الجزائـريـة الديمقراطيـة الشعبيـة
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليـم العالـي والبحـث العلمـي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Nº Réf :……………

Centre Universitaire de Mila

Institut des sciences et de la technologie **Département de Mathématiques et Informatique**

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de licence en: - Filière mathématiques fondamentales

Méthode affine pour résoudre un problème linéaire

Préparé par : *-Benkacir Abdlfatah*
-Guendouz Mourad
-Meskine Abdellah
-Amzel Abdelaziz

Encadré par : Madame BENAOUICHA Loubna

Année universitaire :2013/2014

Remerciements

Nous tenons à remercier tout d'abord Dieu, le tout puissant pour la Volonté et le courage qu'il m'a donné pour mener à terme ce travail.

Nous tenons à remercier notre encadreur madame Ben aouicha Loubna, qui nous encouragé en nous faisant part d'observations constructives et pour ses précieux conseils.

Nous remercions nos parents, pour tous les sacrifices qu'ils ont consentis Pour nous permettre de suivre nos études dans les meilleures conditions et de nous avoir en courage tout au long de ces années.

En fin, Nous tenons à remercier toutes les amis au Département de mathématiques et informatique, et ailleurs, pour leur disponibilité et leur soutien.

-Benkacir Abdlfatah

-Guendouz Mourad

-Meskine Abdellah

-Amzel Abdelaziz

Table des matières

Introduction Générale

Par rapport à la méthode traditionnelle du simplexe, l'algorithme de Karmar-kar [Karmarkar, 1984] représente une approche trés différente puisqu'il utilise la méthode des points intérieurs au simplexe et de ce fait est considérée comme une révolution [Nazareth, 2003]. Au départ, la notion de point intérieur était réservée à des points appartenant à l'intérieur du polytope admissible. Actuellement, le terme intérieur peut être étendu au quadrant positif de x [Nazareth, 2003].

Lorsque les contraintes d'égalité du problème primal ou dual ne sont pas respectées, on peut parler de points intérieurs non admissibles. Par rapport à la complexité exponentielle de la méthode du simplexe, la complexité de l'algorithme de Karmarkar est fortement réduite, ce qui a entraîné de nombreuses recherches dans cette voie de point intérieur [Barnes, 1986, forsgren et al, 2002 ; Gill et al, 1986, Li and Xuan, 1998]. Il faut noter que le premier algorithme de complexité polynomiale est la méthode des ellipsoïdes de khachian en 1979, donc avant karmarkar, mais qui n'a pas été frutuionne sur le plan pratique par rapport au simplexe. [Dantzig and thapa, 1997] mentionne plusieurs approches de point intérieur pour le simplexe dés 1952, dont la méthode non linéaire de R.Frisch en 1954, la méthode de transformation affine de [Dikin, 1967] .

Ce mémoire est structuné en l'introduction générale, quatre chapitres et conclusion générale

Dans le premier chapitre, nous avons donné des définitions et des notations utilisées résultats préliminaires dans les autres chapitres.

Dans le deuxième chapitre, nous avons présenté la défintion de problème d'optimisation et les conditions d'optimalité sans contrainte et résultats d'existance et d'unicite, ce chapitre s'achevé par des exemples.

Dans le troisieme chapitre on donne la défintion de problème doptimale avec contrainte et les conditions de ce problème, Notre but dans ce chapitre et d'obtenir les résultats d'existance et d'unicite.

Dans le quatrieme chapitre on donne un méthode de point intérieure "affine scaling" et algoritheme de ce méthode .

Notation

R l'ensemble des nombres réels.

C l'ensemble des nombres complexes.

∂f les dérivés partiele de la fonction f.

$D(A)$ domaine de A.

$\Phi(x)$ est un fonction.

H l'espace de Hilbert.

$B\ (x\ ,\alpha)$ la boule de centre x et de rayen a.

K° intérieur de K.

Chapitre 1

Les definitions :

Définition 1.0.1 *(**convexe**) Soit E un espace vectoriel et $f : E \longrightarrow R$.*

- On dit que f est convexe si $\forall (x, y) \in E^2$ t.q. $x \neq y$ et $t \in [0, 1]$:

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

- On dit que f est strictement convexe si : $\forall (x, y) \in E^2$ t.q. $x \neq y$ et $t \in]0, 1[$:

$$f(tx + (1-t)y) \prec tf(x) + (1-t)f(y).$$

Définition 1.0.2 (***matrice hessienne***). *Pour $x \in \Omega$ on note (quand $\exists$) $\nabla^2 f(x) = 0$ la matrice carrée $\in M_n(IR)$ donnée par :*

$$\left(\nabla^2 f(x)\right)_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x), \quad \forall i, j = 1, 2, ..., n.$$

$\big(\nabla^2 f(x)$ s'appelle aussi **la matrice hessienne** de f en $x\big)$.

Définition 1.0.3 *On dit que $J : H \longrightarrow R$ est **corecive** si :*

$$\lim_{\|x\| \longrightarrow +\infty} J(x) = +\infty.$$

Ici $\| \,.\, \|$ désigne la norme de l'espace de Hilbert H. Dans le cas où $H = R^n$ les normes sont toutes équivalentes et $\| \,.\, \|$ désigne une norme quelconque de R^n. On notera $\| \,.\, \|_p$ $(p \in N)$ la norme $l_p$de R^n :

$$\| x \| = \left[\Sigma_{i=1}^n |x_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} \qquad\qquad \forall\, x = (x_1, ..., x_n) \in R^n$$

Définition 1.0.4 *La norme infinie de R^n est défini par la forme suivante :*

$$\| x \|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \qquad\qquad \forall \ x = (x_1, ..., x_n) \in R^n.$$

Définition 1.0.5 *Soit un domaine $D \subseteq R^n$ et une fonction $f : D \longrightarrow R$ de n variables. On cherche un point $x \in D$ qui minimise la valeur de $f(x)$ sur D. On écrit :*

$$\min_{x \in D} \quad f(x)$$

La fonction f est appelée la ***fonction objectif.***

Définition 1.0.6 *On appelle espace de Hilbert (ou Hilbertien) tout espace préhilertien complet. Donc espace de Hilbert et un espace vectoriel muni d'une norme, cet espace est complet pour la norme $N(x) = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ et on not :H.*

Définition 1.0.7 *Soit E un espace vectoriel sur R. Le produit scalaire sur E, est une forme bilineaire définie positive.*

$$\begin{array}{ccc} \Phi & : & E \times E \longrightarrow R^+ \\ (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) & \longrightarrow & \Phi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \end{array}$$

Autrement dit Φ est une application :

$$\begin{array}{ccc} \Phi & : & E \times E \longrightarrow R \qquad\qquad \textit{tel que :} \\ (u, v) & \longrightarrow & \Phi(u, v) \end{array}$$

1.$\Phi(u, v + w) = \Phi(u, v) + \Phi(u, w) \qquad \forall u, v, w \in E$

$\quad \Phi(u + w, v) = \Phi(u, v) + \Phi(w, v) \qquad \forall u, v, w \in E$

$\quad \Phi(\lambda u, v) = \lambda \Phi(u, v) \qquad \forall u, v, w \in E \ , \forall \lambda \in R$

$\quad \Phi(u, \lambda v) = \lambda \Phi(u, v) \qquad \forall u, v, w \in E \ , \forall \lambda \in R$

2.$\Phi(u, v) = \Phi(v, u) \ , \qquad \forall u, v \in E$

3.$\Phi(u, u) \geq 0 \ , \qquad \forall u \in E$

4.$\Phi(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0.$

Définition 1.0.8 *Une matrice $n \times n$ symétrique A est* ***définie positive*** *si*

$$\det([a_{11}]) \succ 0, \quad \det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\right) \succ 0,$$
$$\det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\right) \succ 0,....,\det(A) \succ 0.$$

Définition 1.0.9 (*La norme*)

Soit E un espace vectoriel sur un corps K ($K = R$ ou $K = C$)
une norme sur E est une application $N : E \longrightarrow R_+$ vérifiant les propriétés suivantes :

(1) $\forall x \in E \;\; N(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$
(2) $\forall x \in E, \forall \lambda \in K \quad N(\lambda x) = |\lambda| N(x).$
(3) $\forall x, y \in E \qquad N(x + y) \leq N(x) + N(y).$

Pour $x \in E$ $N(x)$ est appellé **norme sur** E et notée $\| x \|$.

Définition 1.0.10 (*La matrice semi définie positive*)

Si x^* est un minimum local de f, alors :
$\nabla f(x^*) = 0$ et $y^t \nabla^2 f\ (x^*) y \geq 0$, $\forall y \in R^n$. (i.e, la matrice hessienne $\nabla^2 f(x^*)$ est semi-définie positive).

Définition 1.0.11 (*Fonction linéaire*)

Soit $f : E \longrightarrow F$ une fonction, on dit que f est un fonction linéaire, verifiant les propriétés suivantes :

(1) $\forall \lambda \in K$, $f(\lambda x) = \lambda f(x).$
(2) $\forall\ x, y \in E,\;\; f(x + y) = f(x) + f(y).$

Définition 1.0.12 (*point critique*)

On dit que x^* est un point critique de f si :

$$\nabla f(x^*) = 0.$$

Un point critique peut être :
-un minimum local
-un maximum local
-un point de selle ($i.e., \forall\ \varepsilon \succ 0,$ il existe $a, b \in B_\varepsilon(x^*)$ tel que)

$$f(a) \prec f(x^*) \prec f(b).$$

Chapitre 2

Optimisation sans contrainte :

2.1 Définition des problèmes d'optimisation

L'objectif de ce chapitre est de recherche des minima ou des maxima, d'une fonction $f \in C\left(R^n, R\right)$ avec ou sans contrainte. Le problème d'optimisation sans contrainte s'écrit :

$$\left\{\begin{array}{c} \text{trouver } x^* \in R^n \quad \text{tel que :} \\ f\left(x^*\right) \leq f\left(x\right), \qquad \forall\, x \in R^n. \end{array}\right. \tag{1}$$

Le problème d'optimisation avec contrainte s'écrit :

$$\left\{\begin{array}{c} \text{trouver } x^* \in K \text{ tel que :} \\ f\left(x^*\right) \quad \leq f\left(x\right), \qquad \forall\, x \in K\ . \end{array}\right. \tag{2}$$

où $K \subset R^n$ et $K \neq R^n$.
Si x^* est solution du problème (1), on dit que $x^* \in \arg\min_{R^n} f$, et si $x\ ^*$est solution du problème(2), on dit que $x^* \in\ \arg\min_K f$.

2.2 Problème linéaire :

Définition 2.2.1 *Un problème de programmation linéaire consiste à minimiser* $($*ou à maximiser* $)$

une fonction linéaire sous contraintes linéaire .

2.2.1 Formes générales d'un programme linéaire :

Forme canonique :

Un problème d'optimisation sous la forme canonique se présente sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \min\langle c, x\rangle = c^t x \\ Ax \leq b \\ \text{où } x \in R^n,\ c \in R^n \\ b \in R^m \\ A \subset M_{m.n}(R) \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad \text{(p)}$$

maximiser $c^t x$ sous les contraintes $Ax \leq b$ et $x \geq 0$.

Conduit au même type de problème (en changeant c en $-c$)

Forme standard :

Par contre si le domaine des solutions realisables est défini par un systeme d'equations linéaire on dit que le programme est écrit sous forme standard :

$$\begin{cases} \min c^t x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad \text{(p)}$$

•On passe de la forme canonique (avec A, b, c) à la forme standard de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} \langle a_i, x\rangle \leq b_i \\ \text{dans } R^n \end{pmatrix} \quad \text{devient} \begin{pmatrix} \text{il existe } U_i \geq 0 \text{ tel que :} \\ \langle a_i, x\rangle + U_i = b_i \end{pmatrix}$$

d'ou

$$\begin{pmatrix} Ax \leq b \\ x \geq 0 \\ \text{dans } R^n \end{pmatrix} \quad \text{devient} \quad \begin{pmatrix} Ax + \operatorname{Im} u = b \\ x \geq 0,\ u \geq 0 \end{pmatrix}$$

•Le programme linéaire de (p) est tronsporte dans $R^n \times R^n$ apresent :

$$\begin{cases} \min c'^t x' \\ A'x' = b' \\ x' = (x, u) \in R^n \times R^n \\ x' \geq 0 \end{cases} \qquad (3)$$

avec : $A' = [A \setminus \operatorname{Im}] \in M_{m.n+m}(R)$.

$b' = b$ et $c' = (c, 0)$.

•Les problèmes d'optimisations (p) et (3) sont equivalents au sens où résoudre l'un permet de résoudre l'autre.

Ainsi tous les resultats sur les programmes linéaires sous la forme standard ont des contreparties sur les programmes linéaires formules sous une forme canonique et vice versa.

2.2.2 Dualité en progammation linéaire :

Dual d'un programme linéaire :

Considérons le programme linéaire sous forme standard :

$$\begin{cases} \min c^t x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \tag{p}$$

donc le dual par définition est $\max_{y \in R^m} \ d(y)$.

Pour obtenir le problème dual de programme linéaire on Considère la fonction lagrangine

$d(y) = \min_{x \geq 0} = \left\{ L(x, y) = c^t x + (b - Ax)^t y \right\}$

$L(x, y) = c^t x + (b - Ax)^t y = c^t x + (b^t - A^t x^t) y = (c - A^t y)^t x + b^t y$

donc $d(y) = \min_{x \geq 0} (c - A^t y)^t x + b^t y$

$\min_{x \geq 0} (c - A^t y)^t x + b^t y = \begin{cases} b^t y & \text{si } c - A^t y \geq 0 \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$

Finalemenent le dual de (p) est le programme linéaire suivant :

$$(D) \begin{cases} \max b^t y \\ A^t y \leq c \\ y \in R^m \end{cases}$$

On peut déterminer le dual de programme linéaire soit directement par la fonction de lagrange, ou bien par transformés à la forme standard puis utilisé le résultat précédent .

Exemple 2.2.2 *:Trouver le dual de programme linéaire canonique*

$$\begin{cases} \min c^t x \\ Ax \geq c \\ x \geq 0 \end{cases}$$

La forme standard équivalente est :

$$Ax \geq b \iff Ax - u = b \iff [A - I]\begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} = b, \qquad \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \geq 0$$

donc la forme standard est : $\begin{cases} \min\,(c^t \quad 0)\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \\ [A - I]\begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} = b \quad \text{est} \quad \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \geq 0 \end{cases}$

le dual de programme linéaire : $\begin{cases} \max b^t y \\ \begin{pmatrix} A^t \\ -I \end{pmatrix} y \leq c \\ y \geq 0 \end{cases}$

•On appelle dual de (p) le programme linéaire suivant :

$$\begin{cases} \max b^t y \\ A^t y \leq c \\ y \in R^m \end{cases} \tag{D}$$

$$(D) \iff \begin{cases} \max b^t y \\ A^t y + s = c \\ s \geq 0, \quad y \in R^m \end{cases}$$

• On dit que (y, s) est admissible pour le problème dual (D) si $A^t y + s = c$, et si $s \geq 0$.

Exemple 2.2.3 *Soit le programme linéaire suivant :*

$$\begin{cases} \min\,(x_1 + x_2) \\ x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

en introduisant la variable d'ecart $x_3 \geq 0$ dans la deuxieme containte on obtient la forme standard suivante :

$$\begin{cases} \min\,(x_1 + x_2 + 0 \times x_3) \\ x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

On a :
$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc :
$b^t y = (0 \ \ 1) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = y_2$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $c = (1 \ 1 \ 0)^t$
Alors :

$A^t y \leq c$

donc : $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \leq c \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \leq c$
donc le dual de programme s'ecrit par :

$$\begin{cases} \max y_2 \\ y_1 + y_2 \leq 1 \\ -y_1 + y_2 \leq 1 \\ y_2 \leq 0 \end{cases}$$

Théorème 2.2.4 (*Dualite faible*)

Si x et y sont réspectivement des solutions réalisables pour (p) et (D) alors :

$$c^t x \geq b^t y$$

Preuve. : Soit x solution réalisable alors :

$$Ax = b$$

(y, s) solution réalisable de $A^t y + s = c$ et $s = c - A^t y$
On a : $c^t x - b^t y = \langle c, x\rangle - \langle b, y\rangle$
$= c^t x - (Ax)^t y$
$= c^t x - x^t A^t y$
$= \langle c - A^t y, x\rangle$
$= \langle s, x\rangle$

donc : $c^t x - b^t y \ = s^t x \geq 0$

puisque $\ s \geq 0$ et $\ x \geq 0$ donc : $c^t x \geq b^t y$.

(y,s) solution réalisable de $A^t y + s = c$ et $\ s = c - A^t y$

On a : $c^t x - b^t y = \langle c, x\rangle - \langle b, y\rangle$

$$
\begin{aligned}
&= c^t x - (Ax)^t\, y = c^t x - x^t A^t y \\
&= \langle c - A^t y, x\rangle \\
&= \langle s, x\rangle \\
&= s^t x \geq 0
\end{aligned}
$$

puisque $\ s \geq 0$ et $\ x \geq 0$ donc : $c^t x \geq b^t y$. ■

Théorème 2.2.5 (*Théorèm de forte*)

Si x^* et y^*sont réspectivement des solutions réalisables pour (p) et (D) tel que : $c^t x^* = b^t y^*$

Alors : x^*et y^* sont des solutions optimales pour (p) et (D) (*réspectivements*)

Preuve. : On a : $c^t x^* - b^t y^* = 0$

$$
\begin{aligned}
& Ax^* = b \text{ et } A^t y^* + s = c \Longrightarrow s = c - A^t y^* \\
\Longleftrightarrow\ & c^t x^* - (A^t x^*)^t\, y^* = 0 \\
\Longleftrightarrow\ & \langle c^t - A^t y^*, x^*\rangle = 0 \\
\Longleftrightarrow\ & \langle s, x^*\rangle = 0 \\
\Longleftrightarrow\ & s^t x^* = 0 = \min c^t x \\
\Longleftrightarrow\ & x^* = 0
\end{aligned}
$$

donc : $s^t x = \langle c - A^t y, x\rangle = 0$

$$
\begin{aligned}
\Longleftrightarrow\ & \langle c, x\rangle - \langle A^t y, x\rangle = 0 \\
\Longleftrightarrow\ & c^t x - yAx = 0 \quad \text{tel que :} \qquad yb = b^t y \ \text{ et } Ax = b \\
\Longleftrightarrow\ & c^t x = b^t y
\end{aligned}
$$

$\Longrightarrow c^t x^* = b^t y^*$ ■

2.3 Optimisation sans contrainte

Définition

Soit $f \in C\,(E, R)$ et E un espace vectoriel normé. On cherche soit un minimum global de f, c.à.d :

$$x^* \in E \text{ tel que } f\,(x^*) \leq f\,(x)\,,\ \forall x \in E \tag{4}$$

ou un minimum local, c.à.d :

$$x^* \in E \ , \ \exists \alpha \succ 0 \text{ tel que } \ f(x^*) \leq f(x) \ \ \forall x \in B(x^*, \alpha) \tag{5}$$

2.4 Condition d'optimalité sans contrainte

Proposition 2.4.1 (*Condition necessaire d'optimalité*)

Soit E un espace vectoriel normé, et soient $f \in C\ (E, R)$, et $x^* \in E$ tel que f est différentiable en x^*.
Si x^* est solution de (8) alors :

$$\nabla f(x^*) = 0.$$

Preuve. Supposons qu'il existe $\alpha \succ 0$ tel que $f(x^*) \leq f(x)$ pour tout $y \in B\ (x^*, \alpha)$. soit $z \in E \setminus \{0\}$, alors si $|t| \prec \frac{\alpha}{\|z\|}$, on a $x^* + tz \in B(x^*, \alpha)$ (où $B(x^*, \alpha)$ designe la boule ouverte de centre x^* et de rayon α), et on a donc :

$$f(x^*) \leq f(x^* + tz)$$

comme f est différentiable en x^*, on a :

$$f(x^* + tz) = f(x^*) + \nabla f(x^*)(tz) + |t|\,\varepsilon_z(t)$$

où $\varepsilon_z(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$. On a donc $f(x^*) + t\nabla f(x^*)(z) + |t|\,\varepsilon_z(t) \geq f(x^*)$.
Et pour $0 \prec t \prec \frac{\alpha}{\|z\|}$, on a :

$$\nabla f(x^*)(z) + \varepsilon_z(t) \geq 0.$$

En faisant tendre t vers 0, on obtient :

$$\nabla f(x^*)(z) \geq 0, \forall z \in E \diagdown \{0\}.$$

On a aussi $\nabla f(x^*)(-z) \geq 0$, $\forall z \in E$, et donc : $-\nabla f(x^*)(z) \geq 0$, $\forall z \in E \diagdown \{0\}$.
On en conclut que :

$$\nabla f(x^*) = 0.$$

■

Exemple 2.4.2 *Soit l'application suivante :*

$f : R^2 \longrightarrow R$
$(x_1, x_2) \longrightarrow f(x_1, x_2) = 100\left(x_2 - x_1^2\right)^2 + (1 - x_1)^2$
On a :

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1} \\ \\ \frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 400x_1^3 - 400x_1x_2 + 2x_1 - 2 \\ 200x_2 - 200x_1^2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x_1, x_2) \quad = \quad 0 \Longrightarrow \begin{cases} 400x_1^3 - 400x_1x_2 + 2x_1^2 - 2 = 0 \text{....................} (*) \\ 200x_2 - 200x_1^2 = 0 \text{..............................} (**) \end{cases}$$

$(**) \Longrightarrow x_2 = x_1^2$.................. $(***)$
On remplace $(***)$ dans $(*)$
$400x_1^3 - 400x_1^3 + 2x_1 - 2 = 0$
$\Longrightarrow 2x_1 - 2 = 0$
$\Longrightarrow x_1 = 1$
$(***) \Longrightarrow x_2 = 1$
Donc $x^* = (1, 1)$.

Remarque 2.4.3 *Attention, la proposition précédente donne une condition nécessaire mais non suffisante. En effet,* $\nabla f(x^*) = 0$ *n'entraîne pas que* f *atteigne un minimum* (*ou un maximum*) *même local, en* x^**. prendre par exemple* $E = R$*,* $x^* = 0$ *et la fonction* f *définie par :* $f(x) = x^3$ *pour s'en convaincre.*

Proposition 2.4.4 (*Conditions suffisante d'optimalite*)

Soit une fonction $f : R^n \longrightarrow R$ deux fois différentiable dans un sous ensemble ouvert V de R^n et soit $x^* \in V$ qui vérifie les conditions :

$$\nabla f(x^*) = 0$$

et

$$\nabla^2 f(x^*) \text{ est définie positive}$$

i.e : $\forall x \in R^n \;\; \| x \| \neq 0 \quad x^t \nabla^2 f(x^*)\, x \succ 0$
Alors x^* est point minimum local strict de f.

Exemple 2.4.5 *Soit f une application $f : R \longrightarrow R$*

$$x \longrightarrow f(x) = 1 - \exp(-x^2)$$

$$\nabla f(x) = f'(x) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right)$$

$$\Longrightarrow \nabla f(x) = \left(2x \exp\left(-x^2\right)\right)$$

$$\nabla f(x) = 0 \Longrightarrow 2x \exp\left(-x^2\right) = 0$$

$$\Longrightarrow x = 0 \quad \text{et} \quad \exp\left(-x^2\right) \neq 0$$

alors $x^* = 0$.

$$\nabla^2 f(x) = \left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial^2 x}\right)$$

$$\nabla^2 f(x) = 2\exp\left(-x^2\right) - 4x^2 \exp\left(-x^2\right) = \exp\left(-x^2\right)\left(2 - 4x^2\right)$$

$$\nabla^2 f(0) = 2 \succ 0$$

alors x^*est point minimum local.

Exemple 2.4.6 *Soit f une application $f : R^2 \longrightarrow R$*

$$(x_1, x_2) \longrightarrow f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2 - 2x_1x_2 + x_1$$

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1} \\ \\ \frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 2x_2 + 1 \\ -2x_2 - 2x_2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x_1, x_2) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 1 = 0 \text{.........................} (*) \\ -2x_2 - 2x_2 = 0 \text{.............................} (**) \end{cases}$$

$(**) \Longrightarrow x_1 = -x_2$ ....$(***)$
On remplace $(***)$ dans $(*)$ donc :

$$2x_1 - 2x_1 + 1 = 0$$

$$\Longrightarrow x_1 = \frac{1}{4}$$

On a : $\quad x_1 = -x_2 \quad \Longrightarrow x_2 = -\frac{1}{4}$

Donc : $\quad x^* = \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$

$$\nabla^2 f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial^2 x_1} & \frac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \\ \frac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^{2f}(x_1,x_2)}{\partial^2 x_2} \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 f(x_{12}, x_2) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Donc $\quad \forall\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in R^2$ et $\parallel x \parallel \neq 0$.

$$\nabla^2 f\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Donc : $\ x^t\ \nabla^2 f\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right) x = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$= (2x_1 - 2x_2 \qquad - 2x_1 - 2x_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$= (2x_1^2 - 2x_2x_1 - 2x_1x_2 - 2x_2^2)$$

$$= 2x_1^2 - 4x_1x_2 - 2x_2^2.$$

On peut rien dire.

Alors $x^* = \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$ n'est pas un point minimum local.

Proposition 2.4.7 (*Conditions suffisants d'optimalite globale*)

Soit une fonction $f : R^n \longrightarrow R$ deux fois différentiable dans R^n, et soit $x^* \in R^n$ un minimum local de f.

Si f est une fonction convexe alors x^*est un minimum global de f .

Si de plus f est structement convexe et l' unique minimum global de f .

2.5 Resultats d' existance et d' unicite

Théorème 2.5.1 (*Existence*)

Soit $E = R^n$ et $f : E \longrightarrow R$ une application telle que

(i) f est continue,

(ii) $f(x) \longrightarrow +\infty$ quand $\| x \| \longrightarrow +\infty$.

Alors il existe $x^* \in R^n$ tel que $f(x^*) \leq f(x)$ pour tout $x \in R^n$.

Théorème 2.5.2 (*Unicité*)

Soit E un espace vectoriel normé est $f : E \longrightarrow R$, strictement convexe alors il existe au plus un $x^* \in E$ tel que $f(x^*) \leq f(x)$, $\forall x \in E$.

Preuve. Soit f strictement convexe, supposont qu'il existe x^*et $x^{**} \in E$
tel que $f(x^*) = f(x^{**}) = \inf_{R^n} f$.

Comme f est strictement convexe si $x^* \neq x^{**}$ alors :

$$f\left(\tfrac{1}{2}x^* + \tfrac{1}{2}x^{**}\right) \prec \tfrac{1}{2}f(x^*) + \tfrac{1}{2}f(x^{**}) = \inf_{R^n} f \ \left(\text{pour } t = \tfrac{1}{2} \in]0,1[\right)$$
$$= f\left(\tfrac{1}{2}x^* + \tfrac{1}{2}x^{**}\right) \prec f(x^*) = \min_{x \in R^n} f(x)$$

$\Longrightarrow f\left(\frac{1}{2}x^* + \frac{1}{2}x^{**}\right) \prec \min_{x \in R^n} f(x)$ (contradiction).

Ce qui impossible car $\left(f\left(\frac{1}{2}x^* + \frac{1}{2}x^{**}\right) \succ \min_{x \in R^n} f(x)\right)$.

donc $x^* = x^{**}$. ■

Remarque 2.5.3 *:*

1.Ce théorème ne donne pas l'existence. par exemeple dans le cas $N = 1$ la fonction f définie par $f(x) = \exp(x)$. n'atteint pas son minimum, car $\inf_{R^n} f = 0$ et $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in R$, pourtant f est strictement convexe.

2.Par contre, si on réunit les hypothèses des théoréme (1.5.1) et (1.5.2), on obtient le résultat d'existense et unicité suivant :

Théorème 2.5.4 (*Existence et Unicité*) *Soit* $E = R^n$ *et soit* $f : E \longrightarrow R$*.On suppose que :*

(i) f continue

(ii) $f(x) \longrightarrow +\infty$

(iii) f et strictement convexe;

Alors il existe un unique $x^* \in R^n$ tel que $f(x^*) = \min_{R^n} f$.

Remarque 2.5.5 *:*

Ce théoréme rèste vrai si E est un espace de Hilbert, on a besoin dans ce cas pour la partie existence des hypothèses (i), (ii) et de la convexeté de f.

Chapitre 3

Optimisation avec contraintes

Définition 3.0.6 *Soit $E = R^n$, soit $f \in C(E, R)$, et soit K un sous ensemble de E . on s'intéresse à la recherche de $x^* \in K$ tel que :*

$$\begin{cases} x^* \in K \\ f(x^*) = \min_K f \end{cases} \tag{6}$$

Ce problème est un problème de minimisation avec contrainte (ou"sous contrainte") au sens où l'on cherche de qui minimise f en astreignant x a être dans K. voyons quelques exemples de ces contrainte (définie par l'ensemble K), qu'on va expliciter à l'aide des p fonctions continues, $g_i \in C(E, R)$ $i = 1, .., p$.

3.0.1 Contraintes égalités :

On pose $K = \{x \in E,\ g_i(x) = 0 \quad i = 1, .., p\}$. On verra plus loin que le problème de minimisation de f peut alors être résolu grâce au théorème des multiplicateurs de lagrange. (**vior la page 20**)

3.0.2 Contraintes inégalités :

On pose $K = \{x \in E, g_i(x) \leq 0 \quad i = 1, .., p\}$. On verra plus loin que le problème de minimisation de f peut alors être résolu grace au théorème de Kuhn-Tucker.(**vior la page 21**)

-**Programmation linéaire** : avec un tel ensemble de contraintes K, si de plus f est linéaire, c'est -â-dire qu'il existe $b_i \in R^n$ tel que $f(x) = b.x$ et les fonctions g_i sont affines, c'est-â-dire qu'il existe $b_i \in R^n$ et $c_i \in R$ tels que : $g_i(x) = b_i.x + c_i$.

3.1 Resultats d'existence et d'unicité

Théorème 3.1.1 (*Existence*) *Soit $E = R^n$ et $f \in C(E, R)$.*

1.Si K est un sous -ensemble fermé borné de E, alors il existe $x^* \in K$ tel que :

$$f(x^*) = \inf_K f.$$

2.Si K est un sous -ensemble fermé de E, et si f est croissante à l'infini, c'est-à-dire que $f(x) \longrightarrow +\infty$ quand $|x| \longrightarrow +\infty$, alors $\exists\ x^* \in K$ tel que :

$$f(x^*) = \inf_K f.$$

Théorème 3.1.2 (*Unicité*) *Soit $E = R^n$ et $f \in C(E, R)$. On suppose que f est strictemenent convexe et que K est convexe. Alors il existe au plus un élément x^* de K tel que :*

$$f(x^*) = \inf_K f.$$

Preuve. Supposons que x^* et x^{**} soient deux solutions du problème (10), avec $x^* \neq x^{**}$

Alors :

$$f\left(\tfrac{1}{2}x^* + \tfrac{1}{2}x^{**}\right) \prec \tfrac{1}{2}f(x^*) + \tfrac{1}{2}f(x^{**}) = \inf_{R^n} f \ \left(\text{pour } t = \tfrac{1}{2} \in \left]0,1\right[\right)$$
$$= f\left(\tfrac{1}{2}x^* + \tfrac{1}{2}x^{**}\right) \prec f(x^*) = \min_{x \in R^n} f(x)$$
$$\Longrightarrow f\left(\tfrac{1}{2}x^* + \tfrac{1}{2}x^{**}\right) \prec \ \min_{x \in R^n} f(x) \quad \text{(contradiction)}$$

Ce qui est impossible car $\left(f\left(\frac{1}{2}x^* + \frac{1}{2}x^{**}\right) \succ \min_{x \in R^n} f(x)\right)$.

Donc $x^* = x^{**}$. ■

•Des théorèmes d'existence et d'unicuté, on déduit immédiatement le théorème d'existence et d'uncité suivant :

Théorème 3.1.3 (*Existence et Unicité*) *Soient $E = R^n$, $f \in C(E, R^n)$ une fonction stictement convexe et K un sous ensemble convexe fermé de E.*

•Si K est borné ou si f est croissante à l'infini, c'est-à-dire si $f(x) \longrightarrow +\infty$ quand $\| x \| \longrightarrow +\infty$, alors il existe un unique élément x^* de K solution du problème de minimisation (6), i.e. tel que :

$$f(x^*) = \inf_K f.$$

•On peut remplacer $E = R^n$ par E espace de Hilbert de dimension infinie dans le dernier théorème, mais on a besoin dans ce cas de l'hypothèse de convexité de f pour assurer l'existence de la solution.

3.2 Condition d'optimalité avec contraintes :

3.2.1 Condition d'optimalité simple :

Proposition 3.2.1 *: Soient $E = R^n$, $f \in C(E, R^n)$ et $x^* \in K$ tel que $f(x^*) = \inf_K f$. On suppose que f est différentiable en x^*.*

1.Si $x^* \in K^\circ$ alors $\nabla f(x^*) = 0$
2.Si K est convexe, alors $\nabla f(x^*) . (x - x^*) \geq 0$ pour tout $x \in K$.

Preuve. 1.Si $x^* \in K^\circ$, alors il existe $\varepsilon \succ 0$ tel que $B(x^*, \varepsilon) \subset K$ et $f(x^*) \leq f(x)$ $\forall x \in B(x^*, \varepsilon)$.

Alors on a déjà vu, que ceci implique $\nabla f(x^*) = 0$

2.Soit $x \in K$. Comme x^* réalise le minimum de f sur K, on a :

$f(x^* + t(x - x^*)) = f(tx + (1-t)x^*) \geq f(x^*)$ pour tout $t \in]0, 1]$, par convexité de K.

On en déduit que :

$$\frac{f(x^* + t(x - x^*)) - f(x^*)}{t} \geq 0 \qquad \text{pour tout } t \in]0, 1]$$

En passant à la limite lorsque t tend vers 0 dans cette dernière inégalité, on obtient : $\nabla f(x^*) . (x - x^*) \geq 0$. ■

3.2.2 Condition d'optimalité égalités :

Dans tout ce paragraphe, on considèrera les hypothèses et notations suivantes :

$f \in C(R^n, R)$, $g_i \in C^1(R^n, R)$, $\quad i = 1, .., p$;
$K = \{x \in R^n,\ g_i(x) = 0 \quad \forall\ i = 1, .., p\}$; .... (7)
$g = (g_1 .... g_p)^t \in C^1(R^n, R^p)$.

Théorème 3.2.2 (*Multiplicateurs de Lagrange*)

Soit $x^* \in K$ tel que $f(x^*) = \inf_K f$.

On suppose que f est différentaible en x^* et $\dim(\inf(\nabla g(x^*))) = p$ (ou rang $(\nabla g(x^*)) = p)$, alors il existe $(\lambda_{1,} .... \lambda_p)^t \in R^P$ tel que :

$$\nabla f\left(x^*\right)+\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\nabla g_i\left(x^*\right)=0$$

(cette derniére égalité a lieu dans R^n).

3.2.3 Condition d'optimalité inégalités :

Soit $f \in C\left(R^n,R\right)$ et $g_i \in C^1\left(R^n,R\right)$ $i=1,....,p$, on considère maintenant un ensemble K de la forme : $K=\{x\in R^n,\ g_i\left(x\right)\leq 0\ \ \forall i=1,..,p\}$, et on cherche à résoudre le problème de minimisation (6) qui sécrit :

$$\begin{cases} x^*\in K \\ f\left(x^*\right)\leq f\left(x\right)\ ,\ \ \forall x\in K. \end{cases}$$

Remarque 3.2.3 *Soit x^* une solution de (6) et supposons que $g_i\left(x^*\right)\leq 0$, pour tout $i\in\{1,...,p\}$. il existe alors $\varepsilon\succ 0$ tel que si $x\in B\left(x^*,\varepsilon\right)$ alors : $g_i\prec 0$ pour tout $i=1,....,p$. On a donc $f\left(x^*\right)\leq f\left(x\right)$ $\forall x\in B\left(x^*,\varepsilon\right)$. On est alors ramené à un problème de minimisation sans contraintes, et si f est différentiable en x^*, on a donc : $\nabla f\left(x^*\right)=0$.*

Théorème 3.2.4 (*Kuhn - Tucker*)

Soit $f\in C\left(R^n.R\right)$, soit $g_i\in C^1\left(R^n.R\right)$, pour $i=1,...,p$, et soit $K=\{x\in R^n,\ g_i\left(x\right)\leq 0\ \forall i=1,...$

On suppose qu'il exist x^* solution de (6), et on pose $I\left(x^*\right)=\{i\in\{1,...,p\};\left|g_i\left(x^*\right)\right|=0\}$.

et On suppose que f est différentiable en x^* et que la famille (de R^n) $\{\nabla g_i\left(x^*\right),\ i\in I\left(x^*\right)\}$ est libre.

alors il existe une famille $\left(\lambda_i\right)_{i\in I\left(x^*\right)}\subset R_+$ telle que

$$\nabla f\left(x^*\right)+\sum_{i\in I\left(x^*\right)}\lambda_i\nabla g_i\left(x^*\right)=0.$$

Remarque 3.2.5 *1.Le théorème de Kuhn -Tucker s'applique pour des ensembles de contraintes de type inégalité. Si on a une contrainte de type égalité, on peut évidemment se ramener à deux contraintes de type inégalité en remarquant que $\{h\left(x\right)=0\}=\{h\left(x\right)\leq\}\cap\{-h\left(x\right)\leq 0\}$. $\{\nabla g_1\left(x^*\right),\nabla g_2\left(x^*\right)\}=\{\nabla h\left(x^*\right),\ \nabla h\left(x^*\right)\}$ n'est pas libre. On ne peut donc pas appliquer le théorème de Kuhn -Tucker sous la forme donnée précédemment dans ce cas .*

2.Dans la pratique, on a intérêt à écrire la conclusion du théoréme de Kuhn -Tucker $\left(\text{i.e.l'exstence de. la famille} \left(\lambda_i\right)_{i\in I(x^*)}\right)$ sous la forme du système de $N+p$ équations et $2p$ inéquations à résoudre suivant :

$$\begin{cases} \nabla f\left(x^*\right)+\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\nabla g_i\left(x^*\right)=0 \\ \lambda_i g_i\left(x^*\right)=0\ \forall i=1,...,p, \\ g_i\left(x^*\right)\leq 0\ \ \forall i=1,...,p, \\ \lambda_i\geq 0\ \forall i=1,...,p, \end{cases}$$

$\lambda_i \geq 0,\ g_i\left(x^*\right)\leq 0, \qquad\qquad i=1,...,p.$

Chapitre 4

Méthode de points intérieurs

4.1 La méthode "Affine scaling" :

On omettra le symbole qui represente la transposition d'une matrice sauf si cela peut prèter à confusion et alors on note A^t la transposé de A. Les vecteurs sont donc considérés comme des matrices lingne ou/colonne suivant les cas.

Soit PL le programme linéaire suivant :

$$\text{sujet à} \begin{cases} \text{minimiser } \ c^t x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \tag{PL}$$

et son dual :

$$\text{sujet à} \begin{cases} \text{maximiser } t.b \\ t.A \leq c \end{cases}$$

où A est une matrice $m \times n$.

$P = \{x : Ax = b, x \geq 0\}$ est l'ensemble des solutions réalisables et $\{x \in P : x \succ 0\}$ est l'interieur de P, ses éléments sont des points intérieurs.

IDEE CENTRALE : minimiser cx pour $x \in P$ peut être difficile, par contre il est TRES FACILE de minimise cx pour x appartentant à une ellipsoïde et de puls la solution possède une forme analytique. Donc au lieu de résoudre directement sur P on va résoudre une suite de problèmes d'optimisation sur des ellipsoïdes.

-On commence en un point $x^0 \succ 0$ à l'intérieur de P. On forme une ellipsoïde S_0 centrée en x^0 et contenue dans l'intérieur de P.

-On optimise cx pour $x \in S_0$ ce qui donne un autre point intérieur x^1.

-On construit une autre ellipsoïdes centrée en x^1...

Ici x^1 minimise cx pour x dans l'ellipsoïde centrée en x^0, x^2 minimise cx pour x dans l'ellipsoïde centrée en x^1...

Lemme 4.1.1 *Soit $\beta \in (0,1)$ et $y \in R^n$ tel que $y \succ 0$ et soit :*

$$S = \left\{ x \in R^n : \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - y_i)^2}{y_i^2} \leq \beta^2 \right\}$$

Alors $x \succ 0$ pour tout $x \in S$.

Preuve. Soit $x \in S$

pour i on a :$\frac{(x_i-y_i)^2}{y_i^2} \leq \beta^2$

donc : $(x_i - y_i)^2 \leq y_i^2\beta^2$, puisque $y \succ 0$

alors : $|x_i - y_i| \prec y_i$, puisque $0 \prec \beta \prec 1$

On a : $|x_i - y_i| = \begin{cases} x_i - y_i & \text{si} \quad x_i - y_i \succ 0 \Longrightarrow x_i \succ 0 \\ -x_i + y_i & \text{si} \quad x_i - y_i \leq 0 \end{cases}$

$-x_i + y_i \prec y_i \quad \Longrightarrow -x_i \prec 0$ donc $\quad x_i \succ 0 \quad \forall i$

alors $\quad x \succ 0.$ ■

- Fixons $y \in R^n$ tel que $y \succ 0$ et $Ay = b$. Soit $Y =$diag$(y_1, ..., y_n)$ la matrice diagonale dont les termes de la diagonale sont $y_1, ..., y_n$. Y est inversible puisque les termes de la diagonales sont strictement positifs.

Alors la relation $x \in S$ peut s'écrire : $\parallel Y^{-1}(x-y) \parallel \leq \beta$, où $\parallel . \parallel$ représente la norme euclidienne.

L'ensemble S est une ellipsoïde centrée en y.

- L'ensemble $S_0 = S \cap \{x : Ax = b\}$ est une section de l'ellipsoïde S et est lui même une ellipsoïde **contenue** dans le domaine des solutions réalisables.

On va minimiser sur S_0 :

$$\begin{cases} \min c^t x \\ Ax = b \\ \parallel Y^{-1}(x-y) \parallel \leq \beta \end{cases}$$

- Posons $d = x - y$. On a $Ay = b$ et pour tout $x \in S_0$ on a aussi $Ax = b$, donc $Ad = 0$. Si on optimise sur d au lieu de x on a :

$$\begin{cases} \min dx \\ Ad = 0 \\ \parallel Y^{-1}d \parallel \leq \beta \end{cases} \tag{8}$$

Lemme 4.1.2 *Supposons que les lignes de A sont linéairement indépendentes et que c n'est pas une combinaison linéaire des lignes de A. Soit y un vecteur strictement positif, alors une solution optimale du problème* (8) *est donnée par :*

$$d^* = -\beta \frac{Y^2 (c - A^t p)}{\| Y (c - A^t p) \|}$$

où

$$t = \left(AY^2 A^t\right)^{-1} AY^2 c$$

De plus le vecteur $x = y + d^* \in P$ et : $cx = cy - \beta \| Y (c - A^t p) \| \prec cy$.

• **Interprétation de la formule de t :** Supposons que y soit une solution de base non dègénérée, (ce qui n'est jamais le cas). Supposons que les m premières variables sont de base, alors $A = [B\ N]$.

Si Y =diag $(y_1, ..., y_m, 0, ..., 0)$ et Y_0 =diag$(y_1, ..., y_m)$ alors $AY = [BY_0 0]$

$$\begin{aligned} t &= (AY \quad A^t)^{-1} \quad AY^2 c \\ &= (B^t)^{-1} Y_0^{-2} \ B^{-1} \ BY_0^2 c_B \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9) \\ &= (B^t)^{-1} c_B \end{aligned}$$

et donc t correspond à la solution duale de base correspondante. c'est pourquoi on applelle t les *estimations du dual. De plus* $r = c - A^t t$ devient $r = c - A^t (B^t)^{-1} c_B$ qui est le vecteur des coûts réduits du simplexe.

Supposons r non négatif, alors t est dual réalisable et $r^t y = (c - A^t t)\, y = c^t y - t^t Ay = c^t y - t^t b$.

La différence $s = c^t y - t^t b$ des valeurs des fonctions économiques du primal et du dual, appelé **saut dualité**.

Lemme 4.1.3 *Soient y et t des solutions réspectivement primale et duale réalisables telles que $cy - bt \prec e$*

Soient y^* et t^* les solutions réspectivement primale et duale optimales, alors :

$$cy^* \leq cy \prec cy^* + e$$

$$bt^* - e \prec bt \leq bt^*$$

Preuve. On a y^* la solution optimale du problème primale et y la solution realisable donc :

$$cy^* \leq cy.$$

par dualité : $bt \leq cy^*$.

et on a : $cy - bt \prec e, \;\; e = (1, 1, ..., 1)$

donc : $cy \prec bt + e \prec cy^* + e$.

De même on abtient : $bt^* = cy^* \leq cy \prec bt + e$

donc : $bt^* - e \prec bt \leq bt^*$. ■

Remarque 4.1.4 *Si $d^* \geq 0$, le domaine des solutions du problème initial est non borné puisque $x + \alpha d^* \succ 0$ pour tout $\alpha \succ 0$ et $Ad^* = 0$. puisque $cd \prec 0$ il en découle que le problème initial n'a pas de solution optimale finie. Ceci suggère un critère d'arrêt. On s'arrête quand $r = c - A^t t \geq 0$ (solution duale réalisable) et $r^t y = y^t r = e^t Y r$ est petit, où $e = (1, 1, ..., 1)$.*

Algorithme de La méthode "Affine scaling" :

(a) Les données :(A,b,c) ;

(b) Une solution réalisable de départ $x^0 \succ 0$;

(c) Une tolérance $e \succ 0$;

(d) Le paramètre $\beta \in (0, 1)$.

1.(initialisation) :

On démarre avec une solution réalisable $x^0 \succ 0$, $k = 0$;

2.(calcul des valeurs approchées du dual et des coût réduits) :

Soit $x^k \succ 0$ réalisable :

$$\begin{aligned} X_k &= \operatorname{diag}\left(x_1^k, ..., x_n^k\right) \\ t^k &= \left(AX_k^2 A^t\right)^{-1} AX_k^2 c \\ r^k &= c - A^t t^k \end{aligned}$$

3.(test d'optimalité) :

Soit $e = (1, ..., 1)$. Si $r^k \geq 0$ et $e^t X_k r^k \prec e$, STOP, x^k et t^k sont d'optimales du primal et du dual resp.

4.(test de non "finitude") :

Si $-X_k^2 r^k \geq 0$, STOP solution optimale non finie.

5.(mise à jour de la solution primale) :

Poser :

$$x^{k+1} = x^k - \beta \frac{X_k^2 r^k}{\| X_k r^k \|}$$

4.2 Variantes de l'algorithme :

celles-ci diffèrent dans le choix de la longueur du pas. Etant donné un vecteur u on définit :

• $\| u \|_\infty = \max_i |u_i|$

•$\gamma(u) = \max\{u_i : u_i \succ 0\}$

Il est facile de vérifier que :

$$\gamma(u) \leq \| u \| \leq \| u \|$$

La version de l'algorithme que nous avons présenté est dite à pas courts.

Dans les versions à pas long la mise à jour de la solution primale est remplacée par :

$$x^{k+1} = x^k - \beta \frac{X_k^2 r^k}{\| X_k r^k \|_\infty}$$

oŭ

$$x^{k+1} = x^k - \beta \frac{X_k^2 r^k}{\gamma(X_k r^k)}$$

Cette dernière est la plus utilisée car elle donne le pas le plus long et donc la décroissance la plus forte de la fonction économique. Donc tous les cas on peut montrer que $x^{k+1} \succ 0$ est réalisable.

A ce point on peut se poser plusieurs **QUESTIONS**

(a) L'algorithme se termine-t-il ?

(b) Comment démarre-t-on ?

(c) Comment l'algorithme se comporte-t-il en pratique ?

Il existe des théorèmes de convergence sur lesquels nous ne nous attarderons pas.

Pour **démarrer** on peut, par exemple, créer une nouvelle variable x_{n+1} et une nouvelle colonne $A_{n+1} = b - Ae$ où $e = (1, ..., 1)$, et considérer le problème :

$$\begin{cases} \min cx + Mx_{n+1} \\ Ax + (b - Ae)\, x_{n+1} = b \\ (x, x_{n+1}) \geq 0 \end{cases}$$

où M est un grand nombre positif. Or $(e, 1)$ est une solution réalisable de ce problème, et si M est assez grand, dans la solution optimale on a $x_{n+1} = 0$ et donc cette solution optimale peut servir pour demarrer l'algorithme..

4.2.1 Exemple numérique 01 :

$$\begin{cases} \max x_1 + 2x_2 \\ x_1 + x_2 \leq 2 \\ -x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \tag{10}$$

Après additon de variables d'écart et transformation en un problème de minimisation :

$$\begin{cases} \min -x_1 - 2x_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

x_1	-100	-144	-198	-262	0.364	0.530	0.546	0.499
x_2	-100	-188	-359	-667	1.068	1.339	1.439	1.491

Résultats d'itérations consécutives de la version "pas courts" avec $\beta = 0.995$. La solution optimale est $x_1^* = \frac{1}{2}$ et $x_2^* = \frac{3}{2}$.

Conclusion Générale

Un problème d'optimisation peut prendre un grand nombre de formes équivalentes ou proches :

Nous avons introduit un méthode pour résoudre un problème d'optimisation**. "affine scaline "**

Ce mémoire a pour but la résolution de deux problème d'optimisation sons contrainte et avec contrainte.

Bibliographie

[1] Jean-Baptiste Hiriart-Urruty"OPTIMISATION ET ANALYSE CONVEXE" mars France 2009

[2] Cour d'optimisation 3^{eme} année.(2013／2014)

[3] A. Keraghel, Analyse convexe : Théorie fondamentale et exercices, Editions Dar El'houda Ain Mlila , Algérie, (2001).

[4] A. Keraghel, Programmtion mathématique différentiable, Université Ferhat Abbas, Sétif Algérie.

[5] M. Minoux, Programmation mathématique : Théorie et algorithmes, T1 et T2, Dunod, 1983.