

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



N° Réf :.....

Centre Universitaire de Mila

Institut des Sciences et de la Technologie

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de licence

En:- Filière Mathématiques Fondamentales

Thème Convexité dans les espaces de Hilbert

Préparé par :

- Labid Messaouda
- Souici Dounia
- Rouibeh Khaoula
- Chaouch Khaoula

Encadré par : Arroud Chems eddine Grade :M.A.A

Année universitaire : 2013/2014

REMERCIEMENTS

Après avoir achevé ce travail scientifique, grâce en premier lieu à l'aide de Dieu, nous tenons à remercier infiniment le Professeur encadreur Monsieur Arroud Chems eddine, qui n'a ménagé aucun effort pour mener à bien ce travail scientifique, grâce à ses orientations et ses recommandations, comme nous tenons à remercier l'ensemble des fonctionnaires de l'Institut des Sciences et Technologie relevant de centre universitaire de Mila sur les facilités qu'ils nous ont accordés, en particulier, le personnel de la bibliothèque de l'institut.

Nous dédions ce travail scientifique que l'on espère être un nouveau jalon dans la voie de recherche scientifique, à nos parents qui nous ont accompagnés tout au long de cette recherche, tout en fournissant un climat adéquat pour la recherche.

Table des matières

Introduction Générale	2
1 Notions Préliminaires	4
1.1 Ensemble convexe	4
1.2 Combinaison convexe	5
1.3 Enveloppe convexe	5
1.4 Propriétés Topologiques	6
1.5 Fonction Convexe	7
1.6 Domaine	7
1.7 semi-continue inférieur	8
1.8 Continuité des fonctions convexes	8
1.9 Dérivabilité des fonctions convexes	8
1.10 Sous différentiabilité	8
1.11 Espaces métriques	9
1.12 La norme	10
1.13 Produit scalaire	10
1.14 Espace préhilbertien	11
1.15 Identités remarquables	11
2 Exemple et application des fonctions convexes	13
2.1 La projection	13
2.1.1 L'orthogonalité	13
2.1.2 Théorème de pythagore	14

2.1.3	Théorème de projection	15
2.2	Cônes	20
2.2.1	Cône convexe	20
2.2.2	Cône normale	21
Conclusion Générale		23
Bibliographie		23

Introduction Générale

La notion de convexité est un outil mathématique d'importance capitale pour l'étude des problèmes d'optimisation et autres. En effet, les ensembles et les fonctions convexes jouissent de propriétés algébriques et topologiques fréquemment utilisées dans la caractérisation des solutions optimales et même pour le développement des procédures permettant de calculer (numériquement) ces solutions. L'intérêt de la convexité à ce propos ressort du fait que d'une part, tout optimum local devient global et d'autre part, les conditions d'optimalité sont à la fois nécessaires et suffisantes. Minkowsky (1911) fût le premier, ayant fourni, systématiquement, l'essentiel des résultats fondamentaux de l'analyse convexe. Le sujet est pleinement développé ensuite entre 1958 (Eggleston) et 1970 (Rockafellar) et continue jusqu'à nos jours de faire l'objet de recherches importantes relatives aux domaines de la programmation convexe.

Pour atteindre l'objectif de cette recherche, nous avons opté pour un plan de travail réparti sur deux chapitres, le premier s'articule sur des définitions des notions préliminaires à même de nous permettre de bien cerner notre sujet, à l'instar de l'ensemble convexe, Enveloppe convexe, Fonction Convexe, semi-continue inférieure, Continuité des fonctions convexes et Dérivabilité des fonctions convexes, alors que le deuxième chapitre tourne essentiellement autour de la mise en projection dans l'espace de Hilbert ensuite on démontre le théorème principal et Cônes convexe, enfin une conclusion dans laquelle nous mettons en avant la résultante de notre recherche.

Notation

$\mathbb{N}$: Ensemble des entiers naturels.

$\mathbb{R}$: Corps des nombres réel.

$\mathbb{C}$: Corps des nombres rationnelles.

$\mathbb{k}$: Corps des nombres complexes.

E : Espace vectoriel.

λ : Conjugué.

$L(E)$: L'ensemble des fonction linéaire.

Re : Partie réel.

Im : Partie imaginaire.

$|\cdot|$: Module.

Chapitre 1

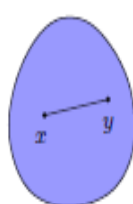
Notions Préliminaires

1.1 Ensemble convexe

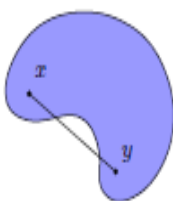
Définition 1.1.1 soit E un espace vectoriel et A une partie de E , on dit que A est convexe si

$$\forall x, y \in A, \forall \lambda \in [0, 1] \quad \lambda x + (1 - \lambda)y \in A$$

Définition 1.1.2 Un sous ensemble C de $\mathbb{R}^2$ est un convexe si pour chacun des couples (x, y) de C^2 le segment $[x, y]$ est inclus dans C . les convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles de $\mathbb{R}$.



convexe



non convexe



convexe



non convexe

Exemples et propriétés

Ci dessous E , E_1, E_2 et F sont des espaces vectoriels :

1. La somme $C_1 + C_2 = \{x_1 + x_2 : x_1 \in C_1, x_2 \in C_2\}$ est convexe.

2. Le produit scalaire $\alpha C = \{\alpha x : x \in C\}$ est convexe.

3. Si $\{C_i\}_{i \in I}$ est une famille quelconque de convexes de E , alors leur intersection $\cap_{i \in I} C_i$ est un convexe.

4. Soit $A: E \rightarrow F$ une application linéaire. l'image directe $A(C)$ est convexe et l'image réciproque $A^{-1}(C)$ est convexe :

5. Soient $C_1 \subset E_1$ et $C_2 \subset E_2$. Alors $C_1 \times C_2$ est convexe dans $E_1 \times E_2$ si et seulement si C_1 et C_2 sont convexes.

1.2 Combinaison convexe

Définition 1.2.1 On appelle combinaison convexe de m vecteurs de $\mathbb{R}^n$ $x_1, x_2, \dots, x_m$ toute combinaison linéaire :

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i \text{ avec } \lambda_i \geq 0 \forall i \text{ et } \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$$

1.3 Enveloppe convexe

Définition 1.3.1 Soit E un espace vectoriel et A une partie de E , on appelle enveloppe convexe de E et on note $\text{conv}(A)$ le plus petit convexe contenant A , c'est l'intersection de tous les convexes contenant A , il est défini de façon équivalente comme l'ensemble des combinaisons convexes d'éléments de A :

$$x \in \text{conv}(A) \iff \exists x_1, \dots, x_n \in A \\ \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+ \text{ avec } \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \text{ telle que } x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$$

Preuve.

On note:

$$B = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \mid \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, \lambda_i \in \mathbb{R}^+, x_i \in A \right\}$$

L'ensemble de toutes les combinaisons convexes de A on veut montrer: $\text{conv}(A) = B$

$B \subset \text{conv}(A)$

$y \in B \implies y = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i / x_i \in A \subset \text{conv}(A)$

comme le $\text{conv}(A)$ est convexe de ces éléments donc $y \in \text{conv}(A)$ d'où: $B \subset \text{conv}(A)$.

$\text{conv}(A) \subset A$

on a: $A \subset B$

$\text{conv}(A)$ convexe contenant A

pour terminer il suffit de prouver que B est convexe.

Soient $y \in B, z \in B$ et $\lambda \in [0, 1]: \lambda y + (1 - \lambda) z \in B$

$$\lambda y + (1 - \lambda) z = \lambda \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i + (1 - \lambda) \sum_{i=1}^n \beta_i z_i$$

comme $y_i, z_i \in A$ et

$$\lambda \sum_{i=1}^n \lambda_i + (1 - \lambda) \sum_{i=1}^n \beta_i = 1$$

alors: B est convexe contenant A et par défaut $\text{conv}(A)$ est le plus petit convexe contenant $A \implies \text{conv}(A) \subset B$. ■

1.4 Propriétés Topologiques

Proposition 1.4.1 Si U est un ensemble convexe, son intérieur et son adhérence le sont aussi.

Proposition 1.4.2 Soit U un sous ensemble quelconque d'enveloppe convexe fermée de U et notée $\overline{\text{conv}}(U)$ étant le plus petit convexe fermé contenant U , on a: $\overline{\text{conv}(U)} = \overline{\text{conv}}(U)$.

D'autre part, lorsque U est borné dans $\mathbb{R}^n$, l'opération de passage à l'enveloppe convexe et celle de fermeture commutent entre elles, ce qui signifie:

$$\text{conv}(\overline{U}) = \overline{\text{conv}(U)}$$

1.5 Fonction Convexe

Définition 1.5.1 Soit $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit f définie sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, on dit que f est convexe si pour tous les couple (x,y) des points de cet intervalle $[a,b]$ et pour tous $\lambda \in [0,1]$, l'inégalité suivante, dit <<inégalité de convexité >> est vérifiée:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

Définition 1.5.2 La fonction f est dite strictement convexe si l'inégalité de convexité est stricte lorsque le couple (x,y) vérifiée: $x \neq y$ avec $\lambda \in]0,1[$

Autrement dit si:

$$\begin{aligned} \forall [x,y] \subset [a,b], x \neq y, \forall \lambda \in]0,1[\\ f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \end{aligned}$$

Définition 1.5.3 L'épigraphe de la fonction F définie par:

$$\text{epi}(F) = \{(x,\lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} / F(x) \leq \lambda \in \mathbb{R}^{n+1}\}$$

Définition 1.5.4 Une fonction $F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ est dite convexe si son épigraphe est une ensemble convexe de $\mathbb{R}^{n+1}$

ie: $F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe $\iff \text{epi}(F)$ convexe dans $\mathbb{R}^{n+1}$.

Exemple 1.5.1 1. Soit $f(x) = \|x\|$, $x \in \mathbb{R}^n$

on montre que pour $x,y \in \mathbb{R}^n, \lambda \in [0,1]$

$$\begin{aligned} \|\lambda x + (1-\lambda)y\| &\leq \|\lambda x\| + \|(1-\lambda)y\| \\ &\leq \lambda \|x\| + (1-\lambda) \|y\| \\ &\leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \end{aligned}$$

1.6 Domaine

Définition 1.6.1 Soit E un espace Topologique et ϕ une fonction de E dans $]-\infty, +\infty[$
On appelle domaine de ϕ l'ensemble:

$$D(\phi) = \{x \in E, \phi(x) < +\infty\}$$

1.7 semi-continue inférieure

Définition 1.7.1 Soit E un espace Topologique et une fonction $\phi : E \longrightarrow]-\infty, +\infty[$ est dite semi continue inférieure (s.c.i) si l'une des trois propriétés est vérifiée:

1. $\text{epi}(\phi)$ est fermé dans $E \times \mathbb{R}$.
2. L'ensemble $\{x \in E, \phi(x) \leq \alpha\}$ est fermé dans E pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.
3. Pour tout $x \in E$, toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendant vers x on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf \phi(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\inf_{k \geq n} \phi(x_k) \right) \geq \phi(x)$$

1.8 Continuité des fonctions convexes

Proposition 1.8.1 Si f est fonction convexe sur l'intervalle $[a, b]$, alors f est continue sur $]a, b[$.

Proposition 1.8.2 Si f est fonction convexe sur l'intervalle I , elle est Lipschitzienne sur tout segment inclus dans l'intérieur de I .

1.9 Dérivabilité des fonctions convexes

Définition 1.9.1 Proposition 1.9.1 Soit f une fonction convexe sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ alors f est dérivable à droite et à gauche en tout point de l'ouvert $]a, b[$.

Si de plus f est continue à droite en a , alors soit la dérivée à droite $f_d(a)$ existe dans $\mathbb{R}$, soit cette dérivée est égale à $-\infty$. De même, si f est continue à gauche en b , ou bien $f'_g(b) \in \mathbb{R}$.

1.10 Sous différentiabilité

Etant donné une fonction convexe différentiable sur $\mathbb{R}^n$, on a toujours l'inégalité suivante:

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle x - x_0, \nabla f(x_0) \rangle, \forall x, x_0 \in \mathbb{R}^n$$

De sorte que, si f n'est pas différentiable en x_0 , $\nabla f(x_0)$ sera remplacé par différentiable en x_0 .

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle x - x_0, g \rangle, \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Définition 1.10.1 Si f est fonction convexe dans $\mathbb{R}^n$ et $x_0 \in \text{Dom}(f)$, alors l'ensemble:

$$\partial f(x_0) = \{g \in \mathbb{R}^n / f(x) - f(x_0) \geq \langle x - x_0, g \rangle \forall x \in \mathbb{R}^n\}$$

on appelle sous différentiel de f en x_0 .

Proposition 1.10.1 Tout vecteurs $g \in \partial f(x_0)$ est appelé sous gradient de f en x . Il est clair que:

1. $\partial f(x_0)$ est convexe fermé dans $\mathbb{R}^n$.
2. $\partial f(x_0) = \{g\} \iff g = \nabla f(x_0) \iff f$ est différentiable en x_0 .
3. Si $\partial f(x_0) \neq \emptyset$ et si f n'est pas différentiable en x_0 on dit que f est sousdifférentiable en x_0 .

Exemple 1.10.1 Dans $\mathbb{R} : f(x) = |x| = \max\{-x, x\}$

on pose $f_1(x) = -x$ et $f_2(x) = x$

$\text{Dom}(f_1) = \mathbb{R}; \text{Dom}(f_2) = \mathbb{R}$

f est différentiable sur $\mathbb{R} - \{0\}$

Au point $x_0 = 0$; on a $f_1(0) = f_2(0) = f(0) = 0$

$$\partial f_1(x) = f'_1(x) = -1 \quad \forall x \quad (\text{car } f_1 \text{ est différentiable sur } \mathbb{R})$$

$$\partial f_2(x) = f'_2(x) = 1 \quad \forall x \quad (\text{car } f_2 \text{ est différentiable sur } \mathbb{R})$$

1.11 Espaces métriques

Définition 1.11.1 (Espace métrique). Une espace métrique (X, d) est un ensemble X muni d'une application $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$, appelée distance ou métrique, qui satisfait les

propriétés suivantes:

1. $\forall x, y \in X, d(x, y) \geq 0$ et $d(x, y) = 0 \iff x = y$.

2. $d(x, y) = d(y, x)$, (symétrie).

3. $\forall x, y, z \in X, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, (inégalité triangulaire)

1.12 La norme

Définition 1.12.1 (Espace normé). Un espace vectoriel normé $(E, |||)$ est un espace vectoriel E sur $K = R$ ou C muni d'une application $|||: E \times E \rightarrow K$, appelée norme, qui satisfait, pour tout x et $y \in E$, les propriétés suivantes:

1. $||x|| \geq 0$ et $||x|| = 0$ si et seulement si $x = 0$.

2. $||\lambda x|| = |\lambda| ||x||, \lambda \in K$.

3. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$, (inégalité triangulaire).

1.13 Produit scalaire

Définition 1.13.1 On appelle produit scalaire une application $\langle \cdot, \cdot \rangle: E \times E \rightarrow R$ vérifiant les axiomes suivants

1. positivité: $\forall x \in E, \langle x, x \rangle \geq 0; \langle x, x \rangle = 0$ si et seulement si $x = 0$.

2. Symétrie. $\forall x, y \in E, \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$.

3. Linéarité. $\forall x, y, z \in E, \lambda \in R, \langle \lambda x + y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$.

Proposition 1.13.1 (inégalité de Cauchy-Schwarz). Si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E alors: $|\langle x, y \rangle| \leq \langle x, x \rangle^{1/2} \langle y, y \rangle^{1/2}$, avec égalité si et seulement si x et y sont liés.

Proposition 1.13.2 Si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E alors on obtient une norme sur E

$$\forall x \quad ||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \langle x, x \rangle^{1/2}$$

1.14 Espace préhilbertien

Définition 1.14.1 On appelle espace préhilbertien complexe (ou réel) le couplé constitué par un espace vectoriel E complexe (ou réel) et par un produit scalaire hermitien $\langle \cdot, \cdot \rangle$ on le notera $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Corollaire 1.14.1 Sur un espace préhilbertien $(E, \|\cdot\|)$, la quantité $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ définie une norme, pour laquelle le produit scalaire est continu: $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$

1.15 Identités remarquables

Identité du parallélogramme

Soit E un espace vectoriel euclidien ou hermitien, x et y deux éléments Alors :

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

L'identité du parallélogramme signifie que, dans un parallélogramme, la somme des carrés des longueurs des diagonales est égale à la somme des carrés des longueurs des cotés Soit $x, y \in E$ on sait que :

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

et

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x, y\|$$

donc, en sommant :

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Identité de la médiane

Soit a, b, c trois points d'un espace préhilbertien E et m le milieu du segment $[b, c]$ alors:

$$\|a - b\|^2 + \|a - c\|^2 = 2\|a - m\|^2 + \|b - c\|^2$$

Identité de polarisation

Définition 1.15.1 *Soit E un espace préhilbertien complexe, on a les identité suivantes:*

$$1. \forall x, y \in E, \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}(x, y) + \|y\|^2$$

$$2. \forall x, y \in E, \|x + iy\|^2 = \|x\|^2 - 2\operatorname{Im}(x, y) + \|y\|^2$$

$$3. \forall x, y \in E, \langle x, y \rangle = \left(\frac{1}{4} \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 - i \|x + iy\|^2 + i \|x - iy\|^2 \right)$$

Chapitre 2

Exemple et application des fonctions convexes

Dans ce chapitre nous traitons le théorème de projection qui concerne l'orthogonalité et encore le théorème de pythagore et à la fin seront exposé le projection orthogonal sur un convexe complet.

2.1 La projection

Espace de Hilbert

Définition 2.1.1 *Espace de Hilbert un espace préhilbertien qui est complet pour la distance associé à produit scalaire*

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$$

1-Tout espace préhilbertien de dimension finie est un espace de Hilbert.

2-Tout espace vectoriel normé de dimension finie est complet.3-Un espace de Hilbert est un cas particulier de espace de Banach.

2.1.1 L'orthogonalité

Définition 2.1.2 *Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien, on dit que les deux vecteurs x et y sont dits orthogonaux: $\langle x, y \rangle = 0$ ce qu'on notera : $x \perp y$.*

-On dit que deux parties $A = \emptyset$ et $B = \emptyset$ de E sont orthogonales si et seulement si :
 $\forall a \in A, \forall b \in B : a \perp b$ i.e. $\langle a, b \rangle = 0$ et on note $A \perp B$.

Définition 2.1.3 Soit E un espace préhilbertien.

Soit $a \in E$, on appelle orthogonale de a , note $a^\perp$ l'ensemble des vecteurs de E orthogonale

$$a^\perp = \{y \in E, \langle a, y \rangle = 0\}.$$

Définition 2.1.4 Si la forme bilinéaire n'est pas symétrique, il existe encore un cas où il est possible de parler d'orthogonalité au sens précédent, celui des formes réflexives qui vérifient si et seulement si:

$$\forall x, y \in E : \langle x, y \rangle = 0 \iff \langle y, x \rangle = 0$$

Définition 2.1.5 Soit une partie non vide d'un espace préhilbertien E . On dit qu'un élément x de E est orthogonal à A s'il est orthogonal à chaque point y de A et on écrit:

$$x \perp A \iff \langle x, y \rangle = 0, \forall y \in A$$

2.1.2 Théorème de pythagore

Les vecteurs x et y sont orthogonaux dans E si et seulement si:

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

on montre facilement par récurrence sur $p \geq 2$, que si $x_1, \dots, x_p$ sont deux à deux orthogonaux

$$\left\| \sum_{i=1}^p x_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^p \|x_k\|^2$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Preuve. On a :

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \langle x, y \rangle$$

et comme: $x \perp y \implies \langle x, y \rangle = 0$ donc

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

le résultat s'en déduit le vecteur traitera le cas de n vecteurs. ■

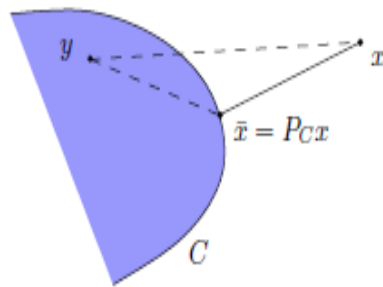
2.1.3 Théorème de projection

Définition 2.1.6 Soit H une partie non vide d'un espace préhilbertien E , soit $x \in H$ il existe un point unique $y \in C$ telque:

$$\|x - y\| = \text{dist}(x, C) = \inf_{z \in C} \|x - z\|$$

et on note: $y = p_C(x)$ est la projection de x sur C . Il est caractérisé par la propriété:

$$z \in C : \text{Re} \langle x - y, z - y \rangle \leq 0 \dots (*)$$



Preuve. Soit $d = \text{dist}(x, C)$ si $d=0$ alors $x \in C$ (car C est fermé) et $y = x$ est l'unique point de C telque: $\|x - y\| = 0$.

1. Supposons que $d > 0$.

Existence: Rappelons que nous donnons la définition de $\inf$ Pour tout $n \geq 1$, il existe $z_n \in C$ tel que:

$$d \leq \|x - z_n\| \leq d + \frac{1}{n} \dots (1)$$

Montrons que (z_n) une suite de Cauchy; Appliquons l'égalité des parallélogramme: Pour $m, n \geq 1$, soient

$$u = x - z_n \text{ et } v = x - z_m$$

les cotés des parallélogrames ses diagonales alors:

$$2 \|x - z_n\|^2 + 2 \|x - z_m\|^2 = \|z_n - z_m\|^2 + \|2x - z_n - z_m\|^2$$

On remarque que: $\frac{z_n+z_m}{2} \in C$ (car est convexe) on a donc :

$$\left\| 2x - \frac{z_n + z_m}{2} \right\|^2 = 4 \left\| x - \frac{z_n + z_m}{2} \right\|^2 \geq 4d^2$$

de (1) on a:

$$\begin{aligned} \|x - z_n\|^2 &\leq \left(d + \frac{1}{n}\right)^2 \\ \|x - z_m\|^2 &\leq \left(d + \frac{1}{m}\right)^2 \end{aligned}$$

donc:

$$\|z_n - z_m\|^2 = 2 \|x - z_n\|^2 + 2 \|x - z_m\|^2 - 4 \left\| x - \frac{z_n + z_m}{2} \right\|^2$$

d'où:

$$\begin{aligned} \|z_n - z_m\|^2 &\leq 2 \left(d + \frac{1}{n}\right)^2 + 2 \left(d + \frac{1}{m}\right)^2 - 4d^2 \\ &= \frac{4d}{n} + \frac{4d}{m} + \frac{2}{n^2} + \frac{2}{m^2} \\ &\leq \frac{8d+4}{N} \quad n, m \geq N \end{aligned}$$

Donc z_n est une suite de Cauchy puisque H est complet, (z_n) convergente vers un élément $y \in C$, car C est fermé

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n) = y \implies \lim_{n \rightarrow \infty} (z_n - x) = y - x \implies \lim_{n \rightarrow \infty} (\|z_n - x\|) = \|y - x\|$$

mais $\lim_{n \rightarrow \infty} (\|z_n - x\|) = d$ donc $\|y - x\| = d$.

unicité : Soit aussi $y^* \in C$ vérifie

$$\|y^* - x\| = d$$

On utilise l'égalité du parallélogramme: $v = x - y^*$ et $u = x - y$

$$4d^2 = 2 \|x - y\|^2 + 2 \|x - y^*\|^2 \geq \|y - y^*\|^2 + 4d^2$$

d'où:

$$\|y - y^*\| = 0 \quad \text{donc } y = y^*$$

■

Preuve. de (*): Soit $z \in C$ alors: $y + t(z - y) \in C$, $t \in [0, 1]$ donc

$$\|x - y\|^2 \leq \|x - y + t(y - z)\|^2 = \|x - y\|^2 + t^2 \|y - z\|^2 + 2t \operatorname{Re} \langle x - y, y - z \rangle$$

d'où:

$$t^2 \|y - z\|^2 + 2t \operatorname{Re} \langle x - y, y - z \rangle \geq 0$$

pour $t \neq 0$ divisons par t , il vient:

$$t \|y - z\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x - y, y - z \rangle \geq 0$$

donc

$$\operatorname{Re} \langle x - y, y - z \rangle \geq 0$$

Soit $\operatorname{Re} \langle x - y, y - z \rangle \leq 0$. Réciproquement si y vérifie (*). On a pour tout $z \in C$

$$\|x - z\|^2 = \|x - y + y - z\|^2 = \|x - y\|^2 + \|y - z\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x - y, y - z \rangle \geq \|x - y\|^2$$

en vertu de l'unicité de $p_c(x)$ obtient $y = p_c(x)$. ■

Proposition 2.1.1 L'application $P_c : H \longrightarrow C$ est continue plus précisément on a:

pour tous $x_1, x_2 \in H$

$$\|P_c(x_1) - P_c(x_2)\| \leq \|x_1 - x_2\|$$

Proposition 2.1.2

posons $y_1 = P_c(x_1)$ et $y_2 = P_c(x_2)$ la condition (*) donne:

$$\operatorname{Re} \langle x - y_1, z - y_1 \rangle \leq 0 \text{ et } \operatorname{Re} \langle x - y_2, z' - y_2 \rangle \leq 0$$

En prenant: $z = y_2$ et $z' = y_1$ et on additionnant, il vient

$$\operatorname{Re} \langle (x_1 - y_1) - (x_2 - y_2), y_2 - y_1 \rangle \leq 0$$

on obtient donc

$$\begin{aligned}
0 &\leq \|y_1 - y_2\|^2 - \operatorname{Re} \|y_1 - y_2\|^2 \\
&= \operatorname{Re} \langle (x_1 - y_1) - (x_2 - y_2), (y_2 - y_1) \rangle + \operatorname{Re} \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle \\
&= \operatorname{Re} \langle (y_2 - x_2) + (x_2 - x_1) + (x_1 - y_1), y_2 - y_1 \rangle \\
&\leq \operatorname{Re} \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle \leq |\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle| \\
&\leq \|x_2 - x_1\| \|y_2 - y_1\| \text{ (Cauchy Schwartz)}
\end{aligned}$$

En divisant par $\|y_2 - y_1\|$ (en supposant $\|y_2 - y_1\| \neq 0$) on obtient:

$$\|y_1 - y_2\| \leq \|x_1 - x_2\|$$

dans le cas ou le convexe c'est un sous espace vectoriel on a de meilleures propriétés.

Proposition 2.1.3 Si F est un sous espace vectoriel fermé de l'espace de Hilbert H , alors l'application $P_c : H \rightarrow F$ est une application linéaire continue et $P_F(x)$ est l'unique point $y \in F$ telle que $y \in F, x - y \in F^\perp$

Preuve. D'abord si $y \in F$ et $x - y \in F^\perp$ on a:

$$\operatorname{dist}(x, F)^2 = \inf_{z \in F} \|x - z\|^2 = \inf_{z \in F} [\|x - y\|^2 + \|y - z\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x - y, y - z \rangle] = \|x - y\|^2$$

car $y - z \in F$

et $x - y \in F^\perp$

donc $\langle x - y, y - z \rangle = 0$

et $\inf_{z \in F} \|y - z\| = \|y - y\| = 0$

donc

$$\|x - y\| = \operatorname{dist}(x, F) \text{ et } y = P_F(x)$$

Réciproquement supposons $y = P_F(x)$ d'après (*) on a :

$$\operatorname{Re} \langle x - y, z - y \rangle \leq 0 \forall z \in F, \forall w \in F \text{ et } \lambda \in \mathbb{R}, z = y + \lambda w \in F$$

Si H est complexe on a:

$$0 \geq \operatorname{Re} \langle x - y, z - y \rangle = \operatorname{Re} \langle x - y, \lambda w \rangle = \lambda \operatorname{Re} \langle x - y, w \rangle \forall w \in F$$

alors:

$$0 \geq \operatorname{Re}\langle x - y, i\lambda w \rangle = \lambda \operatorname{Re}\langle -i(x - y), w \rangle = \lambda \operatorname{Im}\langle x - y, w \rangle \quad \forall w \in F \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Pour $\lambda = 1$ on trouve $\operatorname{Im}\langle x - y, w \rangle \leq 0 \quad \forall w \in F$

Pour $\lambda = -1$ on trouve $\operatorname{Im}\langle x - y, w \rangle \geq 0$

D'où $\operatorname{Im}\langle x - y, w \rangle = 0 \quad \forall w \in F \dots (b)$

De (a) et (b).

on obtient $\langle x - y, w \rangle = 0 \quad \forall w \in F$.

d'où $x - y \in F^\perp$

la linéarité:

Soit $y_1 = P_F(x_1)$, $y_2 = P_F(x_2)$.

alors: $(x_1 - y_1), (x_2 - y_2) \in F^\perp$

Donc: $\alpha_1(x_1 - y_1) + \alpha_2(x_2 - y_2) \in F^\perp \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

Donc:

$$\begin{aligned} (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) - (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) &\in F^\perp \\ \implies \alpha_1 y_1 - \alpha_2 y_2 &= P_c(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \\ &= \alpha_1 P_c(x_1) + \alpha_2 P_c(x_2) \end{aligned}$$

d'où

$$P_c(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 P_c(x_1) + \alpha_2 P_c(x_2)$$

la continuité est vue à la proposition précédente. ■

Preuve. Dans l'inégalité:

$$\|P_F(x_1) - P_F(x_2)\| \leq \|x_1 - x_2\| \quad \forall x_1, x_2 \in H$$

En prenant $x_2 = 0$ on trouve: $\|P_F(x)\| \leq \|x\| \quad \forall x \in H$

Donc $\|P_F(x)\| = \sup \|P_F(x)\| \leq 1$.

et comme $P_F(x) = x$ pour $x \in F$ on obtient si $F \neq \{0\}$ que $\|P_F\| = 1$

Lemme 2.1.1 Soit H un espace de Hilbert alors pour tout sous espace vectoriel fermé F on a:

$H = F \oplus F^\perp$ on dit que P_F est la projection sur F parallèlement à $F^\perp$ (ou projection orthogonale sur F)

$F^\perp$ est appelé supplémentaire orthogonale de F .

Le fait que F et $F^\perp$ forment une somme directe de H signifie que:

tout $x \in H$ s'écrit de façon unique $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in F^\perp$ comme F et $F^\perp$ sont orthogonaux on a:

$$\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2$$

En d'autres termes:

$$\|x\|^2 = \|P_F(x)\|^2 + \|x - P_F(x)\|^2$$

■

2.2 Cônes

2.2.1 Cône convexe

Définition 2.2.1 un sous ensemble C est un cône si $\forall \lambda \geq 0, \forall x \in C, \lambda x \in C$. Soit P une partie de E . L'intersection de cônes convexes étant un cône convexe, on peut parler du plus petit cône convexe contenant P , qui est donc l'intersection de tous les cônes convexes contenant P . C'est ce que l'on appelle l'enveloppe conique de P (on devrait dire son enveloppe conique convexe). On la note $\text{cone } P := \cap \{C : C \text{ est un cône convexe contenant } P\}$. On appelle combinaison conique de E , un élément x de E de la forme

$$x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i \quad / m \in \mathbb{N}^*, \lambda_i \in \mathbb{R} \text{ avec } \lambda_i \geq 0 \text{ et les vecteurs } x_i \in E$$

Preuve. on suppose que C est un cône convexe, nous allons montrer que :

$$x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i \quad m \in \mathbb{N}^*, \lambda_i \in \mathbb{R} \text{ avec } \lambda_i \geq 0 \text{ et les vecteurs } x_i \in C,$$

si

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i = 0 \implies \lambda_i = 0, \forall i \implies x = 0 \in C \ (\lambda = 0)$$

sinon

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i \neq 0, \alpha_i = \frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^m \lambda_i} \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$$

$$x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^m \lambda_i \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i \right)$$

comme C est convexe

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i \in C, x = \sum_{i=1}^m \lambda_i \bar{x} = \bar{x} \sum_{i=1}^m \lambda_i.$$

Finalement en utilisant le fait C est un cône en déduit que: $x \in C$.

Réciproquement, on suppose que C contient toutes les combinaisons conique de ses éléments en particulier il contient toutes les combinaisons convexe de ses éléments et donc C est convexe. Si on prend une combinaison conique d'ordre 1 ($m = 1$) alors: C est bien un cône. ■

Définition 2.2.2 Soit A une partie de E , on définit l'enveloppe cônica fermée de A que l'on note $\overline{\text{cone}}(A)$ comme l'intersection de cône convexes fermés contenant A

Proposition 2.2.1 1) $A_1 \subset A_2 \implies \overline{\text{cone}}(A_1) \subset \overline{\text{cone}}(A_2)$.

2) $A \subset \text{cone}(A) \subset \text{cone}(\overline{A}) \subset \overline{\text{cone}}(A) = \overline{\text{cone}}(\overline{A}) = \overline{\text{cone}(A)}$.

2.2.2 Cône normale

Définition 2.2.3 Soit H un espace de hilbert, $C \in H$ une ensemble convexe et $x \in C$, on appelle cône normale à C en x

$$N_C(x) = \{d \in H : \langle d, y - x \rangle \leq 0, \forall y \in C\}$$

Proposition 2.2.2 Si $x \in \partial C$, alors $N_C(x)$ contient un élément non nul.

Proposition 2.2.3 si $x \in \text{int}C$, $N_C(x) = \{0\}$

Proposition 2.2.4 $y = \text{proj}_C(x) \implies x - y \in N_C(y).$

Preuve. soit $y = \text{proj}_C(x) \iff \|x - y\| = d(x, C) = \inf_{c \in C} \|x - c\|$

$$\iff \langle y - x, y - c \rangle \leq 0, \forall c \in C$$

$$\iff \langle x - y, c - y \rangle \leq 0, \forall c \in C$$

$$\iff x - y \in N_C(y)$$

■

Conclusion Générale

Après notre étude et notre travail sur la convexité, on conclue que c'est un domaine vaste de recherche et essentielle notamment ces propriété dans l'analyse fonctionnelle.

Mais il y a d'autre propriétés qui restent a étudier .

Bibliographie

- [1] "Bertrand Maury" Analyse fonctionnelle, exercice et problèmes corrigés Ellipses Paris 2004
- [2] "Françoise Demengel Gilbert Demengel" ,Convexité dans les espaces fonctionnelle.
- [3] "Georges Skandalis" Topologie et analyse 3e année.
- [4] "Jean-Pierre Ramis et André Warusfel" Mathématiques tout-en-un pour la licence, niveau L2.
- [5] "Daniel Fredon, Myriem Maumy, Frédéric Bertrand" Mathématique algèbre et géométrie en 30 fiches.
- [6] "Boccard.N" Analyse fonctionnelle, paris, 1998.
- [7] "Brezis.H" Analyse fonctionnelle, théorie et application, masson, paris, 1993.