الجمهوريـة الجزائـريـة الديمقراطيـة الشعبيـة
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليـم العالـي والبحـث العلمـي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

N° Réf :……………

Centre Universitaire de Mila

Institut des Sciences et de la Technologie

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de licence

En : - Filière : Mathématiques Fondamentales

Thème

Dual d'un espace vectoriel et formes linéaires

Préparé par :
Benhammada Abdelhakim
Zouaghi Asma
Chelghoum Atika
Brichen Hassina

Encadré par : Kecies Mohamed

Année universitaire : 2013/2014

Remerciement

Chaque fois qu'on achève une étape importante dans notre vie, on fait une pose pour regarder en arrière et se rappeler toutes ces personnes qui ont partagé avec nous tous les bons moments de notre existence, mais surtout les mauvais.

Avant tout, nous remercions le bon dieu tout puissant qui nous avons donné la force et de nous avoir permis d'arriver à ce stade-là.

*Notre première pensée va tout naturellement à notre encadreur **Mr Mohamed Kecies** qui suit fidèlement nos travails, nous tenons la remercie pour son encadrement, pour la confiance qu'il nous a témoigné en nos confiant ce travail et pour nous avoir donné les moyens d'arriver au tout de ce mémoire*

Nous voudrais sons remercier tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce mémoire.

*Ensuite, nous tenons à remercier **tous les enseignants** de centre université de Mila en générale **et l'équipe enseignantes de l'institut des sciences et de technologie** en particulier pour la richesse des enseignements de ces années de la Licence.*

Nous dédions cet humble travail :

Nos très chers parents dont le courage et l'abnégation constitueront toujours pour nous un exemple à suivre.

*Les familles**'' Benhammada '', '' Zouaghi'', '' Chelghoum''** et **'' Brichen''.***

*Enfin, nous adressons notre plus sincères remerciements à **tous notre proches et amis et tous le groupe de la licence** qui nous ont toujours soutenue et encouragée au cours de la réalisation de ce mémoire.*

Table des matières

Introduction Générale

L'espace dual d'un espace vectoriel est l'ensemble de toutes les formes linéaires définies sur cet espace (c'est à dire l'ensemble de toutes les applications linéaires définies de cet espace dans son corps de base). La dualité est un instrument technique intervenant souvent en mathématiques. Donnons quelques exemples.

– L'application qui à un vecteur associe son $ième$ coordonnée dans une base donnée d'un espace vectoriel est une forme linéaire.

– La dualité sert à définir la topologie de la convergence simple sur certains espaces fonctionnels. Ces espaces interviennent entre autre quand on étudie les distributions.

– En calcul différentiel, les différentielles de fonctions définies d'un espace vectoriel dans $\mathbb{R}$ sont des formes linéaires et donc des éléments du dual de l'espace vectoriel considéré.

– En géométrie, les formes linéaires servent à donner des équations pour des hyperplans.

En algèbre linéaire, les formes linéaires désignent un type particulier d'applications linéaires. Elles jouent un rôle primordial en mathématiques, et en analyse, par exemple dans la théorie des distributions, ou dans la théorie des espaces de Hilbert.

Ce mémoire est réparti sur l'introduction générale et trois chapitres. Dans le premier chapitre, on va donner les différentes notions de bases qui s'avèrent indispensable pour le reste de ce travail, en particulier les notions de formes linéaires, espace dual et bidual, bases duales et antéduales.

Nous étudierons dans le deuxième chapitre les hyperplans qui sont considérés comme des sous-espaces vectoriels particuliers. On va donner leurs caractérisation, le lien entre eux et les formes linéaires, puis l'équation cartésienne d'un hyperplan.

Enfin, dans le troisième chapitre, on donnera une étude générale de l'orthogonalité et la transposition dans l'espace dual. La notion d'application transposée relève de l'algèbre linéaire. À toute application linéaire u entre deux espaces vectoriels E et F est associée l'application transposée ${}^{t}u$ de l'espace dual F^{*} de F dans l'espace dual de E. Nous ferons le lien entre application transposée et transposée d'une matrice.

Chapitre 1

Dualité et espace dual

1.1 Espace dual

1.1.1 Formes linéaires

Définition 1.1.1 *Soit E un espace vectoriel sur K.*
1) *On appelle forme linéaire sur E toute application linéaire de E dans K.*
2) *L'ensemble des formes linéaires sur E s'appelle le dual de E, on le note $E^* = L(E, K)$.*

1.1.2 Exemples de formes linéaires

Exemple 1.1.2 *(Exemples préliminaires)*
1) *L'application de E dans K, qui à tout vecteur $x \in E$ associe le scalaire $0 \in K$ est une forme linéaire, appelée forme nulle sur E.*
2) *Si $E = C([a, b], \mathbb{R})$, le $\mathbb{R}-$espace vectoriel des applications continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, alors l'application*

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \longmapsto & \varphi(f) = \displaystyle\int_a^b f(t)dt \end{array}$$

est une forme linéaire sur E.
3) *Si E est l'espace vectoriel des suites de réels convergentes, alors l'application*

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & u = (u_n) & \longmapsto & \varphi(u) = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n \end{array}$$

est une forme linéaire sur E.
4) *Si $E = K[X]$, pour tout $a \in K$, l'application $P \longmapsto P(a)$ est une forme linéaire sur*

E.
5) *Si $E = M_n(K)$, alors l'application trace*

$$\begin{array}{rlcl} \varphi: & E & \longrightarrow & K \\ & A=(a_{ij}) & \longmapsto & \varphi(A)=Tr(A)=\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii} \end{array}$$

est une forme linéaire sur E.
6) *Si $a_1, a_2, ..., a_n \in K$, alors l'application*

$$\begin{array}{rlcl} \varphi: & K^n & \longrightarrow & K \\ & x=(x_1,x_2,...,x_n) & \longmapsto & \varphi(x)=a_1x_1+...+a_nx_n \end{array}$$

est une forme linéaire sur K^n.

Proposition 1.1.3 *L'ensemble E^* des formes linéaires définies sur le K-espace vectoriel E possède une structure d'espace vectoriel sur K pour la loi interne $+$ donnée par l'addition des applications de E dans K*

$$\forall f, g \in E^*, \forall x \in E : (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

et la loi externe. donnée par la multiplication d'une application par un scalaire λ de K

$$\forall f \in E^*, \forall x \in E : (\lambda.f)(x) = \lambda.f(x)$$

E^* est appelé espace vectoriel dual de l'espace vectoriel E. De plus si E est de dimension finie, alors E^* l'est aussi et on a $\dim E = \dim E^*$. Par conséquence, E et E^* sont isomorphes.

Preuve. Rappelons que l'ensemble des applications linéaires $L(E, F)$ définies entre deux espaces vectoriels E et F possède une structure d'espace vectoriel pour les lois précédemment mentionnées. E^* est en fait égal à $L(E, K)$, qui possède bien une structure d'espace vectoriel.
D'autre part, on a

$$\dim(E^*) = \dim(L(E,K)) = \dim(E).\dim(K) = \dim(E), \dim(K) = 1$$

■

Définition 1.1.4 *(Crochet de dualité)*
Soient E un Kev et E^*son dual. Pour tout x dans E et toute φ dans E^*, on appelle crochet

de dualité de x et φ l'écriture

$$\varphi(x) =< \varphi, x >$$

$< ., . >$ *le crochet de dualité.*

Proposition 1.1.5 *Toute forme linéaire non nulle φ sur E est surjective, donc de rang 1.*

Preuve. Dire que $\varphi \neq 0$ signifie qu'il existe un vecteur $x_0 \in E$ tel que $\lambda = \varphi(x_0) \neq 0$. Pour tout scalaire y, on peut alors écrire

$$y = \frac{y}{\lambda}.\lambda = \frac{y}{\lambda}\varphi(x_0)$$

Soit $y = \varphi(x)$ avec $x = \frac{y}{\lambda}x_0 \in E$, ce qui signifie que φ est surjective.
On peut aussi dire que $\mathrm{Im}(\varphi)$est un sous-espace vectoriel de K non réduit à $\{0_K\}$, il est donc de dimension 1 et égal à K, ce qui revient à dire que $rg(\varphi) = 1$. ∎

1.2 Dualité

1.2.1 Bases duales et antéduales

Définition 1.2.1 *Si E est un $K-$espace vectoriel de dimension finie n, si $B = (e_1, ..., e_n)$ est une base de E et $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ la décomposition de x suivant B, alors les applications*

$$\begin{array}{rccc} \varphi_i : & E & \longrightarrow & K \\ & x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i & \longmapsto & \varphi_i(x) = x_i \end{array}$$

qui au vecteur x associent sa composante suivant e_i relativement à B, sont des formes linéaires sur E, on les appelle les formes linéaires coordonnées notées e_i^* (Ces formes linéaires sont aussi appelées les projections des coordonnées).

Définition 1.2.2 *Soient $i, j \in \mathbb{N}$. On définit le symbole de Kronecker δ_{ij} par*

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & si\ i = j \\ 0, & si\ i \neq j \end{cases}$$

Proposition 1.2.3 ***(Définition)***
Soient E un K-espace vectoriel de dimension n et $B = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base quelconque

de E. Pour chaque $i \in \{1,2,...,n\}$, on définit les n formes linéaires $e_i^* \in E^*$, par

$$\forall j \in \{1,2,...,n\} : e_i^*(e_j) =< e_i^*, e_j >= \delta_{ij} \quad (\delta_{ij} \text{ symbole de Kronecker})$$

Alors $B^* = (e_1^*, e_2^*, ..., e_n^*)$ est une base de E^*, appelée base duale de E.
(e_i^*) sont appelés formes linéaire coordonnées.

Preuve. Puisque $\dim(E^*) = n$, alors il suffit de montrer que $(e_1^*, e_2^*, ..., e_n^*)$ est libre. Pour cela, soient $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in K$, tel que

$$\alpha_1 e_1^* + \alpha_2 e_2^* + ... + \alpha_n e_n^* = 0_{E^*}$$

On sait que deux applications linéaires sont égales si et seulement si elles coïncident sur une base. Alors

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i^* &= 0_{E^*} \Longrightarrow \forall j \in \{1,2,...,n\} : \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i^*\right)(e_j) = 0_K \\
&\Longrightarrow \forall j \in \{1,2,...,n\} : \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i^*(e_j) = 0_K \\
&\Longrightarrow \forall j \in \{1,2,...,n\} : \alpha_j = 0_K \ (\text{car } e_i^*(e_j) = \delta_{ij})
\end{aligned}$$

■

Proposition 1.2.4 *(Intérêt des bases duales)*
Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie n, $(e_1, e_2, ..., e_n)$ une base de E et $(e_1^*, e_2^*, ..., e_n^*)$ sa base duale, alors
1) *Les coordonnées de tout vecteur x de E sont données par*

$$\forall x \in E : x = \sum_{i=1}^{n} e_i^*(x) e_i = \sum_{i=1}^{n} < e_i^*, x > e_i$$

2) *Les coordonnées de toute forme linéaire φ de E^* sont données par*

$$\forall \varphi \in E^* : \varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i) e_i^* = \sum_{i=1}^{n} < \varphi, e_i > e_i^*$$

Preuve.

1) Soit $x \in E$ avec $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, alors pour tout $j \in \{1, 2, ..., n\}$, on a

$$e_j^*(x) = e_j^* \left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \right) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_j^*(e_i) = x_j, \text{ car } e_j^*(e_i) = \delta_{ij}$$

2) Soit $\varphi \in E^*$ avec $\varphi = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i^*$, alors pour tout $j \in \{1, 2, ..., n\}$, on a

$$\varphi(e_j) = \left(\sum_{i=1}^{n} y_i e_i^* \right)(e_j) = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i^*(e_j) = y_j, \text{ car } e_j^*(e_i) = \delta_{ij}$$

■

1.2.2 Exemples fondamentaux

Exemple 1.2.5 ***(Exemples fondamentaux)***
1) *Dans* $E = \mathbb{R}^3$*, on considère une base* $B = (x_1, x_2, x_3)$ *donnés par* $x_1 = (1, 1, 1), x_2 = (1, 2, 3), x_3 = (2, -1, 1)$*. Alors pour déterminer la base duale* $B^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$*, il suffit de calculer les coordonnées d'un vecteur* $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ *dans cette base. Soit* $C = (e_1, e_2, e_3)$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^3$*. Alors*
On a

$$x_1^* : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}, x_1^*(X) = x_1^*(xe_1 + ye_2 + ze_3) = x.x_1^*(e_1) + y.x_1^*(e_2) + z.x_1^*(e_3)$$

Posons

$$x_1^*(X) = a_1 x + a_2 y + a_3 z, a_i = x_1^*(e_i) \in \mathbb{R}, \forall i = \overline{1, 3}$$

On obtient

$$\begin{cases} x_1^*(x_1) = 1 \\ x_1^*(x_2) = 0 \\ x_1^*(x_3) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 1 \\ a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 0 \\ 2a_1 - a_2 + a_3 = 0 \end{cases}$$
$$\Longrightarrow a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = -1$$

Donc

$$\begin{array}{rccl} x_1^* : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y, z) & \longmapsto & x_1^*(x, y, z) = x + y - z \end{array}$$

De la même manière, on trouve

$$\begin{array}{rlll} x_2^*: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \longmapsto & x_2^*(x,y,z)=\frac{1}{5}(-2x-y+3z) \end{array}$$

$$\begin{array}{rlll} x_3^*: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \longmapsto & x_3^*(x,y,z)=\frac{1}{5}(x-2y+z) \end{array}$$

2) *Soient* $E=\mathbb{R}_2[X]=\{P=a_0+a_1X+a_2X^2: a_0,a_1,a_2\in\mathbb{R}\}$ *et* $C=(P_0=1,P_1=X,P_2=X^2)$ *sa base canonique. On considère une base* $B=(Q_0=1,Q_1=1+X,Q_2=X^2+2X+1)$. *Alors*
On a $Q_0^*:E\longrightarrow\mathbb{R}$, $Q_0^*(P=a_0P_0+a_1P_1+a_2P_2)=a_0Q_0^*(P_0)+a_1Q_0^*(P_1)+a_2Q_0^*(P_2)$. *Où*

$$\begin{cases} Q_0^*(Q_0)=1 \\ Q_0^*(Q_1)=0 \\ Q_0^*(Q_2)=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} Q_0^*(1)=1 \\ Q_0^*(1+X)=Q_0^*(1)+Q_0^*(X)=0 \\ Q_0^*(1+2X+X^2)=Q_0^*(1)+2Q_0^*(X)+Q_0^*(X^2)=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} Q_0^*(1)=1 \\ Q_0^*(X)=-1 \\ Q_0^*(X^2)=1 \end{cases}$$

On obtient

$$\begin{array}{rlll} Q_0^*: & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & P=a_0+a_1X+a_2X^2 & \longmapsto & Q_0^*(P)=a_0-a_1+a_2 \end{array}$$

De la même manière, on trouve

$$\begin{array}{rlll} Q_1^*: & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & P=a_0+a_1X+a_2X^2 & \longmapsto & Q_1^*(P)=a_1-2a_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rlll} Q_2^*: & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & P=a_0+a_1X+a_2X^2 & \longmapsto & Q_2^*(P)=a_2 \end{array}$$

1.2.3 Etude matricielle d'une forme linéaire

Matrice d'une forme linéaire (Représentation matricielle d'une forme linéaire)

Soit $\varphi\in E^*$, c'est une application linéaire de E dans K. On peut donc chercher sa matrice $Mat(\varphi)$ en prenant une base de E, $B_E=(e_1,...,e_n)$ et la base canonique $B_K=(1)$ de K. Nous savons que les colonnes de $Mat(\varphi)$ seront les coordonnées des $\varphi(e_j)$ sur B_K. Comme $\varphi(e_j)=a_j$ est un scalaire, $Mat(\varphi)$ aura la forme suivante

$$A=\underset{B_E,B_K}{Mat}(\varphi)=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & . & . & . & a_n \end{pmatrix}\in M_{1,n}(K)$$

Alors si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$ matrice colonne des coordonnées de X dans la base B_E, alors

$$\varphi(X) =< \varphi, X >= A.X = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & . & . & . & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_2 \end{pmatrix} = a_1x_1 + ... + a_2x_2 = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \tag{1.1}$$

En général, si $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_m$ est une famille finie de formes linéaires, où

$$\begin{aligned}
\underset{B_E,B_K}{Mat}(\varphi_1) &= \begin{pmatrix} a_1^{(1)} & a_2^{(1)} & . & . & . & a_n^{(1)} \end{pmatrix} \\
\underset{B_E,B_K}{Mat}(\varphi_2) &= \begin{pmatrix} a_1^{(2)} & a_2^{(2)} & . & . & . & a_n^{(2)} \end{pmatrix} \\
&. \\
&. \\
&. \\
\underset{B_E,B_K}{Mat}(\varphi_m) &= \begin{pmatrix} a_1^{(m)} & a_2^{(m)} & . & . & . & a_n^{(m)} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Sont les matrices de φ_i dans la base B. On obtient

$$A = \begin{pmatrix} a_1^{(1)} & a_2^{(1)} & . & . & . & a_n^{(1)} \\ a_1^{(2)} & a_2^{(2)} & . & . & . & a_n^{(2)} \\ . & & . & & & \\ . & & & . & & \\ . & & & & . & \\ a_1^{(m)} & a_2^{(m)} & . & . & . & a_n^{(m)} \end{pmatrix} \in M_{m,n}(K)$$

est appelée la matrice de la famille $(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_m)$ dans la base B.

La forme linéaire φ considérée comme un vecteur de E^*

Si $B^*_{E^*} = (e_1^*, ..., e_n^*)$ est une base de E^*, alors on aura $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i^*$ et on représente classiquement φ sous forme d'un vecteur colonne par rapport à $B^*_{E^*}$

$$A = \underset{B^*_{E^*}}{Mat}(\varphi) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ . \\ . \\ . \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

La forme linéaire φ considérée comme une application linéaire de E dans K

On suppose que E et E^* sont munis de bases duales B_E et $B^*_{E^*}$. Alors, pour toute forme linéaire φ, nous avons vu que $A = \underset{B_E, B_K}{Mat}(\varphi)$ est une matrice uniligne

$$A = \underset{B_E, B_K}{Mat}(\varphi) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & . & . & . & a_n \end{pmatrix}$$

Alors, pour toute forme linéaire φ, en appelant $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ . \\ . \\ . \\ u_n \end{pmatrix} = \underset{B^*_{E^*}}{Mat}(\varphi)$ la matrice colonne des coordonnées de φ sur $B^*_{E^*}$, nous aurons

$$A = \underset{B_E, B_K}{Mat}(\varphi) = \overset{t}{U}$$

On retrouve alors

$$\varphi(X) =< \varphi, X >= \underset{B_E, B_K}{Mat}(\varphi).X = \overset{t}{U}.X = u_1 x_1 + ... + u_n x_n$$

1.2.4 Matrices et bases duales

Proposition 1.2.6 *Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie n, $B = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base de E et $B^* = (e_1^*, e_2^*, ..., e_n^*)$ sa base duale. Soit f un endomorphisme de E et $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice de f par rapport à la base $B = (e_1, e_2, ..., e_n)$, alors*

$$\forall i, j \in \{1, ..., n\} : a_{ij} = e_i^*(f(e_j)) =< e_i^*, f(e_j) >$$

Preuve. On sait que les colonnes de la matrice A sont les coordonnées des vecteurs $f(e_j)$ dans la base B. Alors d'après la proposition (1.2.4), on a

$$\forall j \in \{1,...,n\} : f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} e_i^*(f(e_j))e_i = \sum_{i=1}^{n} < e_i^*, f(e_j) > e_i$$

Car $\forall j \in \{1,...,n\} : f(e_j) \in E$. Donc, si $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ la matrice de f par rapport à la base B, alors

$$\forall i,j \in \{1,...,n\} : a_{ij} = e_i^*(f(e_j)) =< e_i^*, f(e_j) >$$

■

Proposition 1.2.7 *Soient B et B' des bases de E espace vectoriel de dimension finie n, B^* et B'^* leurs duales et soient P la matrice de passage de B à B'. Alors la matrice de passage de la base B^* à B'^* est* $Q = \left(\overset{t}{P}\right)^{-1} =^t (P^{-1})$.

Preuve. Soient $B = (e_1, ..., e_n), B' = (e'_1, ..., e'_n), B^* = (e_1^*, ..., e_n^*), B'^* = (e_1'^*, ..., e_n'^*)$. Par définition, les colonnes de $P = Pass(B, B')$ sont les coordonnées des vecteurs de B' dans B. Alors on a

$$\forall k = \overline{1,n} : e'_k = \sum_{l=1}^{n} p_{lk}e_l$$

Désignons par $Q = Pass(B^*, B'^*)$ la matrice de passage de B^* à B'^*. On a alors

$$\forall j = \overline{1,n} : e_j'^* = \sum_{i=1}^{n} q_{ij}e_i^*$$

Or

$$\forall j,k = \overline{1,n} : \delta_{jk} = e_j'^*(e'_k) = \left(\sum_{i=1}^{n} q_{ij}e_i^*\right)\left(\sum_{l=1}^{n} p_{lk}e_l\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} q_{ij}p_{lk}\delta_{il} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} q_{ij}p_{ik} = (\overset{t}{Q}P)_{jk} = \begin{cases} 1, \text{ si } j = k \\ 0, \text{ si } i \neq j \end{cases} = (I_n)_{jk}$$

Donc $\overset{t}{Q}P = I_n$ et par suite $Q = \left(\overset{t}{P}\right)^{-1} =^t (P^{-1})$ ■

Exemple 1.2.8 *Dans $E = \mathbb{R}^3$, on donne les bases $B = (e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1))$ et $B' = (e'_1 = (1,0,1), e'_2 = (1,1,0), e'_3 = (0,1,1))$ de $\mathbb{R}^3$. Trouver la base duale B'^* de $B\prime$.*

On a la matrice de passage de la base canonique B à $B\prime$ est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit facilement P^{-1} et ${}^t(P^{-1})$ où

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, {}^t(P^{-1}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = Q = Pass(B^*, B'^*)$$

Alors B'^* est définie par

$$\begin{cases} e_1'^* = (\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}) \\ e_2'^* = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}) \\ e_3'^* = (\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \end{cases}$$

Corollaire 1.2.9 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Toute base du dual est une base duale et pour toute base B' de E^*, il existe une unique base B de E telle que B' soit la base duale de B.*
La base B s'appelle la base antéduale de la base B'.

Preuve. Soit F une base de E fixée et F^* sa base duale. Désignons par $Q = Pass(F^*, B')$ la matrice de passage de la base F^* à l a base B' et posons $P =^t (Q^{-1})$. Considérons la base B de E telle que la matrice de passage de la base F à B soit P. Alors d'après la proposition précédente, la matrice de passage de la base F^* à la base B^* est ${}^t(P^{-1})$. Par suite $B^* = B'$. ∎

Remarque 1.2.10 *Notons $B(V)$ l'ensemble des bases d'un espace vectoriel V. Alors l'application*

$$\begin{array}{cccc} g: & B(E) & \longrightarrow & B(E^*) \\ & B & \longmapsto & B^* \end{array}$$

est une bijection.
Autrement dit l'application linéaire de E sur E^* qui à une base B associe sa base duale B^*, i.e. $\varphi(e_i) = e_i^*$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Preuve.
1) Injectivité : si $g(B_1) = g(B_2)$, alors $B_1^* = B_2^*$ et

$$Pass(B_1, B_2) =^t Pass(B_1^*, B_2^*)^{-1} =^t I_n^{-1} = I_n$$

Donc $B_1 = B_2$.
2) La surjectivité d'après le corollaire précédent. ■

1.3 Espace Bidual

Comme E est un espace vectoriel sur K, on peut considérer l'ensemble des formes linéaires sur E^*, c'est- à-dire l'ensemble $L(E^*, K)$, appelé bidual de E ou le dual de E^*.

Définition 1.3.1 *Soit E un K-espace vectoriel, on appelle bidual de E, qu'on note E^{**}, le dual de E^*, c'est- à-dire l'ensemble des formes linéaires sur E^*.*

$$E^{**} = (E^*)^* = L(E^*, K)$$

Proposition 1.3.2 *E^{**} est un espace vectoriel sur K et si $\dim E = n$, alors $\dim E^{**} = n$.*

Preuve. Il est clair que E^{**} est un $K-$espace vectoriel.
Supposons que $\dim E = n$, alors $\dim E^{**} = \dim(L(E^*, K)) = \dim E^*. \dim K = \dim E^* = n$. ■

Proposition 1.3.3 ***(Définition)***
Soit E un espace vectoriel sur K. Soit l'application

$$\begin{array}{rccl} J: & E & \longrightarrow & E^{**} \\ & x & \longmapsto & J(x) = \hat{x} \end{array}$$

Où

$$\begin{array}{rccl} \hat{x}: & E^* & \longrightarrow & K \\ & f & \longmapsto & \hat{x}(f) = f(x) \end{array}$$

alors J est une application linéaire dite application linéaire canonique.

Preuve.
1) $i)$ Montrons d'abord que l'on a bien $\hat{x} \in E^{**} = L(E^*, K)$.
On a

$$f \in E^* = L(E, K) \text{ et } x \in E \Longrightarrow \exists f(x) \in K \Longrightarrow \exists \hat{x}(f) = f(x) \in K$$

D'autre part, on a l'application $\hat{x}$ est bien définie. C'est-à-dire

$$\forall f_1, f_2 \in E^* : f_1 = f_2 \Longrightarrow \hat{x}(f_1) = \hat{x}(f_2)$$

En effet : soient $f_1, f_2 \in E^*$, alors

$$\begin{aligned} f_1 &= f_2 \Longrightarrow \forall x \in E : f_1(x) = f_2(x) \\ &\Longrightarrow \hat{x}(f_1) = \hat{x}(f_2) \end{aligned}$$

$ii)$ L'application $\hat{x}$ est linéaire, en effet :
Soient $\alpha_1, \alpha_2 \in K, f_1, f_2 \in E^*$, alors

$$\hat{x}(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)(x) = \alpha_1.f_1(x) + \alpha_2.f_2(x) = \alpha_1.\hat{x}(f_1) + \alpha_2.\hat{x}(f_2)$$

2) $i)$ Il est claire que J est une application de E dans E^{**}. En effet, soit $x \in E$, alors

$$\exists \hat{x} \in E^{**} \Longrightarrow \exists J(x) = \hat{x} \in E^{**}$$

$$f \in E^* = L(E, K) \text{ et } x \in E \Longrightarrow \exists f(x) \in K \Longrightarrow \exists \hat{x}(f) = f(x) \in K$$

D'autre part, on a l'application J est bien définie. C'est-à-dire

$$\forall x_1, x_2 \in E : x_1 = x_2 \Longrightarrow J(x_1) = J(x_2)$$

En effet : soient $x_1, x_2 \in E$, $f \in E^*$ alors

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2 \Longrightarrow f(x_1) = f(x_2) \\ &\Longrightarrow \hat{x}_1(f) = \hat{x}_2(f) \\ &\Longrightarrow J(x_1) = J(x_2) \end{aligned}$$

$ii)$ Montrons maintenant que J est linéaire.
Soient $\alpha_1, \alpha_2 \in K, x_1, x_2 \in E$, alors

$$J(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = (\alpha_1 \widehat{x_1 + \alpha}_2 x_2)$$

Or

$$\begin{aligned} (\alpha_1 \widehat{x_1 + \alpha}_2 x_2)(f) &= f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1.f(x_1) + \alpha_2.f(x_2) = \alpha_1.\hat{x}_1(f) + \alpha_2.\hat{x}_2(f) \\ &= (\alpha_1.\hat{x}_1 + \alpha_2.\hat{x}_2)(f), \forall f \in E^* \\ &\Longrightarrow J(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = (\alpha_1 \widehat{x_1 + \alpha}_2 x_2) = (\alpha_1.\hat{x}_1 + \alpha_2.\hat{x}_2) = \alpha_1 J(x_1) + \alpha_2 J(x_2) \end{aligned}$$

$\blacksquare$

Remarque 1.3.4 *On sait que deux $K-$ev E et F de dimensions finies sont isomorphes ssi* $\dim(E) = \dim(F)$*. La situation la plus intéressante est lorsque l'on peut construire entre E et F un isomorphisme indépendant des bases. Un tel isomorphisme est dit "canonique" et dans ce cas E et F "se ressemblent" tellement que l'on peut les confondre. Considérons un K-ev E de dimension $n > 0$. Comme* $\dim(E^*) = \dim(E^{**}) = n$*, les espaces E, E^* et E^* sont nécessairement isomorphes. Cependant, E et E^* ne sont jamais canoniquement isomorphes sauf dans quelques cas exceptionnels :* $\dim(E) = 1$ *ou* $\dim(E) = 2$ *et $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ou si E est euclidien. Cependant, nous allons montrer qu'en dimension finie on a une identification canonique d'un espace avec son bidual.*

1.3.1 Identification d'un espace à son bidual

Théorème 1.3.5 *(Identification d'un espace à son bidual)*
Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n, alors l'application

$$J : \begin{cases} E & \longrightarrow & E^{**} \\ x & \longmapsto & J(x) = \hat{x} \quad \begin{cases} E^* & \longrightarrow & K \\ f & \longmapsto & \hat{x}(f) = f(x) \end{cases} \end{cases}$$

est un isomorphisme (canonique) d'espaces vectoriels et on dit que E^{**} est canoniquement isomorphe à E.

Ceci veut dire que l'on peut construire un isomorphisme de E sur E^{**} sans faire appel a des choix de bases. Nous pouvons donc confondre E et E^{**}.

Preuve.
Soit $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ une base de E. On a l'application J est linéaire d'après la proposition (1.3.3). Il reste à montrer que J est bijective. Il suffit de montrer qu'elle est injective. Montrons que son noyau est nul. i,e.

$$\ker(J) = \{0_E\}$$

Soit $x = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n \in E$, où $(x_1, ..., x_n) \in K^n$ tel que $J(x) = 0_{E^{**}}$ ($0_{E^{**}}$ forme nulle du bidual). Alors

$$J(x) = 0_{E^{**}} \Longrightarrow \forall f \in E^* : \hat{x}(f) = f(x) = 0$$

Soit $B^* = \{e_1^*, e_2^*, ..., e_n^*\}$ la base duale de E^*. On a

$$\hat{x}(e_i^*) = 0_K$$

c'est- à-dire $e_i^*(x) = 0_K$. Or, par définition d'une base duale, on a, pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, $e_i^*(x) = x_i$ où x_i est la $i - ème$ composante de x dans la base B. On en déduit que $x = 0_E$ et J est injective. Comme en plus, E, E^*, E^{**} ont même dimension, J sera aussi surjective. Finalement J est bien un isomorphisme canonique entre E et E^{**}.

$$\exists x \in \ker(J) : x \neq 0_E$$

Par conséquent la famille $\{x\}$ est libre dans E, d'après le théorème de la base incomplète, il existe une base $B' = \{x, e_2, ..., e_n\}$ de E, alors il existe une base $B'^* = \{x^*, e_2^*, ..., e_n^*\}$ de E^* duale de E.
On obtient

$$\hat{x}(x^*) = x^*(x) = 1 \neq 0_K$$

■

Remarque 1.3.6 *On introduit par conséquent le crochet de dualité, on peut écrire*

$$J : E \longrightarrow E^{**} \text{ où } \forall f \in E^* : J(x)(f) = f(x) =< f, x >$$

On peut également écrire

$$\forall x \in E, \forall f \in E^* :< J(x), f >=< f, x >$$

Comme nous le signalions, nous pouvons donc confondre E et E^{**}. En fait, on identifie x avec $J(x) = x^{**}$. Au niveau du crochet de dualité, cela revient à "retourner" l'écriture. On a

$$\forall y^* \in E^*, \forall x^{**} \in E^{**} :< y^*, x^{**} >=< y^*, x >$$

avec

$$x^{**} = J(x)$$

identifié à x.

Proposition 1.3.7 *Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie n et $J : E \longrightarrow E^{**}$ l'isomorphisme canonique entre E et E^{**}. Alors Pour toute base B de E, on a $J(B) = B^{**}$, où $B^{**} = (B^*)^*$ est la base duale de B^* dans E^{**} .*

Preuve. Soit $B = (e_1, ..., e_n)$ une base de E, alors on a

$$\forall k, l \in \{1, ..., n\} :< J(e_k), e_l^* >=< e_l^*, e_k >= \delta_{kl}$$

ce qui est précisément la formule définissant $(e_l^*)^*$. Alors

$$\forall k \in \{1, ..., n\} : J(e_k) = (e_l^*)^*$$

■

Chapitre 2

Hyperplans

Définition 2.0.8 *Soit E un $K-$espace vectoriel.*
On apelle hyperplan de E le noyau d'une forme φ linéaire non nulle sur E. Autrement dit, un s-ev H de E est un hyperplan si et seulement si

$$\exists \varphi \in E^* - \{0\} : H = \ker(\varphi)$$

Exemple 2.0.9
1) *L'application*

$$\begin{array}{llll} \varphi_1 & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \longmapsto & \varphi_1(x,y,z) = 4x - 5y + 3z \end{array}$$

est une forme linéaire non nulle sur $\mathbb{R}$ et donc

$$H_1 = \ker(\varphi_1) = \{(x,y,z) : 4x - 5y + 3z = 0\}$$

est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$.
2) *Soit $a \in K$, alors l'application*

$$\begin{array}{llll} \varphi_2 & K[X] & \longrightarrow & K \\ & P & \longmapsto & \varphi_2(P) = P(a) \end{array}$$

est une forme linéaire non nulle sur K (puisque $\varphi_2(1) = 1(a) = 1 \neq 0$) et donc

$$H_2 = \ker(\varphi_2) = \{P \in K[X] : P(a) = 0\}$$

est un hyperplan de $K[X]$.

3) *L'application (trace)*

$$\begin{array}{lccl} \varphi_3 & M_n(K) & \longrightarrow & K \\ & A & \longmapsto & \varphi_3(A) = Tr(A) \end{array}$$

est une forme linéaire non nulle sur K *(puisque* $Tr(I_n) = n \neq 0$*) et donc*

$$H_3 = \ker(\varphi_3) = \{A \in M_n(K) : Tr(A) = 0\}$$

est un hyperplan de $M_n(K)$.

Notation 2.0.10 *Soit* a *un vecteur non nul de* E*, la droite vectorielle engendrée par* a *est le s-ev* D *de* E *formé par les vecteurs de type* $k.a$*, où* k *décrit* K*. On écrit* $D = K.a$*.*

Le théorème suivant caractérise les hyperplans.

Théorème 2.0.11 *(Hyperplans et droites vectorielles)*
Soit H *un s-ev de* E*. Pour que* H *soit un hyperplan de* E*, il faut et il suffit qu'il existe une droite vectorielle* D *de* E *telle que* H *et* D *soient supplémentaires dans* E*.*

$$E = H \oplus D$$

Preuve.
1) Soit H un hyperplan de E. Il existe $\varphi \in E^* - \{0\}$ telle que $H = \ker(\varphi)$, puis il existe $x_0 \in E$ tel que $\varphi(x_0) \neq 0$. Nous allons montrer que la droite vectorielle $D = Kx_0$ est supplémentaire de H dans E.
i) Soit $x \in D \cap H$, alors

$$\exists \alpha \in K : x = \alpha x_0 \text{ et } \varphi(x) = 0$$

$$\Longrightarrow \alpha.\varphi(x_0) = 0, \varphi(x_0) \neq 0$$

$$\Longrightarrow \alpha = 0$$

Donc $x = 0$. Ceci montre $D \cap H = \{0_E\}$.
ii) Montrons que

$$E = D + H$$

On a $D + H \subset E$, car $D + H$ est un sous espace vectoriel de E.
D'autre part, soit $x \in E$. Montrons qu'il existe $(\lambda, y) \in K \times H$ tel que

$$x = \lambda x_0 + y$$

Si un tel couple (λ, y) existe, alors

$$\varphi(x) = \varphi(\lambda x_0 + y) = \lambda\varphi(x_0) + \varphi(y) = \lambda\varphi(x_0), \varphi(y) = 0$$

D'où

$$\lambda = \frac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)} \text{ et } y = x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)} x_0$$

On obtient

$$x = \tfrac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)}.x_0 + (x - \tfrac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)} x_0) = x_1 + x_2 \in D + H$$

Où

$$\begin{array}{c} x_1 = \tfrac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)}.x_0 \in D \\ x_2 = x - \tfrac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)} x_0 \in H \end{array}$$

En effet :
Il est clair que $x_1 = \tfrac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)}.x_0 \in D$. D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \varphi(x_2) &= \varphi\left(x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)} x_0\right) = \varphi(x) - \frac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)} \varphi\left(x_0\right) = 0 \\ &\Longrightarrow x_2 \in \ker(\varphi) = H \end{aligned}$$

Ceci montre $D + H = E$. Finalement $D \oplus H = E$.
2) Réciproquement, supposons qu'il existe une droite vectorielle D telle que $D \oplus H = E$. Alors il existe $x_0 \in D$ tel que $x_0 \neq 0$.
On a $D \oplus H = E$, alors pour tout x de E, il existe un couple unique $(\lambda, y) \in K \times H$, tel que

$$x = \lambda x_0 + y \tag{2.1}$$

Soit p la projection sur D parallèlement à H. Soit x_0 un vecteur directeur de D. On définit une application φ par

$$\begin{array}{cccc} \varphi & E & \longrightarrow & K \\ & x & \longmapsto & \varphi(x) = \lambda \end{array}$$

avec λ définie par

$$p(x) = \lambda x_0$$

On vérifie que cette application est bien linéaire (par linéarité de la projection P). On a bien $\varphi \in E^* - \{0\}$, car d'après la relation (2.1)

$$\varphi(x_0) = \varphi(1.x_0 + 0) = 1 \neq 0, \lambda = 1$$

φ est une forme linéaire sur E dont le noyau est H, car

$\ker(\varphi) = \{x = \lambda x_0 + y \in E : \varphi(x) = 0\} = \{x = \lambda x_0 + y \in E : \lambda = 0\} = \{x = y \in E : y \in H\} = H$

■

Remarque 2.0.12 *Si H est un hyperplan et φ une forme linéaire sur E de noyau H, on a*

$$E = H \oplus (Kx_0) \Longleftrightarrow \varphi(x_0) \neq 0 \Longleftrightarrow x_0 \notin H \Longleftrightarrow x_0 \in E - H$$

Ainsi, toute droite (vectorielle) D non contenue dans l'hyperplan H est un supplémentaire de H.

Corollaire 2.0.13 *Si E est de dimension finie n $(n \geq 1)$, alors les hyperplans de E sont les s-ev de E de dimension $n-1$.*

Preuve. On a $H \oplus D = E$, alors

$$\dim E = \dim D + \dim H, \dim D = 1 \Longrightarrow \dim H = \dim E - 1 = n - 1$$

■

Définition 2.0.14 *Soit F un s-ev de E, sa codimension $codim(F)$ est la dimension commune à tous ses supplémentaires. Si $\dim E < \infty$, alors*

$$codim(F) = \dim E - \dim F$$

Définition 2.0.15 *On appelle hyperplan de E tout s-ev H de E, de codimension 1. En dimension finie il est de dimension*

$$\dim H = \dim E - 1$$

Exemple 2.0.16
1) *Les hyperplans de $\mathbb{R}^2$ sont les droites vectorielles.*
2) *Les hyperplans de $\mathbb{R}^3$ sont les plans vectoriels.*

Proposition 2.0.17 *(formes linéaires non nulles ayant le même noyau)*
Soient H un hyperplan de E, $\varphi \in E^* - \{0\}$ telle que $H = Ker(\varphi)$, et $\psi \in E^* - \{0\}$. On a

$$H = \ker(\psi) \Longleftrightarrow (\exists \alpha \in \Bbbk - \{0\}, \psi = \alpha\varphi)$$

Autrement dit φ et ψ sont proportionnelles ou la famille $\{\varphi, \psi\}$ est liée.

Preuve.
1) Il est clair que, pour tout α de $K - \{0\}$

$$\ker(\alpha\varphi) = \ker(\varphi) = H$$

2) Soit $\psi \in E^* - \{0\}$ telle que $H = \ker(\psi)$.
On a

$$H = Ker(\varphi) \Longrightarrow \exists x_0 \in E : \varphi(x_0) \neq 0$$

Alors

$$E = \ker(\varphi) + (Kx_0)$$

Soit $x \in E$, alors

$$\exists \lambda \in K, \exists y \in \ker(\varphi) = H = \ker(\psi) : x = y + \lambda x_0$$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} \varphi(x) = \lambda\varphi(x_0) \\ et \\ \psi(x) = \lambda\psi(x_0) \end{array} \right. \\ &\Longrightarrow \quad \psi(x) = \frac{\psi(x_0)}{\varphi(x_0)}\varphi(x) \end{aligned}$$

On pose

$$\alpha = \frac{\psi(x_0)}{\varphi(x_0)} \in K - \{0\}$$

Alors $\psi = \alpha\varphi$. ■

Remarque 2.0.18 *On déduit de la proposition précédente que deux formes linéaires non nulles définissent le même hyperplan si et seulement si, elles sont proportionnelles.*

Proposition 2.0.19 *Soit E un K-ev de dimension finie n. Pour tout $e \in E - \{0\}$, il existe $\varphi \in E^*$ telle que $\varphi(e) = 1$.*

Preuve. La droite vectorielle Ke (engendrée par e) admet au moins un supplémentaire H dans E, et H est un hyperplan de E. Il existe donc $\varphi_1 \in E^*$ telle que $H = \ker(\varphi_1)$. Comme $e \notin \ker(\varphi_1)$ (car $e \in D = E - H$), alors $\varphi_1(e) \neq 0$.
D'après la proposition précédente, on pose

$$\varphi = \frac{1}{\varphi_1(e)}\varphi_1$$

On a alors

$$\varphi \in E^* \text{et } \varphi(e) = 1$$

■

Par raisonnement par l'absurde, on déduit le corollaire suivant :

Corollaire 2.0.20 *Soient E un K-ev de dimension finie n, $x \in E$. Si toutes les formes linéaires sur E, s'annulent en x, alors $x = 0$. Autrement dit le seul élément de E qui annule toutes les formes linéaires sur E est 0. Alors, on a*

$$\bigcap_{\varphi \in E^*} \ker(\varphi) = \{0\}$$

2.1 Equation cartésienne d'un hyperplan

Soient E un K-ev, $E \neq 0$, H un hyperplan de E, φ une forme linéaire (non nulle) telle que $H = \ker(\varphi)$. Nous avons donc

$$x \in H \Longleftrightarrow \varphi(x) = 0 \Longleftrightarrow <\varphi, x>= 0$$

Si ψ est une autre forme linéaire de noyau H, alors, $\psi = \alpha.f$, (α non nul) et l'équation $<\psi, x>= 0$ s'écrira $<\alpha\varphi, x>= 0$, donc $\alpha <\varphi, x>= 0$. Comme $\alpha \neq 0$, cela donne encore $<\varphi, x>= 0$. L'équation $<\varphi, x>= 0$ d'inconnue x est donc indépendante du choix de la forme linéaire φ de noyau H. Cette équation s'appelle une équation cartésienne de H.

Définition 2.1.1 *Soient E un K-ev, $E \neq 0$, H un hyperplan de E. On appelle équation cartésienne de H l'équation*

$$\varphi(x) = 0 \Longleftrightarrow <\varphi, x>= 0$$

d'inconnue $x \in E$, φ étant l'une des formes linéaires de E^* vérifiant $\ker(\varphi) = H$.

La situation la plus intéressante est lorsque $\dim(E)$ est finie, égale à $n > 0$. Prenons une base B_E de E et sa duale $B^*_{E^*}$ dans E^*. Alors, si φ a pour coordonnées $(a_1, ..., a_n)$ non toutes nulles sur $B^*_{E^*}$ et si x a pour coordonnées $(x_1, ..., x_n)$ sur B_E nous savons d'après la formule (1.1) que

$$\varphi(x) = 0 \Longleftrightarrow <\varphi, x>= 0 \Longleftrightarrow a_1x_1 + ... + a_nx_n = 0$$

Théorème 2.1.2 ***(Equation d'un hyperplan en dimension finie)***
Soient E un K-ev de dimension $n > 0$, H un hyperplan de E, φ une des formes linéaires de E^* de noyau H. Si l'on munit E et E^* de deux bases $B_E = (e_1, ..., a_n)$ et $B^*_{E^*} = (e^*_1, ..., e^*_n)$, l'équation cartésienne de H se présente sous la forme

$$< \varphi, x >= 0 \Longleftrightarrow a_1x_1 + ... + a_nx_n = 0$$

où $(x_1, ..., x_n)$ et $(a_1, ..., a_n)$ sont les coordonnées de x et de φ respectivement sur B_E et $B^*_{E^*}$. φ étant non nulle, les a_i sont non tous nuls.
De plus, si $b_1x_1 + ... + b_nx_n = 0$, est une autre équation de H dans la base B_E, alors

$$\exists\lambda \in K^*, \forall i = \overline{1, n} : b_i = \lambda a_i$$

Preuve. Puisque H est un hyperplan de E, il existe une forme linéaire non nulle dont H est le noyau. Il suffit pour cela de considérer une base $(e'_1, \dots, e'_{n-1})$ de H (car $\dim H = n - 1$), de la compléter avec un vecteur e'_n en une base de E, de considérer la base duale de cette base $(e'^*_1, \dots, e'^*_{n-1})$ et la forme linéaire e'^*_n a bien pour noyau H.
Soit maintenant la base B_E proposée. Alors e'^*_n peut se décomposer suivant la base duale $B^*_{E^*} = (e^*_1, ..., e^*_n)$ en

$$e'^*_n = a_1e^*_1 + ... + a_ne^*_n$$

où les coefficients $(a_i)_i$ sont des scalaires non tous nuls, puisque $e'^*_n \neq 0^*_{E^*}$.
On a

$$\forall x \in E : x = x_1e_1 + ... + x_ne_n$$

Alors

$$x \in H \Longleftrightarrow e'^*_n(x) = 0 \Longleftrightarrow a_1x_1 + ... + a_nx_n = 0$$

Soit enfin

$$b_1x_1 + ... + b_nx_n = 0$$

Une autre équation de H dans la base B_E. Cela signifie

$$\forall x \in E : x = x_1e_1 + ... + x_ne_n$$

Alors, on a

$$x \in H \Longleftrightarrow b_1x_1 + ... + b_nx_n = 0 \Longleftrightarrow \psi(x) = 0$$

Où ψ est la forme linéaire

$$\psi = b_1e^*_1 + ... + b_ne^*_n$$

Autrement dit

$$H = \ker(\psi)$$

Mais deux formes linéaires qui ont même noyau sont proportionnelles entre elles et

$$\exists \lambda \in K^*, \forall i = \overline{1, n} : b_i = \lambda a_i$$

■

Exemple 2.1.3
1) *Les hyperplans de* $\mathbb{R}^2$ *sont les droites vectorielles. Si* $\mathbb{R}^2$ *est muni d'une base* (e_1, e_2)*, et si on note* (x, y) *les coordonnées d'un vecteur quelconque dans cette base, alors l'équation d'une droite* D *de* $\mathbb{R}^2$ *s'écrit d'une manière unique sous la forme* $ax + by = 0$*, avec* $(a, b) \neq (0, 0)$.
2) *Les hyperplans de* $\mathbb{R}^3$ *sont les plans vectoriels. Si* $\mathbb{R}^3$ *est muni d'une base* (e_1, e_2, e_3)*, et si on note* (x, y, z) *les coordonnées d'un vecteur quelconque dans cette base, alors l'équation d'un plan* P *de* $\mathbb{R}^3$ *s'écrit d'une manière unique sous la forme* $ax + by + cz = 0$*, avec* $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.
3) *Tout plan vectoriel de* $\mathbb{R}^3$ *admet une équation de la forme* $ax+by+cz = 0$ *où* $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ *et pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $\lambda ax + \lambda by + \lambda cz = 0$ *est également une équation de ce même hyperplan*

Chapitre 3

Transposition et orthogonalité par dualité

3.1 Transposition

Soient E et F deux K-ev, u un élément de $L_K(E,F)$. Appelons y^* un élément quelconque de F^*. Alors, l'application $y^* \circ u$ est linéaire (composée de deux applications linéaires) de E dans K. Donc $y^* \circ u$ est un élément de E^*. Finalement, on construit une application de E^* vers F^* définie par

$$y^* \longmapsto y^* \circ u$$

Appelons ${}^t u$ cette application. Nous avons donc

$$\forall y^* \in F^* :{}^t u(y^*) = y^* \circ u$$

3.1.1 Application transposée

Théorème 3.1.1 *(Définition)*
Soient E et F deux espaces vectoriels sur K et $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire. On appelle application transposée de u, qu'on note ${}^t u$, l'application de F^* dans E^* définie par

$$\forall y^* \in F^* :{}^t u(y^*) = y^* \circ u$$

On écrit

$$\begin{array}{rccl} {}^t u : & F^* & \longrightarrow & E^* \\ & y^* & \longmapsto & {}^t u(y^*) = y^* \circ u \end{array}$$

La transposée de u est une application linéaire.

Preuve.

1) i) Montrons d'abord que l'on a bien ${}^tu \in L_K(F^*, E^*)$.

On a $E^* = L_K(E, K)$ et $F^* = L_K(F, K)$, donc $E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{y^*} K$, par conséquent

$$y^* \circ u =^t u(y^*) \in E^*, y^* \in F^*$$

$$\Longrightarrow^t u \in L_K(F^*, E^*)$$

ii) Montrons que l'application ${}^tu$ est bien définie.

Soient $y_1^*, y_2^* \in F^*$ et $x \in E$, telle que $y_1^* = y_2^*$, alors

$$u(x) = u(x) \Longrightarrow y_1^*(u(x)) = y_2^*(u(x)), \text{ car } y_1^* = y_2^*$$

$$\Longrightarrow (y_1^* \circ u)(x) = (y_2^* \circ u)(x)$$

$$\Longrightarrow^t u(y_1^*) =^t u(y_2^*)$$

2) Montrons que ${}^tu$ est linéaire sur K.

Soient $y_1^*, y_2^* \in F^*, \alpha_1, \alpha_2 \in K$, alors

$${}^tu(\alpha_1 y_1^* + \alpha_2 y_2^*) = (\alpha_1 y_1^* + \alpha_2 y_2^*) \circ u = (\alpha_1 y_1^*) \circ u + (\alpha_2 y_2^*) \circ u = \alpha_1 (y_1^* \circ u) + \alpha_2 (y_2^* \circ u) = \alpha_1^t u(y_1^*) + \alpha_2^t u(y_2^*)$$

■

Remarque 3.1.2 *La formule ${}^tu(y^*) = y^* \circ u$ donne aussi*

$$\forall x \in E, \forall y^* \in F^* : \left({}^tu(y^*)\right)(x) = (y^* \circ u)(x)$$

En employant la notation du crochet de dualité, la définition de l'application transposée peut être réécrite sous la forme

$$\forall x \in E, \forall y^* \in F^* :<^t u(y^*), x>=< y^*, u(x)>$$

Proposition 3.1.3 *La transposée possède les propriétés suivantes :*
Soient E, F et G trois K-espaces vectoriels. Alors

1) $\forall u, v \in L_K(E, F) :^t (u + v) =^t u +^t v$.

2) $\forall \alpha \in K, \forall u \in L_K(E, F) :^t (\alpha.u) = \alpha.^t u$.

3) $\forall u \in L_K(E, F), \forall v \in L_K(F, G) :^t (v \circ u) =^t u \circ^t v$.

4) *Soit Id_E l'endomorphisme identique de E, alors ${}^tId_E = Id_{E^*}$.*

4) *Si u est un isomorphisme de E sur F, alors ${}^tu$ est un isomorphisme de F^* sur E^* et ${}^t(u^{-1}) = ({}^tu)^{-1}$.*

Preuve.

1) Soient $u, v \in L_K(E,F)$, alors on peut définir $u+v \in L_K(E,F)$ et ${}^tu, {}^tv \in L_K(F^*, E^*)$, alors ${}^tu + {}^tv \in L_K(F^*, E^*)$.
Or $u+v \in L_K(E,F)$, alors on peut aussi définir ${}^t(u+v) \in L_K(F^*, E^*)$.
Soit $y^* \in F^*$, alors

$${}^t(u+v)(y^*) = y^* \circ (u+v) = y^* \circ u + y^* \circ v = {}^tu(y^*) + {}^tv(y^*)$$

2) On a $\alpha \in K, u \in L_K(E,F)$, alors $\alpha.u \in L_K(E,F)$ et ${}^t(\alpha.u) \in L_K(F^*, E^*)$.
Soit $y^* \in F^*$, alors

$${}^t(\alpha.u)(y^*) = y^* \circ (\alpha.u) = \alpha.(y^* \circ u) = \alpha.{}^tu(y^*)$$

3) On a $u \in L_K(E,F), v \in L_K(F,G)$, alors $v \circ u \in L_K(E,G)$ et ${}^t(v \circ u) \in L_K(G^*, E^*)$. Or ${}^tu \in L_K(F^*, E^*)$ et ${}^tv \in L_K(G^*, F^*)$, alors ${}^tu \circ {}^tv \in L_K(G^*, E^*)$.
Soit $z^* \in F^*$, alors

$${}^t(v \circ u)(z^*) = z^* \circ (v \circ u) = (z^* \circ v) \circ u = \left({}^tv(z^*)\right) \circ u = {}^tu({}^tv(z^*)) = \left({}^tu \circ {}^tv\right)(z^*)$$

4) On a $Id_E \in L_K(E)$, alors ${}^tId_E \in L_K(E^*)$, or $Id_{E^*} \in L_K(E^*)$, alors

$$\begin{aligned} \forall x^* \quad &\in \quad E^* : {}^tId_E(x^*) = x^* \circ Id_E = x^* = Id_{E^*}(x^*) \\ &\Longrightarrow \; {}^tId_E = Id_{E^*} \end{aligned}$$

5) On a $u \in L_K(E,F)$ et u bijective, alors $u^{-1} \in L_K(F,E)$, et on a

$$\begin{cases} u \circ u^{-1} = Id_F \\ u^{-1} \circ u = Id_E \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} {}^t(u \circ u^{-1}) = {}^tId_F \\ {}^t(u^{-1} \circ u) = {}^tId_E \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} {}^t(u^{-1}) \circ {}^t(u) = Id_{F^*} \\ {}^t(u) \circ {}^t(u^{-1}) = Id_{E^*} \end{cases}$$

Ce qui montre que ${}^tu$ est bijective et ${}^t(u^{-1}) = ({}^tu)^{-1}$. Alors ${}^tu$ est un isomorphisme de F^* sur E^*. ■

3.1.2 Lien entre application transposée et transposée d'une matrice

Théorème 3.1.4 *(Lien entre application transposée et transposée d'une matrice)*
Soient E et F des K-espaces vectoriels de dimensions finies respectives n, p, $u \in L(E,F)$, $B = (e_1, ..., e_n)$ une base de E et $C = (v_1, ..., v_p)$ une base de F. On note $B^* = (e_1^*, ..., e_n^*)$ et $C^* = (v_1^*, ..., v_p^*)$ les bases duales correspondantes.
Alors

$$\underset{C^*,B^*}{Mat}({}^t u) = {}^t \left(\underset{B,C}{Mat}(u)\right) \Longleftrightarrow \underset{B,C}{Mat}(u) = {}^t \left(\underset{C^*,B^*}{Mat}({}^t u)\right)$$

Preuve. Notons $A = \underset{B,C}{Mat}(u)$. On sait que les colonnes de A sont les coordonnées (a_{ij}) de $u(e_i)$ dans la base C. i,e

$$u(e_i) = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} v_j$$

Le but est de montrer que

$${}^t u(v_i^*) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j^*$$

Soit $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$ un élément quelconque de E. On a

$$\forall j = \overline{1,n} : e_j^*(x) = x_j$$

et

$$\begin{aligned} {}^t u(v_i^*)(x) &= v_i^* \circ u(x) = v_i^* \left(\sum_{j=1}^{n} x_j u(e_j)\right) = v_i^* \left(\sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{k=1}^{p} a_{jk} v_k\right)\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{k=1}^{p} a_{jk} v_i^*(v_k)\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j a_{ji} = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j^*(x) \end{aligned}$$

■

3.2 Orthogonalité par dualité

Définition 3.2.1 *Soit E un K-espace vectoriel et E^* son dual.*
1) $\varphi \in E^*$ *et* $x \in E$ *sont dits orthogonaux si et seulement si*

$$\varphi(x) = <\varphi, x> = 0_K$$

On dit aussi que x est orthogonal à φ ou que φ est orthogonal à x.
2) *Soit A une partie non vide de E. On appelle orthogonal de A dans E^* et on note $A^\perp$ le sous-ensemble de E^* défini par*

$$A^\perp = \{\varphi \in E^*, \forall x \in A : \varphi(x) = 0_K\}$$

$A^\perp$ est ainsi l'ensemble des formes linéaires φ s'annulant sur la partie A de E (ou : l'ensemble des φ orthogonaux à tous les éléments de A), donc les formes linéaires dont le noyau contient A.
3) *Soit A une partie non vide de E^*. On appelle orthogonal de A dans E et on note A° le sous-ensemble de E défini par*

$$A^\circ = \{x \in E, \forall \varphi \in A : \varphi(x) = 0_K\}$$

A° est donc l'ensemble des vecteurs de E communs à tous les noyaux des éléments de A (ou : l'ensemble des x orthogonaux à tous les éléments de A).

Proposition 3.2.2 *Pour toute partie A non vide de E (resp : E^*), $A^\perp$ (resp : A°) est un sous-espace vectoriel de E^* (resp : E).*

Preuve.
1) Soit A une partie non vide de E. Alors
$i)$ On a $0_{E^*} \in A^\perp$, car $\forall x \in A : 0_{E^*}(x) = 0_K$ où 0_{E^*} est la forme nulle sur K.
$ii)$ Soient $\alpha_1, \alpha_2 \in K, \varphi_1, \varphi_2 \in A^\perp$ et $\varphi \in A$, alors

$$(\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2)(x) = \alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) = \alpha_1 0_K + \alpha_2 0_K = 0_K$$

$$\Longrightarrow \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 \in A^\perp$$

2) Soit A une partie non vide de E^*. Alors
$i)$ On a $0_E \in A^\circ$, car $\forall \varphi \in A : \varphi(0_E) = 0_K$.
$ii)$ Soient $\alpha_1, \alpha_2 \in K, x_1, x_2 \in A^\circ$ et $\in A$, alors

$$\varphi(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1\varphi(x_1) + \alpha_2\varphi(x_2) = \alpha_1 0_K + \alpha_2 0_K = 0_K$$

$$\Longrightarrow \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in A^\circ$$

■

Remarque 3.2.3 *Pour $X = \phi$, on pose $X^\perp = E^*$ et pour $Y = \phi$, $Y^\circ = E$.*

Exemple 3.2.4
1) *Si E est un $K-$espace vectoriel, alors*

$$\begin{cases} E^\perp = \{\varphi \in E^*, \forall x \in E : \varphi(x) = 0_K\} = \{0_{E^*}\} \\ \{0_E\}^\perp = \{\varphi \in E^* : \varphi(0_E) = 0_K\} = E^* \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \{0_{E^*}\}^\circ = \{x \in E : 0^*(x) = 0_K\} = E \\ E^{*\circ} = \{x \in E, \forall \varphi \in E^* : \varphi(x) = 0_K\} = \{0_E\}, \text{ (d'après le corollaire (2.0.20))} \end{cases}$$

1) *0_E est orthogonal à toute forme linéaire φ de E^*. La forme linéaire nulle 0^* est orthogonale à tout vecteur x de E.*
2) *Soit E de dimension finie rapporté à une base $B_E = (e_1, ..., e_n)$ et $B^*_{E^*} = (e^*_1, ..., e^*_n)$ sa base duale dans E^*. Alors, e_i et e_j sont orthogonaux pour $i \neq j$.*
3) *Soient $E = \mathbb{R}^4$, $\varphi \in E^*$ et $\varphi(x, y, z, t) = ax + by + cz + dt$ où $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Soit $A = \{(1, 0, 0, 0), (1, 2, 3, 4)\}$. Alors*

$$\varphi \in A^\perp \Longleftrightarrow \begin{cases} \varphi(1,0,0,0) = 0 \\ \varphi(1,2,3,4) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ 2b + 3c + 4d = 0 \end{cases}$$

Proposition 3.2.5 *Soient A, B des parties non vides de E et U, V des parties non vides de E^*. Alors*
1) *Si $A \subset B$, alors $B^\perp \subset A^\perp$.*
2) *Si $U \subset V$, alors $V^\circ \subset U^\circ$.*
3) *$A^\perp = (Vect(A))^\perp, U^\circ = (Vect(U))^\circ$.*
4) *$A \subset \left(A^\perp\right)^\circ$, $U \subset (U^\circ)^\perp$.*
5) *$(A \cup B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp, (U \cup V)^\circ = U^\circ \cap V^\circ$.*

Preuve.
1) Soit $\varphi \in B^\perp$, alors

$$\begin{aligned} \varphi \quad \in \quad & B^\perp \Longrightarrow \forall b \in B : \varphi(b) = 0 \\ \Longrightarrow \quad & \forall a \in A (A \subset B) : \varphi(a) = 0 \\ \Longrightarrow \quad & \varphi \in A^\perp \end{aligned}$$

2) Soit $x \in V^\circ$, alors

$$\begin{aligned} x &\in V^\circ \Longrightarrow \forall \varphi \in V : \varphi(x) = 0 \\ &\Longrightarrow \forall \varphi \in U (U \subset V) : \varphi(x) = 0 \\ &\Longrightarrow x \in U^\circ \end{aligned}$$

3) On sait que $Vect(A)$ est le plus petit s-ev de E contenant A, alors

$$A \subset Vect(A) \Longrightarrow (Vect(A))^\perp \subset A^\perp$$

D'autre part, on sait que $Vect(A)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires finies d'éléments de A. Désignons par $(a_i)_{i=\overline{1,n}}$ la famille des éléments de A.
Soit $\varphi \in A^\perp$ et soit $x \in Vect(A)$, alors

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i, a_i \in A, \forall i = \overline{1,n} \text{ et } \alpha_i \in K, \forall i = \overline{1,n}$$

On trouve

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi(a_i), \varphi(a_i) = 0 \\ &= 0 \\ &\Longrightarrow \varphi \in (Vect(A))^\perp \end{aligned}$$

Il est clair que

$$U \subset Vect(U) \Longrightarrow (Vect(U))^\circ \subset U^\circ$$

Désignons par $(f_i)_{i=\overline{1,n}}$ la famille des éléments de U.
Soit $x \in U^\circ$ et soit $\varphi \in Vect(U)$, alors

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i, f_i \in U, \forall i = \overline{1,n} \text{ et } \alpha_i \in K, \forall i = \overline{1,n}$$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \varphi(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i\right)(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x), f_i(x) = 0, \forall i = \overline{1,n} \\ &\Longrightarrow \varphi(x) = 0 \\ &\Longrightarrow x \in (Vect(U))^\circ \end{aligned}$$

4) On a

$$\left(A^{\perp}\right)^{\circ}=\left\{x \in E, \forall \varphi \in A^{\perp}: \varphi(x)=0\right\}$$

Soit $x \in A$, alors

$$x \in\left(A^{\perp}\right)^{\circ} \Longleftrightarrow \varphi(x)=0, \forall \varphi \in A^{\perp}$$

Soit $\varphi \in A^{\perp}$, or $x \in A$, alors

$$\varphi(x)=0$$

Donc $x \in\left(A^{\perp}\right)^{\circ}$.

D'autre part, on a

$$\left(U^{\circ}\right)^{\perp}=\left\{\varphi \in E^{*}, \forall x \in U^{\circ}: \varphi(x)=0\right\}$$

Soit $\varphi \in U$, alors

$$\varphi \in\left(U^{\circ}\right)^{\perp} \Longleftrightarrow \varphi(x)=0, \forall \varphi \in U^{\circ}$$

Soit $x \in U^{\circ}$, or $\varphi \in U$, alors

$$\varphi(x)=0$$

Donc $\varphi \in\left(A^{\circ}\right)^{\perp}$.

5) i) On a

$$\left\{\begin{array}{l} A \in A \cup B \\ B \in A \cup B \end{array} \Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} (A \cup B)^{\perp} \subset A^{\perp} \\ (A \cup B)^{\perp} \subset B^{\perp} \end{array} \Longrightarrow(A \cup B)^{\perp} \subset A^{\perp} \cap B^{\perp}\right.\right.$$

D'autre part, soit $x \in A \cup B$ et $\varphi \in A^{\perp} \cap B^{\perp}$, alors

$$\left\{\begin{array}{l} x \in A \\ ou \\ x \in B \end{array} \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} \varphi \in A^{\perp} \\ et \\ \varphi \in B^{\perp} \end{array} \Longrightarrow \varphi(x)=0\right.\right.$$

$$\begin{aligned} & \Longrightarrow \quad \varphi \in(A \cup B)^{\perp} \\ & \Longrightarrow \quad A^{\perp} \cap B^{\perp} \subset(A \cup B)^{\perp} \end{aligned}$$

ii) On a

$$\left\{\begin{array}{l} U \in U \cup V \\ V \in U \cup V \end{array} \Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} (U \cup V)^{\circ} \subset U^{\circ} \\ (U \cup V)^{\circ} \subset V^{\circ} \end{array} \Longrightarrow(U \cup V)^{\circ} \subset U^{\circ} \cap V^{\circ}\right.\right.$$

Soient $\varphi \in U \cup V$ et $x \in U^\circ \cap V^\circ$, alors

$$\left\{\begin{array}{c} \varphi \in U \\ ou \\ \varphi \in V \end{array}\right. \Longrightarrow \varphi(x) = 0$$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \quad x \in (U \cup V)^\circ \\ &\Longrightarrow \quad U^\circ \cap V^\circ \subset (U \cup V)^\circ \end{aligned}$$

■

3.2.1 Dimension de l'orthogonal

Théorème 3.2.6 *Soit E un $K-$espace vectoriel de dimension finie. Alors*
1) *Si H est un sous espace vectoriel de E, alors* $\dim H + \dim H^\perp = \dim E$.
) *Si H est un sous espace vectoriel de E^*, alors* $\dim H + \dim H^\circ = \dim E^*$.

Preuve.
1) Posons $\dim E = n$ et $\dim H = p, p \leq n$. Soit $B_H = (e_1, ..., e_p)$ une base de H, alors d'après le théorème de la base incomplète, $\exists B_E = (e_1, ..., e_p, e_{p+1}, ..., e_n)$ base de E. Donc $\exists B^*_{E^*} = (e^*_1, ..., e^*_p, e^*_{p+1}, ..., e^*_n)$ base de E^* duale de B_E.
On a

$$H^\perp = \{\varphi \in E^*, \forall x \in H : \varphi(x) = 0\}$$

est un s-ev de E^*. Alors $(e^*_{p+1}, ..., e^*_n)$ est une base de $H^\perp$. En effet :
On a $e^*_i \in H^\perp, \forall i = \overline{p+1, n}$, car pour $x \in H$, on a

$$e^*_i(x) = e^*_i\left(\sum_{j=1}^{p} \alpha_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j e^*_i(e_j) = 0$$

Car

$$e^*_i(e_j) = 0, \forall j \neq i$$

Donc

$$Vect(e^*_{p+1}, ..., e^*_n) \subset H^\perp$$

Montrons que

$$H^\perp \subset Vect(e^*_{p+1}, ..., e^*_n)$$

Soit $\varphi \in H^{\perp} \subset E^*$, $\varphi = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j^*$, alors

$$\forall i = \overline{1,p} : \varphi(e_i) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j^*(e_i) = \lambda_i e_i^*(e_i) = \lambda_i$$

Or $\varphi(e_i) = 0$, car $e_i \in H$ et $\varphi \in H^{\perp}$, alors

$$\lambda_i = 0_K, \forall i = \overline{1,p}$$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \quad \varphi = \sum_{j=p+1}^{n} \lambda_j e_j^* \in Vect(e_{p+1}^*, ..., e_n^*) \\ &\Longrightarrow \quad H^{\perp} \subset Vect(e_{p+1}^*, ..., e_n^*) \end{aligned}$$

On obtient

$$H^{\perp} = Vect(e_{p+1}^*, ..., e_n^*)$$

Or $(e_{p+1}^*, ..., e_n^*)$ est libre dans E^* car $B_{E^*}^*$ est une base de E^*, alors $(e_{p+1}^*, ..., e_n^*)$ est une base de $H^{\perp}$.

$$\Longrightarrow \dim H^{\perp} = n - p = \dim E - \dim H$$

2) Posons $\dim E^{**} = \dim E^* = \dim E = n$, et $\dim H = p$.
Soit $B_H = \left(e_1^*, ..., e_p^*\right)$ une base de H sev de E^*, alors $\exists B_{E^*} = (e_1^*, ..., e_p^*, e_{p+1}^*, ..., e_n^*)$ base de E^*. Donc $\exists B_{E^{**}} = (f_1, ..., f_n)$ base de E^{**} duale de B_{E^*}.
Or

$$J : E \longrightarrow E^{**}, J(x) = x^{**}, \forall x \in E$$

est un isomorphisme d'ev. Alors

$$\exists v_i \in E : J(v_i) = f_i = v_i^{**}, i = \overline{1,n}$$

Donc $B_E = (v_1, ..., v_n)$ est une base de E, car B_E est une partie libre maximale de E.
B_{E^*} est duale de B_E car

$$e_i^*(v_j) = v_j^{**}(e_i^*) = f_j(e_i^*) = \begin{cases} 1_K, \text{ si } i = j \\ 0_K, \text{ si } i \neq j \end{cases}, j = \overline{1,n}$$

On obtient

$$H^{\circ} = \{x \in E, \forall \varphi \in H : \varphi(x) = 0\}$$

est un s-ev de E.
Montrons que $(v_{p+1}, ..., v_n)$ est une base de H°.
$i)$ On a $v_j \in H^\circ, \forall j = \overline{p+1, n}$, car pour $\varphi \in H$, on a

$$\varphi = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_i^*$$

$$\Longrightarrow \varphi(v_j) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_i^*(v_j) = 0_K, \text{ car } e_i^*(v_j) = 0_K, \forall j \neq i$$

$$\Longrightarrow Vect(v_{p+1}, ..., v_n) \subset H^\circ$$

Montrons que

$$H^\circ \subset Vect(v_{p+1}, ..., v_n)$$

Soit $x \in H^\circ \subset E$, alors

$$x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j$$

$$\Longrightarrow \forall i = \overline{1, p} : e_i^*(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_i(v_j) = \alpha_i e_i^*(v_i) = \alpha_i = 0, \text{ car } e_i^* \in H$$

$$\Longrightarrow x = \sum_{j=p+1}^{n} \alpha_j v_j \in Vect(v_{p+1}, ..., v_n)$$

$$\Longrightarrow H^\circ \subset Vect(v_{p+1}, ..., v_n)$$

$$\Longrightarrow H^\circ = Vect(v_{p+1}, ..., v_n)$$

Or $(v_{p+1}, ..., v_n)$ est libre car B_E est une base de E. On obtient

$$\dim H^\circ = n - p = \dim E - \dim H$$

■

3.2.2 Comparaison entre certains sous-espaces

Corollaire 3.2.7 *Soit E un $K-$espace vectoriel de dimension finie. Alors*
1) *Si H est un sous espace vectoriel de E, alors $\left(H^\perp\right)^\circ = H$.*
2) *Si H est un sous espace vectoriel de E^*, alors $(H^\circ)^\perp = H$.*

Preuve.
1) On sait déjà que
$$H \subset \left(H^{\perp}\right)^{\circ}$$
D'autre part, on a H est un sous espace vectoriel de E, alors
$$\begin{cases} \dim H + \dim H^{\perp} = \dim E \\ \dim H^{\perp} + \dim \left(H^{\perp}\right)^{\circ} = \dim E^{*} \end{cases} \Longrightarrow \dim H = \dim \left(H^{\perp}\right)^{\circ}$$
Or H est un s-ev de $\left(H^{\perp}\right)^{\circ}$, alors $H = \left(H^{\perp}\right)^{\circ}$.
2) On sait déjà que
$$H \subset (H^{\circ})^{\perp}$$
D'autre part, on a H est un sous espace vectoriel de E^{*}, alors
$$\begin{cases} \dim H + \dim H^{\circ} = \dim E^{*} \\ \dim H^{\circ} + \dim (H^{\circ})^{\perp} = \dim E \end{cases} \Longrightarrow \dim H = \dim (H^{\circ})^{\perp}$$
Or H est un sev de $(H^{\circ})^{\perp}$, alors $H = (H^{\circ})^{\perp}$. ■

Théorème 3.2.8 *Soit $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire, alors*
$$\ker({}^{t}u) = (\mathrm{Im}(u))^{\perp}$$

Preuve. On a $u \in L_K(E, F)$, alors ${}^{t}u \in L_K(F^{*}, E^{*})$.
On a
$$\ker({}^{t}u) = \left\{y^{*} \in F^{*} :^{t} u(y^{*}) = 0_{E^{*}}\right\} = \{y^{*} \in F^{*} : y^{*} \circ u = 0_{E^{*}}\}$$
et
$$\begin{aligned} (\mathrm{Im}\, u)^{\perp} &= \{y^{*} \in F^{*} : y^{*}(u(x)) = 0_K, \forall u(x) \in \mathrm{Im}\, u\} = \{y^{*} \in F^{*} : (y^{*} \circ u)(x) = 0_K, \forall x \in E\} \\ &= \{y^{*} \in F^{*} : y^{*} \circ u = 0_{E^{*}}\} = \ker({}^{t}u) \end{aligned}$$

■

Théorème 3.2.9 *Soient E, F deux $K-$espaces vectoriels de dimension finie et $u \in L_K(E, F)$ alors*
$$rg({}^{t}u) = rg(u)$$

Preuve. On a $u \in L_K(E,F)$, alors ${}^t u \in L_K(F^*, E^*)$.
On obtient

$$\begin{aligned} rg({}^t u) &= \dim \mathrm{Im}({}^t u) \\ rg(u) &= \dim \mathrm{Im}(u) \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{cases} rg({}^t u) + \dim \ker({}^t u) = \dim F^* = \dim F \\ (rg(u) = \dim \mathrm{Im}\, u) + \dim (\mathrm{Im}\, u)^{\perp} = \dim F, \text{ (d'après le corollaire (3.2.7))} \end{cases}$$

Or $\ker({}^t u) = (\mathrm{Im}(u))^{\perp}$, alors

$$rg({}^t u) + \dim (\mathrm{Im}(u))^{\perp} = \dim F$$

$$\Longrightarrow \dim (\mathrm{Im}(u))^{\perp} = \dim \ker({}^t u)$$

$$\Longrightarrow rg({}^t u) = rg(u)$$

■

Théorème 3.2.10 *Soient F, G deux sous espaces vectoriels de E, $K-$espcae vectoriel de dimension finie, alors*
1) $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$ *et* $(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$
2) *Si $E = F \oplus G$, alors $E^* = F^{\perp} \oplus G^{\perp}$.*

Preuve.
1) $i)$ On sait que $F + G = Vect(F \cup G)$, alors

$$(F+G)^{\perp} = (Vect(F \cup G))^{\perp} = (F \cup G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$$

$ii)$ Montrons que $F^{\perp} + G^{\perp} \subset (F \cap G)^{\perp}$.
Soit $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \in F^{\perp} + G^{\perp}$. Alors

$$\varphi_1 + \varphi_2 \in (F \cap G)^{\perp} \Longleftrightarrow (\varphi_1 + \varphi_2)(x) = 0, \forall x \in F \cap G$$

Soit $x \in F \cap G$, alors $x \in F$ et $x \in G$ or $\varphi_1 \in F^{\perp}, \varphi_2 \in G^{\perp}$. Donc

$$\varphi_1(x) = 0 \text{ et } \varphi_2(x) = 0$$

$$\Longrightarrow (\varphi_1 + \varphi_2)(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) = 0 + 0 = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \varphi \in (F \cap G)^{\perp}$$
$$\Longrightarrow \quad F^{\perp} + G^{\perp} \subset (F \cap G)^{\perp}$$

D'autre part, on a

$$\dim(F^{\perp} + G^{\perp}) = \dim(F^{\perp}) + \dim(G^{\perp}) - \dim(F^{\perp} \cap G^{\perp}), (F + G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad & \dim(F^{\perp} \cap G^{\perp}) = \dim(F+G)^{\perp} = \dim E - \dim(F+G), \text{ (d'après le théorème (3.2.6))} \\ = \quad & \dim E - \dim F - \dim G + \dim(F \cap G) = \dim F^{\perp} - \dim G + \dim(F \cap G) \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \dim(F^{\perp} \cap G^{\perp}) = \dim F^{\perp} - \dim G + \dim(F \cap G)$$

On obtient

$$\begin{aligned} \dim(F^{\perp} + G^{\perp}) &= \dim(F^{\perp}) + \dim(G^{\perp}) - \big(\dim F^{\perp} - \dim G + \dim(F \cap G)\big) = \dim E - \dim(F \cap G) \\ &= \dim\,(F \cap G)^{\perp} \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \dim(F^{\perp} + G^{\perp}) = \dim\,(F \cap G)^{\perp}$$

Or $F^{\perp} + G^{\perp}$ est un s-ev de $(F \cap G)^{\perp}$, alors $F^{\perp} + G^{\perp} = (F \cap G)^{\perp}$.
2) On sait que

$$E^* = F^{\perp} \oplus G^{\perp} \Longleftrightarrow \begin{cases} F^{\perp} \cap G^{\perp} = \{0_{E^*}\} \\ et \\ F^{\perp} + G^{\perp} = E^* \end{cases}$$

j) On a
$$F^{\perp} + G^{\perp} = (F \cap G)^{\perp} = \{0_E\}^{\perp} = E^*$$

jj) On a
$$F^{\perp} \cap G^{\perp} = (F + G)^{\perp} = E^{\perp} = \{0_{E^*}\}$$

Alors $E^* = F^{\perp} \oplus G^{\perp}$. ■

Théorème 3.2.11 *Soient E et F deux $K-$espaces vectoriels de dimensions finies. Alors*
1) *Si $u \in L_K(E, F)$, alors* $\mathrm{Im}({}^t u) = (\ker u)^{\perp}$.
2) *Si $u \in L_K(E)$, alors* $\dim(\ker({}^t u)) = \dim(\ker u)$.

Preuve.
Soit $u : E \longrightarrow F$, alors ${}^t u : F^* \longrightarrow E^*$, ${}^t u(y^*) = y^* \circ u$.
1) Montrons que
$$\mathrm{Im}({}^t u) \subset (\ker u)^{\perp}$$

Soit ${}^t u(y^*) \in \mathrm{Im}({}^t u)$, alors
$$ {}^t u(y^*) = y^* \circ u $$
On a
$$ {}^t u(y^*) \in (\ker u)^\perp \Longleftrightarrow (y^* \circ u)(x) = 0_K, \forall x \in \ker u $$
Soit $x \in \ker u$, alors
$$ (y^* \circ u)(x) = y^*(u(x)) = y^*(0_F) = 0_K $$
$$ \Longrightarrow^t u(y^*) \in (\ker u)^\perp $$
On obtient
$$ \mathrm{Im}({}^t u) \subset (\ker u)^\perp $$
D'autre part, on a
$$ \dim(\mathrm{Im}({}^t u)) = rg({}^t u) = rg(u) = \dim E - \dim(\ker u) = \dim(\ker u)^\perp $$
Comme $\mathrm{Im}({}^t u)$ est un sous espace vectoriel et $\dim(\mathrm{Im}({}^t u)) = \dim(\ker u)^\perp$, alors
$$ \mathrm{Im}({}^t u) = (\ker u)^\perp $$
2) Si $u \in_K (E)$, alors
$$ \dim E^* = \dim(\ker^t u) + rg({}^t u) = \dim(\ker^t u) + rg(u) $$
$$ \Longrightarrow \dim(\ker^t u) = \dim E^* - rg(u) = \dim E - rg(u) = \dim(\ker u) $$
$$ \dim(\ker^t u) = \dim \ker u $$
■

Proposition 3.2.12 *Pour toute partie non vide Y de E^*, on a*
$$ Y^\circ = \bigcap_{\varphi \in Y} \ker \varphi $$
Preuve. On a
$$ x \in Y^\circ \Longleftrightarrow \forall \varphi \in Y : \varphi(x) = 0 \Longleftrightarrow \forall \varphi \in Y : x \in \ker \varphi $$
■

Proposition 3.2.13 *Soit E un $K-$espace vectoriel de dimension n. Alors $(\varphi_i)_{i=\overline{1,n}}$ est une base de E^* si et seulement si $\bigcap_{i=1}^{n} \ker \varphi_i = \{0_E\}$.*

Preuve. Dire que $(\varphi_i)_{i=\overline{1,n}}$ est une base de E^* équivaut à dire que $E^* = Vect(\varphi_1, ..., \varphi_n)$. D'après la proposition précédente, on obtient

$$(E^*)^\circ = (Vect(\varphi_1, ..., \varphi_n))^\circ \Longleftrightarrow \{0_E\} = (Y = (\varphi_1, ..., \varphi_n))^\circ = \bigcap_{i=1}^{n} \ker \varphi_i$$

Réciproquement si $\bigcap_{i=1}^{n} \ker \varphi_i = \{0_E\}$, alors

$$Vect(\varphi_1, ..., \varphi_n) = ((Vect(\varphi_1, ..., \varphi_n))^\circ)^\perp = \left(\bigcap_{i=1}^{n} \ker \varphi_i\right)^\perp = \{0_E\}^\perp = E^*$$

■

3.2.3 Espace stable et dualité en dimension finie

Proposition 3.2.14 *(Dualité et stabilité)*
Soient E un K-espace vectoriel, u un endomorphisme de E et F un sous-espace vectoriel de E. Alors, F est stable par u si et seulement si $F^\perp$ est stable par ${}^t u$.

Preuve.
$i)$ On sait que $F^\perp$ est stable par ${}^t u$ si et seulement si $\forall \varphi \in F^\perp :{}^t u(\varphi) \in F^\perp$.
Supposons que F est stable par u. Alors pour $\varphi \in F^\perp$, on a

$$\forall x \in F :<{}^t u(\varphi), x >=< \varphi, u(x) >= 0, \text{ car } u(x) \in F \text{ et } \varphi \in F^\perp$$

Donc ${}^t u(\varphi) \in F^\perp$ et par suite, $F^\perp$ est stable par ${}^t u$.
$ii)$ Supposons que $F^\perp$ est stable par ${}^t u$. Alors pour $x \in F$, on a

$$\forall \varphi \in F^\perp :<{}^t u(\varphi), x >= 0 \text{ car } {}^t u(\varphi) \in F^\perp$$

$$\Longrightarrow \forall \varphi \in F^\perp :< \varphi, u(x) >= 0$$

$$\Longrightarrow u(x) \in \left(F^\perp\right)^\circ, \left(F^\perp\right)^\circ = F$$

$$\Longrightarrow u(x) \in F$$

Donc F est stable par u. ■

Bibliographie

[1] C. Antonini, J.-F. Quint,P. Borgnat, J. Bérard, E. Lebeau, E. Souche, A. Château, O. Teytaud. *Les Mathématiques pour l'Agrégation*. 21 mai 2002.
bib.tiera.ru/b/83221

[2] Guy Auliac, Jean Delcourt, Rémy Goblot. *Mathématiques, algèbre et géométrie*. Dunod, Paris, 2005.

[3] François Liret, Dominique Martinais. *Algèbre et géométrie 2ème année, cours et exercices avec solutions*. Paris. Dunod, 2002.

[4] Jean-François Havet. *Algèbre bilinéaire et géométrie euclidienne*. Licence de Sciences et Technologies Université d'Orléans, Département de Mathématiques, France. Janvier 2013.
www.univ-orleans.fr/mapmo/membres/.../bilineaire/Havet_2013.pdf

[5] Marc SAGE. *Dualité en dimension finie*. 24 octobre 2005.
www.normalesup.org/~sage/Cours/DualDimFinie.pdf

[6] Mohamed HOUIMDI. *Algèbre bilinéaire*. Université Cadi Ayyad Faculté des Scieces-Semlalia. Département de Mathématiques.
www.fssm.ucam.ac.ma/biblioadmin/opac.../algebre-bilineaire_V-2013.pdf

[7] M-Renée FLEURY-DONNADIEU, Richard ZEKRI. *Licence Mathématiques-Informatique L2*. Université de la Méditerranée. Faculté des Sciences de Luminy. Département de Mathématiques. Janvier 2005. lumimath.univ-mrs.fr/infoetudiant/MAT5.pdf

[8] Salah Gourari. Algèbre linéaire, cours et exercices résolus. OPU 1993.