1, b_2)$ et $C\,(c_{1,}c_2)$ les points extrêmes de ce segment, les autres points solutions sont une combinaison convexe linéaire de ces deux points.

Cette méthode malgré sa simplicité n'est applicable que pour des problèmes de dimensions 2 ou 3 au maximum et il est parfois impossible de donner la valeur exacte de la solution.

4.4 Méthode du simplexe ou methode de G. B Dantzing

Cette méthode est la plus souple et la plus universelle ; elle s'applique à la résolution de tout programme linéaire. Mais elle est plus compliquée et exige plus de temps. Le fondement mathématique de cette méthode garantit une grande précision des résultats. Les fondements de la méthode simplexe ont été énoncés en 1949 et publiés en 1959 par G. B. Dantzig.

La méthode du simplexe consiste en une suite d'étapes :

On trouve d'abord une solution de base, puis on regarde si cette solution est optimale. Si elle ne l'est pas, on remplace une des variables de la base par une autre variable. On obtient ainsi une nouvelle base. Si ce n'est pas encore une solution optimale, on recommence, et ainsi de suite, tant que cela est nécessaire.

Par conséquent, le problème se réduit trouver une solution de base quelconque et à améliorer cette solution, tant qu'elle n'est pas optimale.

En un nombre fini d'itérations, on détermine ainsi la solution optimale parmi les solutions de base. Deux autres cas peuvent aussi se présenter :

la fonction objective prend des valeurs infinies ou bien les contraintes sont incompatibles L'étude des problèmes de programmation linéaires par la méthode du simplexe fait l'objet du prochain paragraphe.

Les étape de l'algorithme :

Pour pouvoir appliquer l'algorithme du simplexe il est nécessaire de connaître une base réalisable. On suppose donc que l'on dispose d'une telle base de départ. A itération k, soit B la base courante, J l'ensemble des indices de B, ceux-ci sont placés dans un vecteur ligne noté $(col(1), col(2), \ldots, col(m))$.

Les différentes étapes sont les suivantes :

Etape1 : calculer :

B^{-1} (la matrice inverse de B)

$\pi = c_J B^{-1}$(les multiplicateurs du simplexe)

Etape2 : Calculer : $c_{\overline{J}} = c_J - \pi R$ (les coûts réduits)

Etape3 : Déterminer s de $\overline{J}$ tel que : $c_s = \underset{j \in J}{max} \{c_j\}$

S 'il existe plusieurs indices, choisir le plus petit.

Si $C'_s \leq 0$; Arrêt : l'optimum est atteint.

Sinon

Etape4 : calculer la colonne A'_s par la formule : $A'_s = B^{-1} A_s$.

Etape5 : Déterminer l'ensemble **I** : $\mathbf{I} = \{i / a'_{is} > 0\}$

Si $I = \phi$; Arrêt : optimum non borné.

Sinon :

Etape6 : calculer b' par la formule $b' = B^{-1} b$.

Etape7 : déterminer l'indice r tel que : $\frac{b'_r}{a_{rs}} = \underset{i \in I}{Min} \left\{ \frac{b'_s}{a'_{is}} \right\}$

S'ils existent plusieurs indices qui vérifient la condition choisir le plus petit.

Etape8 : Mise à jour de la base : $J' = J \cup \{s\} - col(r), col(r) = s$

la colonne dont l 'indice est $col(r) = s$ est remplacée par la colonne A^s.

etape9 : retourner à étape1.

Exemple :

Considérons le programme linéaire :

$$\begin{cases} Maxz = 4x_1 + 5x_2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 7 \\ x_2 + x_3 = 3 \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \succeq 0 \end{cases} \qquad (P)$$

écrit sous forme canonique par rapport à la base réalisable dont les colonnes forment l'ensemble $J = \{3,4,5\}$ et on a $col(l) = 3$, $col(2) = 4$, $col(3) = 5$

La solution de base est : $x_1 = x_2 = 0, x_3 = 8, x_4 = 7, x_5 = 3.$

Les conditions d'application du théorème d'optimalité ne sont pas réunies puisque $C_1 = 4 > 0,\ c_2 = 5 > 0$

On voit qu'on a intérêt à augmenter x2 (puisque c2=5>c1=4) pour faire croître z, donc : $s = 2$.

Le domaine de variation de x_2 est :

$$\begin{aligned} D &= \left\{x_2/0 \leq x_2 \leq Min\left[\frac{8}{1},\frac{7}{2},\frac{3}{1}\right]\right\} \\ D &= \{x_2/0 \leq x_2 \leq 3\} \end{aligned}$$

C'est la troisième contrainte :

$$\frac{b_3}{a_{321}} = \underset{i\in I}{Min}\{b_i/a_{i2}\}$$

qui limite l'augmentation x2, la $2^{ème}$ colonne entre dans la base et la $5^{ème}$ en sort.

La nouvelle base est alors formée par les colonnes $3, 4$ et 2 c 'est à dire que :

$J' = J \cup \{2\} - \{5\} = \{3,4,2\} et\ col(3) = 2$

Ecrivons (P) sous forme canonique par rapport à J'.

$$\begin{cases} Max z = 4x_1 - 5x_5 + 15 \\ 2x_1 + x_3 - x_5 = 5 \\ x_1 + x_4 - 2x_5 = 1 \\ x_2 + x_5 = 3 \end{cases} \qquad x_i \geq 0 \qquad (P_1)$$

La base B' dont les colonnes sont 3, 4 et 2 n'est pas optimale puisque $c_1 = 4 > 0$ et $s = 1$.

Cherchons l'indice d'entrée r :

$$\underset{i \in I}{Min} \left\{ \frac{b_i}{a_{is}} \right\} = \underset{i \in I}{Min} \left\{ \frac{b_i}{a_{i1}} \right\} = Min \left\{ \frac{5}{2}, \frac{1}{1} \right\}$$

D'où $r = 2$

Par conséquent l'ensemble des indices des colonnes devient

$$J" = J \cdot \{1\} - \{col(2\} = \{3, 1, 2\} \; et col(2) = 1$$

Ecrivons le problème(P) sous forme canonique par rapport à la nouvelle base dont les colonnes sont 3, 1 et 2.

$$\begin{cases} Max z = -4x_4 + 3x_5 + 19 \\ x_3 - 2x_1 + 3x_5 = 3 \\ x_1 + x_4 - 2x_5 = 1 \\ x_2 + x_5 = 3 \end{cases} \qquad x_i \geq 0 \qquad (P_2)$$

La base n 'est pas optimale puisque $c_5 = 3 > 0$. On applique le même processus l'indice r :

$$\underset{i \in I}{Min} \left\{ \frac{b_i}{a_{is}} \right\} = \underset{i \in I}{Min} \left\{ \frac{b_i}{a_{i5}} \right\} = Min \left\{ \frac{3}{3}, \frac{3}{1} \right\} = \frac{b_1}{a_{15}}$$

donc r=1 et par conséquent la lere colonne de la base sort (puisque r=1), et la colonne $A_s = A_5$ entre dans la base.

L'ensemble des indices devient alors :

$$J''' = \{5, 1, 2\} \qquad et\ col(1) = 5$$

.

La base en question est alors constituée des colonnes 5, 1 et2

Ecrivons encore une fois (P) sous forme canonique par rapport à cette nouvelle base.

$$\begin{cases} max\ z = -x_3 - 2x_4 + 22 \\ \frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 + \frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 = 3 \\ x_2 - \frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_4 = 2 \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \geq 0 \end{cases} \tag{P_3}$$

On a :

$$Z = 22 + 0x_1 + 0x_2 - x_3 - 2x_4 + 0x_5 = -x_3 - 2x_4 + 22$$

cest à dire que :

$$c_1 = c_2 = c_5 = 0,\ c_3 = -1,\ c_4 = -2$$

Le vecteur coût est négatif ou nul par conséquent la base courante est optimale.

La solution optimale est :

$$X^* = (3,\ 2,\ 0,\ 0,\ 1)\ et\ z^* = 22$$

Conclusion 1

Dans ce travail, nous avons présenté une étude générale d'un problème linéaire, en présentant quelques résultats d'analyse convexe, de la dualité et de la programmation mathématique ainsi que la formulation d'un probléme linéaire et essentielement quelquse méthodes de resolution de ce probléme.

Bibliographie

[1] M. Bergounioux, "Optimisation et contrôle des système linéaires", Dunod, Paris, 2001.

[2] D. Bertsimas and J. N. Tsitsiklis. Introduction to linear optimization. Optimization and Computation Series. Athena Scientific, Belmont, Massachussetts, USA, 1997.

[3] J.F. Bonnans, J.C.Gilbert, C.Lemaréchal, C.sagastizabal , Méthode numériques d'optimisation, France (1995).

[4] G. B. Dantzig and M. N. Thapa. Linear programming. Springer, New York, New York USA,1997.

[5] F. Dubeau and O. M. Guèye, Une nouvelle méthode d'initialisation pour le problème de transport. RAIRO-Oper. Res. 42, pp. 389–400, (2008).

[6] S.I. Gass the first linear programming shoppe . opirationd Research , 50(1) : 61-89 ,2002.

[7] J.B Hiriart-Urruty, C. Lemaréchal, Convex analysis and minimization algorithms I : fundamentals, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, New York, (1993).

[8] Y. Ye. Interior point algorithms. John Wiley and Sons, New York, New York, USA, 1997.

[9] N. Karmarkar. A new polynomial-time algorithm for linear programming. Combinatorica, 4 :373–395, 1984.

[10] A. Kaufmann, Méthodes et modèles de la recherche opérationnelle, pp 22-25.

[11] A. Keraghel, Analyse convexe : Théorie fondamentale et exercices, Editions Dar El'houda Ain Mlila , Algérie, (2001).).

[12] A. Keraghel, "Programmation mathématique différentiable", Paris 2010.

[13] D. G. Luenberger. Linear and nonlinear programming. Addison Wesley Publishing Company, Reading, Massachussets, USA, 1989.

[14] K. Mellouli . A. EL Lkamel .P.Borne :Programmation linéaire et applications .ElE-MENTS DE COURS ET EXERCICES DRESOLUS ,technip, Paris , 1-4 , 2004.

[15] M. Minoux. Programmation mathématique. Dunod, Paris, France, 1983.

[16] A. Orden LP from the '40s to the 90s' Interfaces 25(5) : 2-12 , 1993.

[17] R.T. Rockafellar, Convex analysis, published by Princeton University Press, 41 William Street, Princeton, New Jersey 08540.

[18] M. Sakharovitch, Graphe et programmation linéaire, Hermann, Paris, (1984).

[19] M. Simonard, programmation linéaire, dunod Paris T1 et T2, (1972).

[20] R. J. Vanderbei. Linear Programming : Foundations and extensions. International Series on Operations Research and Management Science. Springer, New York, New York, USA, 2008.

[21] H.P. Williams. Model building in mathematical programming. Wiley, New York, NY, USA,1999.

[22] R. Zitouni, Etude qualitative de modèle de transport et localisation, Thèse de doctorat de Mathématique Appliquées, Université Farhat Abbas, Sétif, (2007).