الجمهوريـة الجزائـريـة الديمقراطيـة الشعبيـة
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليــم العالــي والبحــث العلمــي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

N° Réf :...............

Centre Universitaire de Mila

Institut des Sciences et de la Technologie

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de licence

En : Filière Mathématiques fondamentales

Thème:
Approximation du problème de la chaleur par la méthode des éléments finis

Préparé par: Fedala Fatiha
Tamen Assia
Bettiche Nahla
Benmicia Rima

Encadré par: l'Abed Boudjema

Année universitaire : 2013/2014

Remerciements

Nous remercierons dieu tout puissant pour nous avoir offert la force et la patience durant tous ces années.

Nous tenons à exprimer un remerciement particulier à notre encadreur monsieur « l'Abed Boudjema » enseignant a centre universitaire du Mila pour avoir dirigé ce travail.

L'affectation du mémoire sous la direction fait à nous un grand honneur et un réel plaisir.

Sa présence, sapatience, sa culture scientifique, son aide, ses précieux conseils en ont été les modèles.

Mille merci nos trop chèrefamilles, que dieu vous garde pour nous.

Nous tenons à exprimer nos sincères remerciementsà tous les personnes de l'institut des sciences et de la technologie surtout les enseignants qui nous ont formés durant les années d'études, et tout ce qui nous ont apporté une aide au pour la réalisation de ce projet.

Sous oublierbien-sûr tous les amis et collègue d'étude pour leur encouragement et soutient morale.

Assia , Nahla, Rima, Fatiha

Dédicace

Je dédie modeste travail en signe de reconnaissance et de respect.

A ma source de tendresse, ma chère mère :Hadjla.

A mon exemplaire, mon chère père : Salah

Ames très chèrefrères : Djalal, Samir,Mokhtar,Ramadan, Mohammed.

Et mes sœurs : Hasina,Razika, Rafika, salwa.

A mon fiancé : Mohammed.

A mes petits amoures : Annes abd Al wadod,Amani.

Et tous membres de lafamille : Tamen.

A tous mes amis qui vivaient avec moi des périodes tout activement que passivement surtout : Hayet,Hadjer, Fatiha..

A tousmes profs.

A tous personne qui me connait.

Assia

Je dédie modeste travail en signe de reconnaissance et de respect.

A ma source de tendresse, ma chère mère : Hafida

A mon exemplaire, mon chère père : Ramadan

A mes très chère frères : morad, Sofiane, abd al Hadi, abd al raouf.

Et mes sœurs : Assia, Samia, Ahlem.

A mes petites amoures : Rami, Afaf, Romaissa, Houssem.

Et tous les membres de la famille : Benmicia.

A tous mes amis qui vivaient avec moi des périodes tout activement que passivement.

A tous mes profs.

A tous personne qui me connait.

RIMA

Je dédie modeste travail en signe de reconnaissance et de respect.

D'abord, je dédie cette mémoire à ma source de tendresse, ma chère mère : Sonia.

A mon exemplaire, mon chère père : Kamel.

A mes très chère frères : Wassim,Badr-Eddine,Mounir,Mehdi,Tarek.

Ames sœurs : Lamia, Karima, Raoya.

A mes petits amours : Amine, Sami, Anis, Wael.

A tous les membres de la famille : Bettiche

A tous mes amis qui vivaient avec moi des périodes tout activement que passivement.

Enfin, je dédie ce travail àtous mes enseignants du primaire à l'université.

Nahla

Je dédie modeste travail en signe de reconnaissance et de respect.

D'abord, je dédie cette mémoire à ma source de tendresse, ma chère mère : Arafa

A mes très chère frères: mon jumeau Mohammed, Ismail et Dada Abd elhak. Et mes sœurs: Hala, Rahma

A mon chère marie Salim.

A tous mes amis qui vivaient avec moi des périodes tout activement que passivement: Amina, noussa, Wassila, Assia...

Enfin, je dédie ce travail à tous mes enseignants du primaire à l'université.

Fatiha

Table des matières

Introduction

En mathématiques et en physique théorique, l'équation de la chaleur est une équation aux dérivées partielles parabolique, pour décrire le phénomène physique de conduction thermique, introduite initialement en 1811 par Jean Baptiste Joseph Fourier, 1 après des expériences sur la propagation de la chaleur, suivies par la modélisation de l'évolution de la température avec des séries trigonométriques, appelés depuis séries de Fourier et transformées de Fourier, permettant une grande amélioration à la modélisation mathématique des phénomènes, en particulier pour les fondements de la thermodynamique, et qui ont entrainé aussi des travaux mathématiques très importants pour les rendre rigoureuses, véritable révolution à la fois physique et mathématiques, sur plus d'un siècle.

Elle est aussi utilisée en mathématiques financières (équation de Black-Scholes). Ces théories sont fondées sur la distribution normale (loi de Gauss ou "courbe en cloche") très exacte pour les particules atomiques, phonons ou électrons, (sauf très près d'une transition de phase) qui diffusent par des marches simples au hasard, autant dans un sens que dans l'autre sens pour conduire la chaleur, mais beaucoup moins pour les comportement fnanciers collectifs, qui sous-estiment très fortement les événements "improbables" comme les crises ou les krachs dramatiques, alors qu'ils sont finalement beaucoup moins rares que cette loi ne le prévoit, par des comportements pas du tout au hasard, lorsque tous ensembles prennent peur et vendent.

Chapitre 1

Equation de la chaleur

1.1 Équation de la chaleur 1D

1.1.1 Présentation du problème:

Si $f:(x,t)\in[0,1]\times\mathbb{R}^{+}\longrightarrow f\left(x,t\right)\in\mathbb{R}$ est une fonction continue donnée, et si k est une constante positive, le problème parabolique que nous considérons et si consiste à chercher:

$$u:(x,t)\in[0,1]\times\mathbb{R}^{+}\longrightarrow u\left(x,t\right)\in\mathbb{R}$$

qui satisfait:

$$\frac{\partial u}{\partial t}\left(x,t\right)-k\frac{\partial^{2}u}{\partial x^{2}}\left(x,t\right)=f\left(x,t\right),\forall x\in\left]0,1\right[,\forall t>0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\left(0,t\right)=\frac{\partial u}{\partial x}\left(1,t\right)=0,\forall t>0 \qquad (2)$$

$$u(x,0)=u(x),\forall x\in\left]0,1\right[\qquad (3)$$

où $u:x\in[0,1]\longrightarrow u\left(x\right)$ est une condition initiale donnée. Le problème (1)-(3) est appelé problème de la chaleur; si $u\left(x,t\right)$ est la température d'un barreau métallique de longueur unité, alors l'équation (1) est l'équation de diffusion de la chaleur lorsque k et f sont respectivement la conductivité thermique et la puissance par unité de longueur fournie au barreau, toutes deux divisées par la densité volumique et la chaleur spécifique massique. Dans ce contexte, la condition aux limites (2) signifie que le barreau est thermiquement isolé en $x = 0$ et $x = 1$.

Dans la suite, nous présentons trois schémas des différences finies pour approcher la solution du problème ci-dessus. Nous comparons les solutions numériques aux solutions analytiques dans un cadre simple où est identiquement nulle.

1.1.2 Solution du problème lorsque la source est nulle:

Puisque le barreau est isolé (condition (2)), il est légitime de le "reproduire" par parité et 2-périodicité. En supposant $f = 0$, nous allons chercher une fonction $U : (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow U(x,t) \in \mathbb{R}$, paire et périodique de période 2 en x telle que la fonction:

$$\frac{\partial U}{\partial t}(x,t) - k\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x,t) = f(x,t), \forall x \in \mathbb{R}, \forall t > 0 \tag{4}$$

$$U(x,0) = W(x), \forall x \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

où W est le prolongement pair et 2-périodique de w, c'est-à-dire

$$W(x) = w(x); \forall x \in \left]0,1\right[,$$

$$W(x) = w(-x); \forall x \in \left]-1,0\right[,$$

$$W(x+2) = w(x); \forall x \in \mathbb{R}$$

Puisque U est paire et 2-périodique en x, nous pouvons exprimer sa série de Fourier qui sera en cosinus. Ainsi nous écrivons

$$U(x,t) = \frac{U_0(t)}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} U_j(t)\cos(j\pi x) \tag{6}$$

où

$$U_j(t) = 2\int_0^1 u(x,t)\cos(j\pi x)\,dx; \qquad j = 1,2,3,......... \tag{7}$$

En remplaçant formellement (6) dans (4) nous obtenons

$$U_0(t) = 0; \quad \forall t > 0 \tag{8}$$

$$U_j'(t) + kj^2\pi^2 U_j(t) = 0; \quad \forall t > 0, j = 1, 2, 3, ... \tag{9}$$

$$U_j'(t) = \frac{d}{dt} U_j(t)$$

où les solutions générales de (8), (9) donnent

$$U_0(t) = c_0; \quad \forall t > 0 \tag{10}$$

$$U_j(t) = C_j \exp\left(-kj^2\pi^2 t\right); \quad \forall t > 0, \quad j = 1, 2, 3, ... \tag{11}$$

où les C_j; $j = 1, 2, 3, ...$ sont des constantes. Il suffit maintenant de tenir compte de la condition initiale (5) et de développer en série de Fourier, i.e:

$$W(x) = \frac{W_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} W_j \cos j\pi x \tag{12}$$

où

$$W_j = 2\int_0^1 w(x)\cos(j\pi x), \qquad j = 1, 2, 3......... \tag{13}$$

pour obtenir $C_j = W_j$; $j = 1, 2, 3, ...$ En utilisant ce résultat avec (6), (10) et (11), nous obtenons:

$$U(x,t) = \frac{W_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} W_j \exp\left(-kj^2\pi^2 t\right)\cos(j\pi x) \tag{14}$$

puisque

$$u(x,t) = U(x,t); \quad \forall x \in [0,1], \ \forall t > 0$$

nous exprimons ainsi la solution de (1)-(3) lorsque $f = 0$ par

$$u(x,t) = \frac{W_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} W_j \cos\left(-kj^2\pi^2 t\right)\cos(j\pi x); \quad \forall x \in [0,1], \forall t > 0 \tag{15}$$

où les coefficients W_j sont donnés en fonction de la condition initiale $w(x)$ par les relations (13).

Nous remarquons que plus j est grand et plus l'amortissement de la j*-ième* harmonique vers zéro est rapide lorsque le temps t va vers l'infini.

L'exemple interactif ci-dessous illustre ce phénomène.

1.2 Équation de la chaleur 2D

Ici, l'équation de la chaleur en deux dimensions permet de voir que l'interaction entre deux zones de températures initiales différentes (la zone haute en rouge est plus chaude que la zone basse en jaune) va faire que la zone chaude va se refroidir graduellement, tandis que la zone froide va se réchauffer, jusqu'à ce que la plaque atteigne.

Définition 1.2.1 *: Soit Ω un domaine de $\mathbb{R}^3$de frontière $\partial\Omega$ et $T(x,t)$ un champ de température sur ce domaine. En présence d'une source thermique 2 dans le domaine, et en l'absence de transport de chaleur (convection), l'équation de la chaleur s'écrit:*

$$\forall x \in \Omega; \frac{\partial T}{\partial t}(x,t) = D.\Delta T(x,t) + \frac{P}{\rho c}$$

où

- Δ *est l'opérateur Laplacien.*
- D *est le coefficient de diffusivité thermique (en* m^2/s*).*
- P *une éventuelle production volumique de chaleur (en* W/m^3*).*
- ρ *est la masse volumique du matériau (en* kg/m^3*).*
- c *la chaleur spécifique massique du matériau (en* $J/kg.K$*).*

Pour que le problème soit mathématiquement bien posé, il faut en général spécifier:

1. *Une condition initiale:*

$$\forall x \in \Omega; T(x,0) = T_0(x).$$

2. *Une condition aux limites sur le bord par exemple:*

de Dirichlet:

$$\forall x \in \partial\Omega; T(x,t) = 0.$$

ou de Neumann:

$$\forall x \in \partial\Omega; \frac{\partial T(x,t)}{\partial n} = \overrightarrow{n}(x).\overrightarrow{\nabla}T(x,t) = 0$$

où $\overrightarrow{n}(x)$ est le vecteur normal unitaire au point x.

1.2.1 Etablissement de l'équation de la chaleur

Il existe plusieurs approches, par exemple le bilan pour un volume de contrôle. On suit ici un raisonnement s'appuyant sur la thermodynamique et la loi de Fourier.

Appliquons le premier principe de la thermodynamique à un volume τ de conducteur contenu à l'intérieur d'une surface Σ entre t et $t+dt$:

$$U(t+dt) - U(t) = \delta W + \delta Q$$

On considère ici un système isochore par conséquent $\delta W = 0$.

De plus

$$U(t) = \iiint_{\tau} \rho c T(t)\, d\tau + f(V)$$

où ρ est la masse volumique du matériau (en $kg.m^{-3}$), la chaleur spécifique massique du matériau (en $J.kg^{-1}.K^{-1}$) et $f(V)$ est une fonction du volume. Alors

$$U(t+dt) - U(t) = \iiint_{\tau} \rho c T(t+dt) - T(t)) d\tau = \iiint_{\tau} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dt d\tau.$$

On a aussi, par définition de $\overrightarrow{j}Q$ (vecteur densité de flux de chaleur) et de la densité volumique de source de chaleur par unité de temps P (en W/m^3) (note pour le signe: $\overrightarrow{j}Q.dS$ est positif quand le flux est vers l'extérieur, donc la variation de chaleur est alors négative dans le volume)

$$\delta Q = -\left(\iint_{\Sigma} \overrightarrow{j}Q.d\overrightarrow{S} \right) dt + \left(\iiint_{\tau} P d\tau \right) dt$$

Avec le théorème de Green-Ostrogradsky on obtient:

$$\delta Q = -\left(\iiint_{\tau} \operatorname{div} \overrightarrow{j}Q d\tau \right) dt + \left(\iiint_{\tau} P d\tau \right) dt$$

Donc:

$$\iiint_{\tau} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dt d\tau = -\iiint_{\tau} \operatorname{div} \overrightarrow{j}Q d\tau dt + \iiint_{\tau} P d\tau dt$$

Or ceci est valable pour tout volume τ, donc:

$$\operatorname{div} \overrightarrow{j} Q = -\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + P$$

En utilisant la loi de Fourier:

$$\overrightarrow{j} Q = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T$$

et le fait que:

$$\operatorname{div}\left(\overrightarrow{\text{grad}}\right) = \nabla^2 = \Delta_{\text{(Laplacien)}}$$

on obtient, si la conductivité thermique ne dépend pas des propriétés spatiales:

$$-\lambda \Delta T = -\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + P \Longrightarrow \frac{\rho c}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} - \Delta T = \frac{P}{\lambda}$$

ce qui est bien l'équation de la chaleur.

Enfin, en posant

$$D = \frac{\lambda}{\rho c}_{\text{(coefficient de diffusion).}}$$

Exemple 1.2.1 *: Résolution de l'équation de la chaleur par la loi de Fourier dans les deux cas nous avons besoin de solution élémentaires*

$$U(x,t) = f(x)\, g(t)$$

de manière que

$$f(x)\, g'(t) = a^2 f''(x)\, g(t)$$

et

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{g'(t)}{a^2 g(t)} = -w^2$$

ces expressions nous amenons à deux équations différentiables linéaire

$$f''(x) + w^2 f(x) = 0$$

et

$$g'(t) + a^2 w^2 g(t) = 0$$

dont les solutions sont:

$$f\left(x\right)=A\cos\left(wx\right)+B\sin\left(wx\right)$$

et

$$g\left(t\right)=c\exp\left(-\alpha^{2}w^{2}t\right)$$

et donc

$$U\left(x,t\right)=\left(A\cos\left(wx\right)+B\sin\left(wx\right)\right)\exp\left(-\alpha^{2}w^{2}t\right)$$

(on peut prendre $c=1$*)*

1. Cas d'une tige finie:

$$U\left(0,t\right)=0\Longrightarrow A=0,U\left(1,t\right)=0\Longrightarrow w=n\pi$$

et

$$U\left(x,t\right)=\sum_{n=1}^{\infty}B_{n}\exp\left(-\left(\alpha n\pi\right)^{2}\frac{t}{L}\right)\sin\left(n\pi x\right)$$

où, en particulier

$$U\left(x,0\right)=\Phi\left(x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}B_{n}\sin\left(n\pi x\right)$$

les coefficients B_n sont ceux de développement en série de Fourier de la fonction impaire de période de 21 égale à $\Phi\left(x\right)$ pour $0<x<1$,

$$U\left(x,t\right)=2\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-\left(\alpha n\pi\right)^{2}t\right)\sin\left(n\pi x\right).\int_{c}^{L}\Phi\left(s\right)\sin\left(n\pi\right)sds.$$

La température U de tige est la somme d'harmonique sinisai deux en x et exponentielle en t.

2. Cas d'une tige infinie

$$U\left(x,t\right)=f\left(x\right)g\left(t\right)$$

$$f\left(x\right)=A\cos\left(wx\right)+B\sin\left(wx\right)=H\exp\left(iwx\right)$$

$$g\left(t\right)=\exp\left(-\alpha^{2}w^{2}t\right)$$

il n'ya pas de condition aux limites et donc w n'est plus déterminé représentons

$$U(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty} H(w)\exp\left(iwx-\alpha^2 w^2(t)\right)dw$$

vérifions que $U(x,\ t)$ est solution de l'équation de la chaleur et que nous choisir $H(w)$ de manière satisfaire les conditions initiales:

$$U(x,0)=\Phi(x)\,;\quad \text{si}\ \ t>0$$

$$U(x,0)=\int_{-\infty}^{+\infty} H(w)\exp(iwx)\,dx=\Phi(x)$$

donc $\Phi(x)$ est le transformée de Fourier de $H(w)$.

$$H(w)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(x)\exp(-iwx)\,dx$$

d'où

$$U(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(iwx-\alpha^2w^2t\right)dw.\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(Y)\exp(-iwx)\,dY\right]$$

et on a:

$$U(x,t)=\frac{1}{2\alpha t\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(\frac{-(x-y)}{4\alpha^2 t}\right)\Phi(Y)\,dY\quad ,t>0.$$

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\left[\frac{-1}{4\alpha\sqrt{\pi}}t^{\frac{-3}{2}}+\frac{1}{8\alpha^3\sqrt{\pi}}t^{\frac{-5}{2}}\right]\times\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(\frac{-(X-Y)^2}{4\alpha^2 t}\right)\Phi(Y)\,dY.$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial X^2}=\left[\frac{-1}{4\alpha^3\sqrt{\pi}}t^{\frac{3}{2}}\right]\times\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(\frac{-(X-Y)^2}{4\alpha^2 t}\right).\left[1-\frac{(X-Y)^2}{2\alpha^2 t}\right]\Phi(Y)\,dY$$

et la transposition dans l'équation de la chaleur de cas deux dernières expressions permet de vérifier rapidement que $U(x,t)$ ainsi définie vérifier l'équation de la chaleur:

$$U(x,t)=\frac{1}{2\alpha t\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(\frac{-(X-Y)^2}{4\alpha^2 t}\right)\Phi(Y)\,d(Y)\,,\quad (t>0).$$

1.3 Différences finies:

La méthode des différences finies est une des plus anciennes méthodes de simulation numérique qui est encore utilisée pour certaines applications, comme la propagation d'ondes (sismique ou électromagnétique) ou la mécanique du solide ou celle des fluides compressibles. Pour d'autres applications, comme la mécanique du solide ou celle des fluides incompressibles, on lui préfère souvent la méthode des éléments finis. Néanmoins, de nombreux concepts en différences finies se retrouvent dans toutes les autres méthodes numériques. La généralité et la simplicité de la méthode des différences finies motivent donc son exposition détaillée en début de cet ouvrage.

1.3.1 Différences finies pour l'équation de la chaleur:

On s'intéresse au problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur, paramétré par un coefficient de diffusion constant $k > 0$; une fonction source $f(\cdot)$ d'une variable réelle et une condition initial $u_0(\cdot)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial t} - k\dfrac{\partial^{2u}}{\partial x^2} = f\left(x\right), \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ \quad u\left(x, 0\right) = u_0\left(x\right), \quad x \in \mathbb{R}. \end{array} \right. \tag{17}$$

On se donne un pas d'espace $h > 0$ et un pas de temps $\Delta t > 0$, les points de discrétisation $x_j = jh\,(j \in \mathbb{Z})$ en espace et $t^n = n\Delta t\,(n \in \mathbb{N})$ en temps qui définissent un maillage uniforme. On approche la solution, supposée régulière $u\left(x, t\right)$ du problème (17) au point de la grille (x_j, t^n) par le nombre u_j^n. On sait que le schéma de discrétisation explicite classique à deux pas de temps défini par la relation

$$\frac{1}{\Delta t}\left(u_j^{n+1} - u_j^n\right) - \frac{k}{h^2}\left(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n\right) = f\left(x_j\right), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N} \tag{18}$$

est d'ordre deux en espace mais seulement d'ordre un en temps. On se propose dans cet exercice de définir un schéma aux différences à deux pas de temps qui soit stable et d'ordre deux à la fois en espace et en temps.

On suppose $f = 0$ et on pose

$$U_j^n \equiv u\left(x_j, t^n\right), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{19}$$

1. démontrer que pour $u(\cdot,\cdot)$ solution de (17), on a:

$$\frac{1}{\Delta t}\left(U_j^{n+1}-U_j^n\right)=\frac{\partial u}{\partial t}\left(x_j,t^n\right)+\frac{k^2\Delta t}{2}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\left(x_j,t^n\right)+O\left(\Delta t^2\right) \tag{20}$$

2. Proposer une approximation à cinq points et précise d'ordre deux de la dérivée partielle $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$ d'ordre quatre en espace.

3. On suppose toujours $f=0$, Déduire des questions précédentes un schéma aux différences finies explicite à deux niveaux de temps et cinq points en espace dont l'erreur de troncature, dont on rappellera la définition, est d'ordre deux en espace et en temps, i.e. peut se développer sous la forme

$$O\left(\Delta t^2\right)+O\left(h^2\right)+O\left(\Delta t h^2\right)$$

4. Dans les conditions analogues a la question précédente, montrer que le schéma obtenu est stable au sens de Von Neumann sous une condition entre le coefficient de diffusion k, le pas d'espace h et le pas de temps Δt qu'on précisera. Pour cela, on injecte dans le schéma de la question 3) une "onde" de la forme:

$$u_j^n=\exp\left(ij\xi\right),\quad j\in\mathbb{Z},\quad i^2=-1. \tag{21}$$

paramétrée par le nombre réel ξ; on montre que le passage du temps discret conduit a une valeur de u_j^{n+1} de la forme:

$$u_j^{n+1}=g\left(\sigma,\xi\right)u_j^n \tag{22}$$

où σ est le paramètre réel à préciser et on exprime enfin que les paramètres du schéma sont tels qu'aucune onde n'est amplifiée.

5. Trouver une condition suffisante pour que le schéma proposé à la question 3 vérifie le principe du maximum, c'est a dire ici la condition:

$$\left(\alpha\leq u_k^n\leq\beta,\quad\forall k\in\mathbb{Z}\right)\Longrightarrow\left(\alpha\leq u_j^{n+1}\leq\beta,\quad\forall j\in\mathbb{Z}\right) \tag{23}$$

Comment faut-il modifier le schéma proposé à la question 3) pour garder l'ordre deux de précision en espace et en temps lorsque le second membre $f(\cdot)$ du problème (17) n'est pas identiquement nul?

1. on remarque d'abord qu'on a:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = k\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = k\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = k^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$$

et il suffit ensuite d'appliquer la formule de Taylor pour établir la relation (20).

2. on part de la relation classique

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j) = \frac{1}{h^2}\left(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}\right) + o\left(h^2\right) \tag{S1}$$

et on l'itéré pour approcher $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)(x_j) \\
&\approx \frac{1}{h^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_{j+1}) - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j) + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_{j-1})\right) \\
&\approx \frac{1}{h^4}\left((u_{j+2} - 2u_{j+1} + u_j) - 2\left(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}\right) + \left(u_j - 2u_{j-1} + u_{j-2}\right)\right)
\end{aligned}$$

ce qui conduit au schéma numérique suivante:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j) \approx \frac{1}{h^4}\left(u_{j+2} - 4u_{j+1} + 6u_j - 4u_{j-1} + u_{j-2}\right) \tag{S2}$$

Il reste à vérifier que ce schéma est effectivement d'ordre deux, ce qui est un exercice élémentaire d'utilisation de la formule de Taylor, laissé au lecteur.

3. Compte tenu des relations (20), (18) et (S2), le schéma aux différences s'écrit:

$$\frac{1}{\Delta t}\left(u_j^{n+1} - u_j^n\right) - \frac{k}{h^2}\left(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n\right) - \frac{k^2\Delta t}{2h^4}\left(u_{j+2}^n - 4u_{j+1}^n + 6u_j^n - 4u_{j-1}^n + u_{j-2}^n\right) = 0; \quad \forall j \in \mathbb{Z},\ \ n \in \mathbb{N}. \tag{S3}$$

L'erreur de troncature T_j^n est par définition égale a l'expression obtenue au membre de gauche de la relation (S3), en remplaçant par tout l'approximation u_k^p par la valeur interpolée u_k^p définie à la relation (18). La propriété pour le schéma (S3) d'avoir une erreur de troncature de la forme

$$O(\Delta t^2) + O(h^2) + O(\Delta t h^2)$$

donc d'être d'ordre deux en espace et en temps, est alors une conséquence directe de la formule de Taylor (20) et de la précision d'ordre deux en espace des schémas proposés aux relations (S1) et (S2).

4. on pose

$$\sigma = \Delta t \frac{k}{h^2} \tag{S4}$$

et on tire de (S3), (21) et (22):

$$\begin{aligned} g &= 1 + \Delta t \frac{k}{h^2} (2\cos\xi - 2) + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{k^2}{h^4} (2\cos(2\xi) - 8\cos\xi + 6) \\ &= 1 + 2\sigma (1 - \cos\xi) + \sigma^2 (2\cos\xi - 1 - 4\cos\xi + 3) \\ &= 1 - 4\sigma \sin^2\left(\frac{\xi}{2}\right) + 2\sigma^2 (1 - \cos\xi)^2 \\ &= 1 - 4\sigma \sin^2\left(\frac{\xi}{2}\right) + 8\sigma^2 \sin^4\left(\frac{\xi}{2}\right) \end{aligned}$$

Donc

$$g(\sigma, \xi) = 1 - 4\sigma \sin^2\left(\frac{\xi}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(4\sigma \sin^2\left(\frac{\xi}{2}\right)\right) \tag{S5}$$

la condition de stabilité

$$|g(\sigma, \xi)| \leq 1, \quad \forall \xi \in \mathbb{R} \tag{S6}$$

conduit à étudier pour quelles valeurs de la variable $y = 4\sin^2\left(\frac{\xi}{2}\right)$ le polynôme $1 - y + \frac{1}{2}y^2$ prend des valeurs inférieures ou égale à 1 en valeur absolue. on trouve sans difficulté $0 \leq y \leq 2$ et compte tenu de la relation (S6) et de la positivité des constantes k, h et Δt, cette condition s'écrit:

$$\sigma \leq \frac{1}{2} \tag{S7}$$

5. Il suffit d'exprimer que le schéma (S3) définit la nouvelle valeur u_j^{n+1} comme combinaison convexe des variables u_k^n pour $k \in \mathbb{Z}$ Or on a:

$$u_j^{n+1} = \left(1 - 2\sigma + 3\sigma^2\right) u_j^n + \left(\sigma - 2\sigma^2\right)\left(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n\right) + \frac{\sigma^2}{2}\left(u_{j+2}^n + u_{j-2}^n\right)$$

On vérifie aisément que la somme des coefficients de la relation précédente est égale à 1, donc la condition (23) est impliquée par les deux inégalités $1 - 2\sigma + 3\sigma^2 \geq 0$ et $\sigma - 2\sigma^2 \geq 0$. On en déduit que sous la condition (S7), le schéma (S3) est monotone.

6. La relation (20) doit être modifiée. En effet, si le second membre f est non nul, on a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f\right) = k\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = k\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(k\frac{\partial^{2u}}{\partial x^2} + f\right) = k^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + k\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.$$

Il suffit donc de modifiée, le schéma (S3) en utilisant la relation (S1) à partir du calcul précédent.

On en déduit:

$$\frac{1}{\Delta t}\left(u_j^{n+1} - u_j^n\right) - \frac{k}{h^2}\left(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n\right) - \frac{k^2\Delta t}{2h^4}\left(u_{j+2}^n - 4u_{j+1}^n + 6u_{j-1}^n + u_{j-2}^n\right) = f\left(x_j\right) + \frac{k\Delta t}{2h^4}\left(f\left(x_{j+1}\right) - 2f\left(x_j\right) + f\left(x_{j-1}\right)\right); \quad j \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}. \tag{S8}$$

Chapitre 2

La méthode des éléments finis

Dans ce chapitre nous présentons la méthode des éléments finis qui est la méthode numérique de référence pour le calcul des solutions de problèmes aux limites elliptiques, mais aussi paraboliques ou hyperboliques comme nous le verrons par la suite. Le principe de cette méthode est directement issu de l'approche variationnelle. Nous poursuivrons ainsi deux objectifs. Bien sûr, nous souhaitons introduire la méthode des éléments finis et en donner une description relativement classique. Mais notre principal objectif est d'en dégager aussi les bases mathématiques plus fondamentales. On peut se demander s'il y a vraiment besoin de s'attarder autant sur les aspects plus mathématiques. La réponse nous est apparue de plus en plus évidente au fur et à mesure que se développaient les multiples applications de cette méthode. Les notions de convergence, de normes, d'espaces fonctionnels sont de plus en plus nécessaires pour aborder les problèmes modernes notamment en ce qui concerne les méthodes adaptatives, les méthodes de stabilisation et le développement de discr étisations compatibles dans le cas de problèmes a plusieurs variables comme les équations de Navier-Stokes ou les problèmes de coques. Pour travailler sérieusement sur ces problèmes, une connaissance superficielle de la méthode des éléments finis ne suffit plus et on doit aller plus en profondeur.

Historiquement, les premières prémices de la méthode des éléments finis ont été proposées par le mathématicien Richard Courant dans les années 1940, mais ce sont les mécaniciens qui ont développé, popularisé, et démontré l'efficacité de cette méthode dans les années 1950_1960. Après ces premiers succès pratique, les mathématiciens ont alors considérablement développé les fondations théoriques de la méthode et proposé des améliorations significatives.

2.1 Éléments finis en dimension $N = 1$

Pour simplifier l'exposition nous commençons par présenter la méthode des éléments finis en une dimension d'espace. Sans perte de généralité nous choisissons le domaine $\Omega =]0, 1[$. En dimension 1 un maillage est simplement constitué d'un collection de points $(x_j)\, 0 \leq j \leq n + 1$ tels que:

$$x_0 = 0 < x_1 < \dots\dots\dots < x_n < x_{n+1} = 1.$$

Le maillage sera dit uniforme si les points x_j sont équidistants, c'est-à-dire que:

$$x_j = jh \text{ avec } h = \frac{1}{n+1}, \quad 0 \leq j \leq n + 1.$$

Les points x_j sont aussi appelés les sommets (ou nœuds) du maillage. Par souci de simplicité nue considérons, pour l'instant, le problème modèle suivant

$$\begin{cases} -u'' = f & \text{dans }]0, 1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

dont nous savons qu'il admet une solution unique dans $H_0^1(\Omega)$ si $f \in L^2(\Omega)$. Dans tout ce qui suite on notera P_k l'ensemble des polynômes à coefficients réels d'une variable réelle de degré inferieur ou égal à k.

2.1.1 Éléments finis P_1

La méthode des éléments finis P_1 repose sur l'espace discret des fonctions globalement continues et affines sur chaque maille

$$V_h = \left\{ v \in C([0, 1]) \text{ tel que } v\left|_{[x_j, x_{j+1}]} \in P_1 \right. \text{ pour tout } 0 \leq j \leq n \right\} \qquad (24)$$

et sur son sous-espace

$$V_{0h} = \{ v \in V_h \text{ tel que } v(0) = v(1) = 0 \}. \qquad (25)$$

La méthode des éléments finis P_1 est alors simplement la méthode d'approximation variationnelle appliquée aux espace V_h ou V_{0h} définis par (24) ou (25).

On peut représenter les fonctions de V_h ou V_{0h}, affine par morceaux, à l'aide des fonctions de base très simples. Introduisons la "fonction chapeau" ϕ définie par:

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si} \quad |x| \leq 1 \\ 0 & \text{si} \quad |x| > 1 \end{cases}$$

Si le maillage est uniforme, pour $0 \leq j \leq n+1$ on définit les fonctions de base

$$\phi_j(x) = \phi\left(\frac{x - x_j}{h}\right)$$

2.2 Méthode des éléments finis en dimension $N = 2$

On doit résoudre un problème du type:

$$\begin{cases} -\Delta u(x) + c(x)\, u(x) = f(x)\,; \quad \forall x \in \Omega \\ u(x) = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma \end{cases} \tag{26}$$

où Ω est un ouvert borné non vide et régulier du plan.

Le principe consiste a écrire une formulation variationnelle associée à (26) puis de résoudre ce problème sur un espace de dimension finie inclus dans $H_0^1(\Omega)$.

La construction de l'espace de dimension finie exige un maillage de Ω qui satisfait certaines règles.

On recouvre Ω par des éléments de forme simple par exemple des rectangles, des triangles.

Soit $(T_k)\,;\ k \in \{1, ..., N_T\}$ les élément de petite taille qui recouvrent Ω.

On note

$$h = \max_{k \in \{1,......,N_T\}} (diam(T_k))$$

où $diam(T_k)$ est le diamètre de l' élément T_k. On désignent par τ_h l'ensemble de tous de les éléments $\{T_k\}$; τ_h s'appelle une triangulation de Ω. Pour simplifier, supposons que Ω est a frontière polygonale.

Donc, on a

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{T \in \tau_k} T.$$

On dit que la triangulation est admissible si l'intersection entre deux éléments est soit vide, soit réduite à un point, soit un côté tout entier.

Pour la convergence de la méthode, il est nécessaire que la condition suivante soit satisfaite: il existe $C > 0$ tel que pour tout $h > 0$,

$$\underset{T \in \tau_k}{sup} \frac{h\left(T\right)}{\rho\left(T\right)} \leq C$$

où $\rho(T)$ désigne le diamètre du cercle inscrit dans l'élément T. On dit que la triangulation est régulière si la condition est remplie. Cette condition permet d'éviter des éléments trop aplatis.

2.3 Approximation par la méthode des éléments finis

2.3.1 Principe de la méthode des éléments finis

Reprenons le problème de Dirichlet homogène:

$$\begin{cases} -\Delta u\left(x\right) + c\left(x\right) u\left(x\right) = f\left(x\right); & \forall x \in \Omega \\ u\left(x\right) = 0; & \forall x \in \Gamma \end{cases} \tag{27}$$

on a écrit une formulation de ce problème sous la forme:

$$\begin{cases} \text{trouvons} \quad u \in V \quad \text{tel que} \\ a\left(u, v\right) = L\left(v\right); \quad \forall v \in V \end{cases} \tag{28}$$

avec

1. $V = H_0^1\left(\Omega\right)$,
2. $a\left(u, v\right) = \int\limits_{\Omega} \nabla u . \nabla v dx + \int\limits_{\Omega} c\left(x\right) u\left(x\right) v\left(x\right) dx$,
3. $L\left(x\right) = \int\limits_{\Omega} f\left(x\right) v\left(x\right) dx$.

2.3.2 Stratégie utilisée

L'idée de base consiste a résoudre le problème (28) dans un espace de dimension finie V_h inclus dans V approchant l'espace V dans un sens a définir: c'est le principe de la méthode de Galerkin. En autre, la construction de l'espace V_h repose sur la notion géométrique de maillage. Dans ce contexte le paramètre h correspond à la taille maximale des mailles ou cellules qui composent le maillage; il est strictement positif et dans la limite $h \longrightarrow 0$, l'espace V_h sera de plus en plus gros et approchera de mieux en mieux l'espace V tout entier.

On cherchera a résoudre le problème suivant:

$$\begin{cases} \text{trouvons } \; u_h \in V_h \; \text{ tel que} \\ a(u_h, v) = L(v)\,; \quad \forall v \in V_h \end{cases} \tag{29}$$

Le problème (29) s'appelle le problème discret du problème continu (28).

Définition 2.3.1 *: On dit que les espaces $(V_h)_h\,;\ h > 0$ forment une approximation interne de V si:*

1. pour tout $h > 0, V_h \subset V$.

2. pour tout $v \in V$, il existe $v_h \in V_h$ tel que $\|v - v_h\|_V \longrightarrow 0$ quand $h \longrightarrow 0$

D'un point de vue pratique, la construction de l'espace V_h doit satisfaire deux exigences:

1. V_h est facile a construire: on pourra choisir un espace dont la base sera formée de fonctions polynomiales par morceaux.

2. la matrice du système sera creuse c'est à dire aura beaucoup d'éléments nuls, plus elle sera creuse moins elle occupera de place mémoire. Pour cela, on choisira une base dont les fonctions ont un support dans quelques mailles.

2.3.3 Calcul effectif de la solution approchée

L'espace V_h étant de dimension finie N_h, il admet une base formée des fonctions $\left(w^1, w^2, ..., w^{N_h}\right)$. On cherche alors u_h la sons la forme

$$u = \sum_{i=1}^{N_h} u_i w^i$$

où (u_i) sont les inconnues du ce problème. Pour que la relation est lieu $\forall v_h \in V_h$, il suffit que cette relation soit pour chacune des fonctions de base de l'espace V_h. Ce qui donne en utilisant la décomposition de u_h et la linéarité de a par rapport a son premier argument:

$$\forall i \in \{1, 2, ..., N_h\}\,; \quad \sum_{j=1}^{N_h} a\left(w^j, w^i\right) = L\left(w^i\right)$$

introduisons la matrice A de taille $N_h \times N_h$ dont les coefficients d'indice i, j; et le vecteur b de $\mathbb{R}^{N_h}$ défini par:

$$b_i = L\left(w^i\right); \quad \forall i = 1, ..., N_h$$

résoudre ce problème revient le système linéaire (30)

$$AX = b \quad \text{où} \quad X = (u_1, u_2, ..., u_{N_h})\,.$$

Le système (30) a une unique solution car la matrice A est définie positive donc inversible, (A est définie positive si: $\forall X = (X1; ....; X_{N_h}) \in \mathbb{R}^{N_h}$; $X^i A \geq 0$ et $X^i AX = 0 \Rightarrow X = 0$).

En effet, on a:

$$\begin{aligned} X^i AX &= \sum_{i=1}^{N_h}\sum_{j=1}^{N_h} A_{ij} X_i X_j \\ &= \sum_{i=1}^{N_h}\sum_{j=1}^{N_h} a\left(w^j, w^i\right) X_i X_j \\ &= \sum_{i=1}^{N_h} a\left(\sum_{j=1}^{N_h} X_j w^j, w^i\right) X_i, \text{ (linéarité par rapport au premier variable)} \\ &= a\left(\sum_{j=1}^{N_h} X_j w^j, \sum_{i=1}^{N_h} X_i w^i\right), \text{ (linéarité par rapport au deuxième variable)} \\ &= a(y, y) \text{ si } y = \sum_{j=1}^{N_h} X_j w^j \geq a\left\|y\right\|^2 \text{ car } a \text{ est } V \text{ elliptique.} \end{aligned}$$

D'où, le résultat.

Ainsi la solution du système (30) est

$$X = A^{-1} b$$

2.3.4 Estimation l'erreur entre u et u_h (lemme de Cea)

On a le résultat suivant:

Lemme 2.3.1 *: (de cea)*

on a l'estimation suivante:

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V$$

où M est la constante de continuité de a et α la constante d'ellipticité.

Preuve. comme $V_h \subset V$ on la relation d'orthogonalité:

$$a(u - u_h, v_h) = 0;\ \forall v_h \in V_h$$

On en déduit que:

$$\begin{aligned} a(u - u_h, u - u_h) &= a(u - u_h, u - v_h + v_h - u_h);\ \ \forall v_h \in V_h \\ &= a(u - u_h, u - v_h) + a(u - u_h, v_h - u_h);\ \ \forall v_h \in V_h \\ &= a(u - u_h, u - v_h);\ \ \forall v_h \in V_h \end{aligned}$$

(d'après la relation d'orthogonalité).

Ainsi,

$$\alpha \|u - u_h\|^2 \leq a(u - u_h, u - v_h) \leq M \|u - u_h\| \|u - v_h\|.$$

on obtient alors:

$$\|u - u_h\| \leq \frac{M}{\alpha} \|u - v_h\|;\ \ \forall v_h \in V_h$$

■

Remarque 2.3.1 *: En pratique pour évaluer l'erreur $\|u - u_h\|$, on choisira un élément particulier v_h qui sera l'interpolé de u en un sens que l'on précisera plus loin et on montrera que cette erreur est d'ordre h^k où k est un entier qui dépend de V_h.*

2.4 Charges thermiques

2.4.1 Source de chaleur ponctuelle

Une source de chaleur ponctuelle Q est définie par la puissance thermique reçue par le système.

Elle s'exprime en W.

2.4.2 Source de chaleur volumique

Une source de chaleur volumique q est définie par la puissance thermique générée par unité de volume.

Elle s'exprime en W/m^3.

2.4.3 Température imposée (ou prescrite) T_P sur une surface S_T

La température peut être imposée en un point ou sur une surface.

2.4.4 Densité de flux φ_S imposée sur une surface S_φ

Elle s'exprime en W/m^2.

2.4.5 Échange de chaleur par convection sur une surface S_φ

La convection est l'échange de chaleur entre un solide et un fluide. Soit un point M situé à la surface du solide. Soient T la température du solide en M et T_f la température du fluide au voisinage de M. L'expérience montre que la quantité de chaleur reçue par le solide en M, par unité de surface et par unité de temps, est égale à:

$$\varphi_c = h\left(T_f - T\right) \qquad \text{(loi de Newton)}$$

où h est le coefficient d'échange par convection. h s'exprime en $W/\left(m^2.K\right)$.

2.4.6 Échange de chaleur par radiation en milieu infini sur une surface S_φ

La quantité de chaleur reçue par le solide, considéré comme un corps gris à la température T et rayonnant vers l'extérieur considéré comme un corps noir à la température T_∞ par unité de surface et par unité de temps, est égale à:

$$\varphi_r = \varepsilon\sigma\left(T_\infty^4 - T^4\right) \qquad \text{(loi de Stefan-Boltzmann)}$$

où:

1. les températures sont exprimées en Kelvin.

2. $\varepsilon < 1$ est l'émissivité (sans dimension).

3. σ est la constante de Stefan:

$$\sigma = 5,6710^{-8} W/\left(m^2.K^4\right).$$

2.5 Bilan thermique: équation de la chaleur

Soit v une partie quelconque de V limitée par la surface s. La puissance thermique stockée dans v est égale à la somme de la puissance thermique générée par les sources volumiques contenues dans v et de la puissance thermique reçue sous forme de flux à travers la surface

$$s : \int_v \rho cp \frac{\partial T}{\partial t} dv = \int_v q dv + \int_s -\overrightarrow{n} \cdot \left(-\overline{\overline{\lambda}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}} T\right) ds \tag{31}$$

où:

ρ est la masse volumique du matériau (kg/m^3).

c_p est la capacité thermique massique ($J/(kg.K)$).

$\overrightarrow{n}$ est la normale unitaire à s dirigée vers l'extérieur de v.

Transformons la dernière intégrale de la relation (31) en intégrale de volume à l'aide du théorème d'Ostrogradski.

Il vient:

$$\int_v \left(\rho cp \dot{T} - \mathrm{div}\left(\overline{\overline{\lambda}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}} T\right) - q\right) dv = 0 \tag{32}$$

où:

$$\dot{T} = \frac{\partial T}{\partial t}$$

Le domaine v étant arbitraire, on en déduit:

$$\rho cp \dot{T} - \mathrm{div}\left(\overline{\overline{\lambda}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}} T\right) - q = 0 \tag{33}$$

en tout point du solide.

Cette équation est appelée équation de la chaleur.

Remarque 2.5.1 *: pour un matériau homogène et isotrope, l'équation (31) s'écrit dans le repère orthonormé* $\{x, y, z\}$ *:*

$$\rho cp\dot{T} = \lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) + q$$

Bibliographie

[1] R.H.Gallagher; *Introduction aux élément finis,* Pluralis (1977)

[2] J.C.Culliére; *Introduction à la méthode des élément finis* (2011), éd.Dunod.

[3] J.Chaskalovic; *méthode des élément finis pour les sciences de l'ingénieur* (2004), éd.Lavoisier.