

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
République Algérienne Démocratique et Populaire  
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



N° Réf :.....

## Centre Universitaire de Mila

Institut des Sciences et de la Technologie

Département de Mathématique et Informatique

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de Licence

En Filière: *Mathématiques Fondamentales*

# Calcul numérique des valeurs propres

Préparé par : *Bounamous Saida*  
*Guettiche Hayat*  
*Lemoui Madjida*

Encadré par : *Halim Yacine*  
Grade: *M. A. A*

Année universitaire : 2013/2014

---

# TABLE DES MATIÈRES

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Valeurs propres</b>	<b>3</b>
1.1 Valeurs et vecteurs propres . . . . .	4
1.1.1 Les sous espaces propres d'une matrice . . . . .	5
1.2 Polynôme caractéristique d'un endomorphisme . . . . .	9
1.3 Calculer les valeurs propres . . . . .	13
<b>2 Méthodes numériques pour calculer les valeurs propres</b>	<b>16</b>
2.1 Les méthodes partielles . . . . .	16
2.1.1 La méthode de la puissance . . . . .	16
2.2 Les méthodes globales . . . . .	25
2.2.1 Méthode LR de Rutishauser . . . . .	25
2.2.2 Méthode QR de Francis . . . . .	33
2.2.3 Méthode de Jacobi . . . . .	38
<b>3 Applications des valeurs propres</b>	<b>44</b>
3.1 Mouvement de ressorts . . . . .	44
3.1.1 Calculer les valeurs propres . . . . .	46
3.2 Dynamique de population . . . . .	49

*Table des matières*

---

3.2.1	Calculer les valeurs propres . . . . .	51
	<b>Bibliographie</b>	<b>56</b>

---

# INTRODUCTION

La connaissance des valeurs et des vecteurs propres offre une information clé sur l'application linéaire.

Les algorithmes se développent pour permettre la détermination des valeurs propres par des mathématiciens comme I. Schur, A. Krylov, W.E. Arnoldi et N. Dunford, et dans le cas général le plus étudié, les valeurs propres ouvrent un chemin face à une branche importante qui est l'analyse fonctionnelle tout au long du vingtième siècle. Alors la théorie des valeurs propres est généralisée à la théorie spectrale.

Les valeurs propres sont des outils essentiels à la résolution des problèmes mathématiques qui sont en particulier l'analyse, des équations différentielles ou les équations aux dérivées partielles.

Ce mémoire est partagé en trois chapitres.

Dans le premier chapitre, on calcule les valeurs propres et les vecteurs propres d'une matrice. Les valeurs propres d'une matrice sont des racines de polynôme caractéristique. Un certain nombre de méthodes anciennes forment le polynôme caractéristique et déterminent ses zéros. Ces méthodes sont abandonnées, car, en l'absence d'hypothèses supplémentaires sur la matrice, elles sont lentes et instables (recherche des racines).

## *Introduction*

---

En suite, dans le deuxième chapitre on utilise les méthodes numériques pour calculer les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices d'ordres supérieurs.

Enfin, dans le troisième chapitre nous donner quelques applications en physique et en biologie.

---

---

# CHAPITRE 1

---

## VALEURS PROPRES

Dans ce chapitre, nous expliquons comment calculer les valeurs propres et les vecteurs propres d'une matrice. Les valeurs propres d'une matrice est la solution de l'équation caractéristique  $\det(A - \lambda I) = 0$ . Si  $A$  et  $I$  sont de taille  $n \times n$ , les valeurs propres sont donc la solution de l'équation polynômiale :  $(-1)^n (\lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \dots + p_{n-1} \lambda + p_n) = 0$  appelé polynôme caractéristique de degré  $n$ .

Dans tout le chapitre  $\mathbb{k}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  telle que  $\mathbb{k}$  un corps commutatif.

- On note  $\mathcal{L}(E)$  est l'algèbre des endomorphisme de  $E$ .
- $M_n(\mathbb{k})$  est l'algèbre des matrices carrées d'ordre  $n$  à coefficients dans  $\mathbb{k}$ .
- Soit  $A \in M_n(\mathbb{k})$ .

## 1.1 Valeurs et vecteurs propres

• Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$  dans  $E$ , et soit  $A = \text{Mat}_B(f)$  la matrice associée à  $f$  dans la base  $B$  de  $E$ .

**Définition 1.1.1** Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ , et soit  $\lambda \in \mathbb{k}$ . On dit que  $\lambda$  est valeur propre de  $f$  s'il existe un vecteur non nul  $X \in E$  telle que

$$f(X) = \lambda X.$$

- Le vecteur  $X$  est dit vecteur propre associé à  $\lambda$ .
- On appelle le spectre de  $f$  noté  $\text{sp}(f)$  l'ensemble des valeurs propres de  $f$ .

**Remarque 1.1.1** Le nombre des valeurs propres distinctes d'un endomorphisme est toujours  $\leq \dim E$ .

**Théorème 1.1.2** Si  $f$  un endomorphisme sur  $E$  de dimension finie sur  $\mathbb{k}$ , alors  $\lambda$  est une valeur propre de  $f$  associé au vecteur propre  $X$  si et seulement si  $\lambda$  est une valeur propre de la matrice  $\text{Mat}(f)$  par rapport à n'importe base de  $E$ .

**Proposition 1.1.1** La valeur propre associée à un vecteur propre est unique.

**Preuve.** Soit  $X$  un vecteur propre.

Supposons qu'il existe deux valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  distinctes associées, donc

$$AX = \lambda_1 X, \tag{1.1}$$

$$AX = \lambda_2 X. \tag{1.2}$$

De (1.1) et (1.2)

$$AX - AX = \lambda_1 X - \lambda_2 X.$$

Alors

$$\lambda_1 X - \lambda_2 X = 0_E.$$

Donc

$$\lambda_1 - \lambda_2 = 0_E, (\text{car } X \neq 0).$$

D'où

$$\lambda_1 = \lambda_2.$$

Contradiction.

Alors la valeur propre associée à un vecteur propre est unique. ■

### 1.1.1 Les sous espaces propres d'une matrice

**Définition 1.1.2** Soit  $A \in M_n(\mathbb{k})$ . Les sous espaces propres de  $A$  associés à la valeur propre  $\lambda$  est définie par

$$E_\lambda = \{X \in M_n(\mathbb{k}) : AX = \lambda X\}.$$

**Proposition 1.1.2** Soit  $A \in M_n(\mathbb{k})$  et soit  $X$  un vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda$ , alors tout vecteur de la forme  $kX$  est aussi un vecteur propre de  $A$  associé à  $\lambda$ .

**Preuve.** Supposons que  $X$  est un vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda$ , c'est-à-dire

$$AX = \lambda X. \tag{1.3}$$

On multiplie (1.3) par  $k$  ( $k \in \mathbb{k}$ )

$$kAX = k\lambda X.$$

Donc

$$A(kX) = \lambda(kX).$$

Donc  $kX$  est un vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda$ . ■

**Théorème 1.1.3** Soient  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  des valeurs propres distinctes de  $A$ , si  $X_i$  est vecteur

propre de  $A$  pour la valeur propre  $\lambda_i$ , alors les vecteurs propres  $X_1, X_2, \dots, X_k$  sont linéairement indépendants.

**Preuve.** Soient  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  des valeurs propres de  $A$ , supposons que  $X_i$  est vecteur propre de  $A$  pour la valeur propre  $\lambda_i, \forall i = 1, 2, \dots, k$ .

Nous allons montrer par récurrence sur  $k$  que

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i X_i = 0 \implies \alpha_i = 0, \forall i = 1, 2, \dots, k,$$

avec  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{k}$ .

C'est vrai pour  $k = 1$ , puisque par définition un vecteur propre est nécessairement non nul. Supposons la propriété est vraie à l'ordre  $k - 1$ . Soient  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  des valeurs propres distinctes deux à deux et  $X_1, X_2, \dots, X_k$  des vecteurs propres associés.

Supposons

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i X_i = 0 \iff \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i X_i = -\alpha_k X_k.$$

On multipliant à gauche par la matrice  $A$ , on obtient

$$\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i \lambda_i X_i = -\alpha_k \lambda_k X_k,$$

mais on a aussi

$$\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i \lambda_k X_i = -\alpha_k \lambda_k X_k.$$

Soit en soustrayant les deux équations

$$\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i (\lambda_i - \lambda_k) X_i = 0.$$

D'après l'hypothèse de récurrence à l'ordre  $k - 1$ , ceci entraîne que pour tout  $i = 1, 2, \dots, k - 1$ ,  $\alpha_i (\lambda_i - \lambda_k) = 0$ , donc  $\alpha_i = 0$ , puisque  $\lambda_i \neq \lambda_k$ . Mais alors nécessairement  $\alpha_k X_k$  est nul, donc  $\alpha_k = 0$  puisque le vecteur propre  $X_k$  est non nul.

Alors les vecteurs propres  $X_1, X_2, \dots, X_k$  sont linéairement indépendants. ■

**Proposition 1.1.3** *Si  $\lambda$  est une valeur propre de la matrice  $A$ , alors  $\lambda^k$  est une valeur propre de  $A^k$ .*

**Preuve.** Supposons que  $\lambda$  est une valeur propre de  $A$  et  $X$  le vecteur propre associé.  
Alors

$$AX = \lambda X. \tag{1.4}$$

On multipliant les deux cotés de l'équation (1.4),  $k - 1$  fois, par la matrice  $A$ , on obtient

$$A^k X = \lambda^k X.$$

Donc  $\lambda^k$  est une valeur propre de la matrice  $A^k$ . ■

**Proposition 1.1.4** *Soit  $X$  un vecteur propre de  $f$  pour la valeur propre  $\lambda$ , et soit  $P \in \mathbb{k}[X]$ , alors  $X$  est vecteur propre de  $P(f)$  pour la valeur propre  $P(\lambda)$ .*

**Preuve.** Soit  $X$  un vecteur propre de  $f$  pour la valeur propre  $\lambda$ .

$$f(X) = \lambda X.$$

Soit  $P$  un polynôme quelconque de  $\mathbb{k}[X]$ .

Écrivons

$$P = \sum_{k=0}^p a_k X^k.$$

D'après la proposition précédent on a  $\lambda^k$  est une valeur propre de  $f^k$ , donc

$$\begin{aligned} P(f)(X) &= \sum_{k=0}^p a_k f^k(X) \\ &= \sum_{k=0}^p a_k \lambda^k X \\ &= \left( \sum_{k=0}^p a_k \lambda^k \right) X \\ &= P(\lambda) X. \end{aligned}$$

Donc  $X$  est vecteur propre de  $P(f)$  pour la valeur propre  $P(\lambda)$ . ■

**Proposition 1.1.5** Soit  $A \in M_n(\mathbb{k})$  une matrice inversible et  $\lambda \in \mathbb{k}$  une valeur propre de  $A$ , alors  $\lambda^{-1}$  est une valeur propre de  $A^{-1}$ .

**Preuve.** Supposons que  $\lambda$  est une valeur propre de  $A$  et  $X$  le vecteur propre associé.  
Alors

$$AX = \lambda X.$$

Donc

$$X = A^{-1}(\lambda X).$$

Par linéarité de l'application associé à la matrice  $A$  nous avons

$$X = \lambda A^{-1}X.$$

Ainsi

$$\lambda^{-1}X = A^{-1}X.$$

Alors  $\lambda^{-1}$  est une valeur propre de  $A^{-1}$ . ■

## 1.2 Polynôme caractéristique d'un endomorphisme

**Définition 1.2.1** Soit  $f$  un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie, et  $A = M_B(f)$ . On appelle polynôme caractéristique de  $f$  et on note  $P_f(\lambda)$ , le polynôme

$$P_f(\lambda) = P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n),$$

où  $I_n$  est la matrice unité.

**Proposition 1.2.1**  $\lambda$  valeur propre de  $f$  si et seulement si  $(f - \lambda Id_E)$  n'est pas injective.

**Preuve.**  $\lambda$  valeur propre de  $f$

$$\iff \exists X \in E, X \neq 0_E \quad f(X) = \lambda X,$$

$$\iff \exists X \neq 0_E \quad f(X) - \lambda X = 0,$$

$$\iff \exists X \neq 0_E \quad (f - \lambda Id_E)(X) = 0,$$

$$\iff X \in \ker(f - \lambda Id_E),$$

$$\iff \ker(f - \lambda Id_E) \neq \{0_E\}.$$

Alors  $(f - \lambda Id_E)$  n'est pas injective. ■

**Remarque 1.2.1**  $A$  et sa transposée  $A^t$  ont même polynôme caractéristique.

**Proposition 1.2.2** Soit  $A$  la matrice de  $f$  dans une base de  $E$ . Si la matrice  $A$  est triangulaire supérieur ou inférieur, alors les valeurs propres de  $f$  sont les coefficients diagonaux de  $A$ .

**Preuve.** Supposons que  $A$  est triangulaire et notons  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ses coefficients diagonaux. Puisque la matrice  $\lambda I_n$  est diagonale,  $A - \lambda I_n$  est triangulaire et ses coefficients diagonaux sont les  $a_i - \lambda_i$ .

Le déterminant d'une matrice triangulaire étant le produit de ses coefficients diagonaux,

on a

$$\begin{aligned} P(A) &= \det(A - \lambda I_n) \\ &= (a_1 - \lambda_1)(a_2 - \lambda_2) \dots (a_n - \lambda_n) = 0. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{cases} a_1 - \lambda_1 = 0. \\ a_2 - \lambda_2 = 0. \\ \vdots \\ a_n - \lambda_n = 0. \end{cases} \implies \begin{cases} \lambda_1 = a_1. \\ \lambda_2 = a_2. \\ \vdots \\ \lambda_n = a_n. \end{cases}$$

Donc les valeurs propres de  $f$  sont les coefficients diagonaux  $a_1, a_2, \dots, a_n$  de  $A$ . ■

**Remarque 1.2.2** Il y'a plusieurs manières pour calculer les polynômes caractéristiques par exemple

• *Méthode de Leverrier :*

La méthode de Leverrier utilise la trace matricielle pour calculer le polynôme caractéristique.

$$P(\lambda) = (-1)^n (\lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + p_2 \lambda^{n-2} + \dots + p_{n-1} \lambda + p_n).$$

Notons  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres de  $P$  (non nécessairement distinctes).

$$P(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \dots (\lambda_n - \lambda).$$

En posant, pour  $k = 1, 2, \dots, n$ .

$$S_k = \text{tr}(A^k) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k.$$

Les valeurs  $p_k$  des coefficients du polynôme caractéristique sont données par les formules de

Newton

$$\left\{ \begin{array}{l} -p_1 = s_1 \\ -2p_2 = s_2 + p_1s_1 \\ \vdots \\ -k p_k = s_k + p_1s_{k-1} + \cdots + p_{k-1}s_1 \\ \vdots \\ -n p_n = s_n + p_1s_{n-1} + \cdots + p_{n-1}s_1. \end{array} \right.$$

Qui est un système triangulaire qui se résout de proche en proche par la méthode de remontée.

• Méthode de Faddeev :

La méthode de Faddeev, aussi appelée méthode de Souriau-Leverrier utilise la trace matricielle pour calculer le polynôme caractéristique.

$$P(\lambda) = (-1)^n (\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + p_2\lambda^{n-2} + \cdots + p_{n-1}\lambda + p_n).$$

Le calcul des coefficients du polynôme caractéristique s'obtient par l'expression

$$P_k = -\frac{1}{k} \text{tr} (A_k), \forall k = 1, 2, \dots, n.$$

Avec

$$A_k = A^k + p_1A^{k-1} + \cdots + p_{k-1}A.$$

**Exemple 1.2.1 :**

• (Méthode de Leverrier) :

La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix},$$

## Valeurs propres

---

a pour trace  $s_1 = 6$ . Les matrices

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & -5 & 9 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & -19 & 27 \end{pmatrix}.$$

Ont pour trace  $s_2 = 14$  et  $s_3 = 36$ . Les équations

$$\begin{aligned} p_1 &= s_1 = (-6), \\ -2p_2 &= s_2 + p_1s_1 = 14 - 36, \\ -3p_3 &= s_3 + p_1s_2 + p_2s_1 = 36 - 84 + 66. \end{aligned}$$

Conduisent à

$$\begin{aligned} p_1 &= (-6). \\ p_2 &= 11. \\ p_3 &= (-6). \end{aligned}$$

Le polynôme caractéristique est donc

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= -\lambda^3 - p_1\lambda^2 - p_2\lambda - p_3 \\ &= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6. \end{aligned}$$

• (Méthode de Faddeev) :

La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix},$$

a pour polynôme caractéristique :

$$P(\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6.$$

Retrouvons ce résultat en appliquant l'algorithme de Faddeev.

On calcule le coefficient  $p_1$  à partir de la trace de la matrice  $p_1 = -\text{tr}(A) = (-6)$ .

Puis, la matrice  $A_2$

$$A_2 = A^2 + p_1 A = \begin{pmatrix} -5 & -3 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 1 & -9 \end{pmatrix},$$

donne la valeur  $p_2 = \frac{-\text{tr}(A_2)}{2} = 11$ .

Le calcul de  $A_3$

$$A_3 = A^3 + p_1 A^2 + p_2 A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Conduit à la valeur  $p_3 = \frac{-\text{tr}(A_3)}{3} = (-6)$ . On retrouve bien l'expression du polynôme caractéristique.

### 1.3 Calculer les valeurs propres

**Proposition 1.3.1** Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$ .

$\lambda$  valeur propre de  $A \iff \det(A - \lambda I_n) = 0$ .

**Preuve.**  $\lambda$  est un valeur propre de  $f$  alors

$(f - \lambda \text{Id}_E)$  n'est pas injective.

$$\iff (f - \lambda \text{Id}_E) \text{ n'est pas bijective.}$$

$$\iff (f - \lambda \text{Id}_E) \text{ n'est pas inversible.}$$

$$\iff (A - \lambda \text{Id}_E) \text{ n'est pas inversible.}$$

$$\iff \det(A - \lambda I) = 0.$$

■

**Exemple 1.3.1**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de cette matrice :

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 0 & 0 \\ -1 & 0 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (1 - \lambda) \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 2 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1 - \lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) \\ &= (1 - \lambda)(\lambda - 1)(\lambda - 2). \\ \det(A - \lambda I_3) &= 0 \iff (1 - \lambda)(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0 \\ &\implies \lambda_1 = 1 \text{ (double) et } \lambda_2 = 2. \end{aligned}$$

Alors les valeurs propres de  $A$ , est  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ .

Les sous-espaces propres :

$$E_\lambda = \{X \in \mathbb{R}^3 : AX = \lambda X\}.$$

$$\begin{aligned}
 E_1 &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} \\
 &= \left\{ (x, y, z) : \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} \\
 &= \{(x, y, z) : (3x + 2y, -x, z) = (x, y, z)\} \\
 &= \{(-y, y, z), y, z \in \mathbb{R}^2\} \\
 &= \{(-y, y, 0) + (0, 0, z), y, z \in \mathbb{R}^2\} \\
 &= \{y(-1, 1, 0) + z(0, 0, 1), y, z \in \mathbb{R}^2\} \\
 &= \langle (-1, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_2 &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} \\
 &= \{(x, y, z) : (3x + 2y, -x, z) = (2x, 2y, 2z)\} \\
 &= \{(-2y, y, 0), y \in \mathbb{R}\} \\
 &= \{y(-2, 1, 0), y \in \mathbb{R}\} \\
 &= \langle (-2, 1, 0) \rangle.
 \end{aligned}$$

---

---

## CHAPITRE 2

---

# MÉTHODES NUMÉRIQUES POUR CALCULER LES VALEURS PROPRES

Nous abordons dans ce chapitre l'approximation des valeurs propres et des vecteurs propres d'une matrice  $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ . Il existe deux classes de méthodes numériques pour traiter ce problème : les méthodes *partielles*, qui permettent le calcul approché des valeurs propres extrêmes de  $A$  (c'est-à-dire celles de plus grand et de plus petit module), et les méthodes *globales*, qui fournissent des approximations de tout le spectre de  $A$ .

## 2.1 Les méthodes partielles

### 2.1.1 La méthode de la puissance

La méthode de la puissance, encore appelée méthode de la puissance itérée, repose sur l'idée qu'en appliquant un grand nombre de fois la matrice sur un vecteur quel-

conque, les vecteurs successifs obtenus prennent une direction qui se rapproche de la direction du vecteur propre associé à la plus grande valeur propre en valeur absolue.

Supposons que la matrice  $A$  une matrice carrée d'ordre  $n$  avec entrées réelles, et possède  $n$  valeurs propres simples distinctes ( $A$  diagonalisable), et qu'il n'y en ait qu'une de module maximum.

Notons  $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$  les valeurs propres supposées rangées par ordre décroissant et  $v_1, v_2, \dots, v_n$  les vecteurs propres associés.

L'algorithme consiste à calculer la suite des itérées

$$x^{(k)} = Ay^{(k-1)}.$$

Pour cela, on se donne  $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \in \mathbb{R}^n$  un vecteur arbitraire avec  $\|x^{(0)}\| = 1$ , et on pose  $y^{(0)} = x^{(0)}$ .

À la  $k$ -ième étape, on calcule le vecteur

$$x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}).$$

Puis le vecteur

$$y^{(k)} = \left( \frac{x_1^{(k)}}{x_p^{(k)}}, \dots, \frac{x_n^{(k)}}{x_p^{(k)}} \right).$$

Où  $x_p^{(k)}$  est la composante de plus grand module du vecteur  $x^{(k)}$  telle que

$$|x_p^{(k)}| = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i^{(k)}|.$$

La  $p$ -ième composante de  $y^{(k)}$  vaut alors 1. La valeur propre estimée à la  $k$ -ième itération est la  $p$ -ième composante du vecteur  $x^{(k)}$ .

$$\lambda_1^{(k)} = x_p^{(k)}.$$

L'itération s'arrête dès que la différence entre deux estimations de la valeur propre est suffisamment petite

$$|\lambda_1^{(k)} - \lambda_1^{(k-1)}| \leq \varepsilon.$$

Avec  $\varepsilon$  est un petit nombre réel.

Le vecteur  $y^{(k)}$  converge vers un vecteur propre  $v_1$  associé à la valeur propre  $\lambda_1$ .

**Algorithme : Méthode de la puissance :** On choisit  $x^{(0)} = y^{(0)}$ ,  $\varepsilon = 10^{-3}$  et  $\|x^{(0)}\| = 1$ .

$$k = 1.$$

$$x^{(1)} = Ay^{(0)}.$$

$$|x_p^{(1)}| = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i^{(1)}|.$$

$$\lambda_1^{(1)} = x_p^{(1)}.$$

$$y^{(1)} = \frac{x^{(1)}}{x_p^{(1)}}.$$

Répétez

$$\left| \begin{array}{l} k = k + 1. \\ x^{(k)} = Ay^{(k-1)}. \\ |x_p^{(k)}| = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i^{(k)}|. \\ \lambda_1^{(k)} = x_p^{(k)}. \\ y^{(k)} = \frac{x^{(k)}}{x_p^{(k)}}. \end{array} \right.$$

$$\text{Jusqu'à } |\lambda_1^{(k)} - \lambda_1^{(k-1)}| \leq \varepsilon.$$

$$\lambda_1 = \lambda_1^{(k)}.$$

$$v_1 = y^{(k)}.$$

```
programme - powerm : Méthode de la puissance
fonction[lambda,x,iter,relres]=powerm(A, z0, tol, nmax)
%POWERM Méthode de la puissance
% [LAMBDA, X, ITER, RELRES]=POWERM(A, Z0, TOL, NMAX)calcule la
% valeur propre LAMBDA de plus grand module de la matrice A et un vecteur
% propre correspondant X de norm un. TOL est la tolérance de la méthode.
% NMAX est le nombre maximum d'itérations. Z0 est la donnée initiale.
% ITER est l'itération à laquelle la solution X a été calculée.
q=z0/norm(z0); q2=q;
relres=tol+1; iter=0; z=A*q;
while relres(end) >=tol & iter<=nmax
q=z/norm(z); z=A*q;
 $\lambda = q' * z$ ; x=q;
z2=q2'*A; q2=z2/norm(z2); q2=q2';
y1=q2; costheta=abs(y1'*x);
if costheta >=5e-2
iter=iter+1;
temp=norm(z-lambda*q)/costheta;
relres=[relres; temp];
else
fprintf('Valeur propre multiple');break;
```

end

end

return

**Exemple 2.1.1** Soit la matrice  $A$  telle que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

On choisit  $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t$  un vecteur arbitraire.

On pose  $x^{(0)} = y^{(0)}$ .

Itération (1) :

$$x^{(1)} = Ax^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}^t.$$

Donc

$$|x_p^{(1)}| = \sup_{1 \leq i \leq 3} |x_i^{(1)}| = 2, \text{ et } p = 2.$$

$$\lambda_1^{(1)} = x_2^{(1)} = 2.$$

$$y^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{x_1^{(1)}}{x_2^{(1)}} & \frac{x_2^{(1)}}{x_2^{(1)}} & \frac{x_3^{(1)}}{x_2^{(1)}} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}^t.$$

Itération (2) :

$$x^{(2)} = Ay^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 2 & \frac{-5}{2} \end{pmatrix}^t.$$

Donc

$$|x_p^{(2)}| = \sup_{1 \leq i \leq 3} |x_i^{(2)}| = \frac{5}{2}, \text{ et } p = 3.$$

$$\lambda_1^{(2)} = x_3^{(2)} = \frac{-5}{2}.$$

$$y^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{-3}{5} & \frac{-4}{5} & 1 \end{pmatrix}^t.$$

Calculer la différence entre deux estimations de la valeur propre

$$|\lambda_1^{(2)} - \lambda_1^{(1)}| = \left| \frac{-5}{2} - 2 \right| = 4.5.$$

Itération (3) :

$$x^{(3)} = Ay^{(2)} = \begin{pmatrix} -7 & -8 & 19 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}^t.$$

Donc

$$|x_p^{(3)}| = \sup_{1 \leq i \leq 3} |x_i^{(3)}| = \frac{19}{5}, \text{ et } p = 3.$$

$$\lambda_1^{(3)} = x_3^{(3)} = \frac{19}{5}.$$

$$y^{(3)} = \begin{pmatrix} -7 & -8 & 1 \\ 19 & 19 & 1 \end{pmatrix}^t.$$

Calculer la différence entre deux estimations de la valeur propre

$$|\lambda_1^{(3)} - \lambda_1^{(2)}| = \left| \frac{19}{5} + \frac{5}{2} \right| = 6.3.$$

Itération (4) :

$$x^{(4)} = Ay^{(3)} = \begin{pmatrix} -15 & -16 & 65 \\ 19 & 19 & 19 \end{pmatrix}^t.$$

Donc

$$|x_p^{(4)}| = \sup_{1 \leq i \leq 3} |x_i^{(4)}| = \frac{65}{19}, \text{ et } p = 3.$$

$$\lambda_1^{(4)} = x_3^{(4)} = \frac{65}{19}.$$

$$y^{(4)} = \begin{pmatrix} -15 & -16 & 1 \\ 65 & 65 & 1 \end{pmatrix}^t.$$

$$|\lambda_1^{(4)} - \lambda_1^{(3)}| = \left| \frac{65}{19} - \frac{19}{5} \right| = 0.378.$$

Itération (5) :

$$x^{(5)} = Ay^{(4)} = \begin{pmatrix} -31 & -32 & 211 \\ 65 & 65 & 65 \end{pmatrix}^t.$$

Donc

$$|x_p^{(5)}| = \sup_{1 \leq i \leq 3} |x_i^{(5)}| = \frac{211}{65}, \text{ et } p = 3.$$

$$\lambda_1^{(5)} = x_3^{(5)} = \frac{211}{65}.$$

Puis

$$y^{(5)} = \begin{pmatrix} \frac{-31}{211} & \frac{-32}{211} & 1 \end{pmatrix}^t.$$

$$|\lambda_1^{(5)} - \lambda_1^{(4)}| = \left| \frac{211}{65} - \frac{65}{19} \right| = 0.174.$$

Itération (6) :

$$x^{(6)} = Ay^{(5)} = \begin{pmatrix} \frac{-63}{211} & \frac{-64}{211} & \frac{665}{211} \end{pmatrix}^t.$$

Donc

$$|x_p^{(6)}| = \sup_{1 \leq i \leq 3} |x_i^{(6)}| = \frac{665}{211}, \text{ et } p = 3.$$

$$\lambda_1^{(6)} = x_3^{(6)} = \frac{665}{211}.$$

Puis

$$y^{(6)} = \begin{pmatrix} \frac{-63}{665} & \frac{-64}{665} & 1 \end{pmatrix}^t.$$

$$|\lambda_1^{(6)} - \lambda_1^{(5)}| = \left| \frac{665}{211} - \frac{211}{65} \right| = 0.094.$$

Puisque la différence entre deux estimations de la valeur propre est suffisamment petite alors

$$\lambda_1 \cong \lambda_1^{(6)} \cong 3.$$

Et le vecteur propre

$$v_1 \cong y^{(6)} \cong \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t.$$

### La méthode de la puissance inverse

La méthode de la puissance inverse est une méthode de la puissance appliquée à la matrice  $A^{-1}$ , qui permet d'obtenir la valeur propre de plus petit module de  $A$ . Notons  $\left|\frac{1}{\lambda_1}\right| \leq \left|\frac{1}{\lambda_2}\right| \leq \left|\frac{1}{\lambda_3}\right| \leq \dots \leq \left|\frac{1}{\lambda_n}\right|$ , et un vecteur propre qui lui est associé.

### La méthode de déflation de Wielandt

La méthode de la déflation de Wielandt permet le calcul des autres valeurs propres. Ayant obtenu la valeur propre  $\lambda_1$  et un vecteur propre associé, on construit une matrice  $A_1$  admettant comme valeurs propres  $0, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  et comme vecteurs propres  $v_1, v_2, \dots, v_n$ . En appliquant la méthode de la puissance à la matrice  $A_1$ , on obtient la valeur propre de  $A$  de plus grand module après  $\lambda_1$  et un vecteur propre associé. On procède de la façon suivante :

On cherche un vecteur propre  $\omega_1$  de la matrice transposée  $A^t$  associé à la valeur propre  $\lambda_1$  en résolvant le système

$$(A^t - \lambda_1 I) \omega_1 = 0,$$

et on calcule la matrice  $A_1$  par la formule

$$A_1 = A - \lambda_1 \frac{v_1 \omega_1^t}{\omega_1^t v_1}.$$

**Exemple 2.1.2** *Poursuivons l'exemple précédent. L'équation*

$$(A^t - \lambda_1 I) \omega_1 = 0.$$

Conduit au vecteur propre  $\omega_1 = (0 \ -1 \ 1)^t$  d'où

$$v_1 \omega_1^t = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\omega_1^t v_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Et la matrice  $A_1$

$$A_1 = A - 3 \frac{v_1 \omega_1^t}{\omega_1^t v_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc en appliquant la méthode de la puissance à la matrice  $A_1$

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t.$$

Itération (1) :

$$x^{(1)} = A_1 y^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}^t.$$

Donc

$$|x_p^{(1)}| = \sup_{1 \leq i \leq 3} |x_i^{(1)}| = 2, \text{ et } p = 2.$$

$$\lambda_2^{(1)} = x_2^{(1)} = 2.$$

$$y^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}^t.$$

Itération (2) :

$$x^{(2)} = A_1 y^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 2 & 2 \end{pmatrix}^t.$$

Donc

$$|x_p^{(2)}| = \sup_{1 \leq i \leq 3} |x_i^{(2)}| = 2, \text{ et } p = 2.$$

$$\lambda_2^{(2)} = x_2^{(2)} = 2.$$

$$y^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t.$$

$$|\lambda_2^{(2)} - \lambda_2^{(1)}| = |2 - 2| = 0.$$

Alors la valeur propre

$$\lambda_2 = \lambda_2^{(2)} = 2.$$

Et le vecteur propre

$$v_2 \cong y^{(2)} \cong \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t.$$

*Remarque 2.1.1* La méthode de la puissance fournit une très bonne approximation des valeurs propres extrémales d'une matrice et des vecteurs propres associés.

## 2.2 Les méthodes globales

### 2.2.1 Méthode LR de Rutishauser

La méthode LR de Rutishauser permet de calculer les valeurs propres et les vecteurs propres d'une matrice. Dans cette partie, on notera  $L$  ("Left") une matrice triangulaire inférieure dont les éléments diagonaux sont tous égaux à 1 et  $R$  ("Right") une matrice triangulaire supérieure.

Soit  $A = A_1$  une matrice réelle carrée telle que :  $A_1 = L_1 R_1$ . On définit ensuite  $A_2 = R_1 L_1$  que l'on décompose selon :  $A_2 = L_2 R_2$ , puis on définit :  $A_3 = R_2 L_2$  et ainsi de suite. De manière générale

$$\begin{aligned}A_k &= L_k R_k, \\A_{k+1} &= R_k L_k.\end{aligned}$$

Remarquons que

$$A_{k+1} = L_k^{-1} A_k L_k = R_k A_k R_k^{-1}.$$

Si l'on note

$$L'_k = L_1 \dots L_k, \quad R'_k = R_k \dots R_1,$$

on obtient

$$A_{k+1} = L'_k{}^{-1} A L'_k = R'_k A R'_k{}^{-1}.$$

La matrice  $A_k$  est donc semblable à  $A$ , par conséquent, elle a les mêmes valeurs propres et vecteurs propres associés.

Supposons que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} L'_k = L'.$$

Cela signifie que

$$\begin{aligned}\lim_{k \rightarrow \infty} L_k &= I, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} A_k &= \lim_{k \rightarrow \infty} R_k = R.\end{aligned}$$

Il en résulte que

$$L'^{-1}AL' = R \implies L'RL'^{-1} = A.$$

$R$  a les mêmes valeurs propres que  $A$  et en plus ce sont ses éléments diagonaux. Donc lorsqu'il y aura convergence, la connaissance de  $L'$  et  $R$  fournira les valeurs propres et les vecteurs propres de  $A$ . En effet, supposons que  $v$  soit un vecteur propre de  $R$ , cela implique que

$$Rv = \lambda v.$$

D'autre part, l'égalité

$$AL' = L'R.$$

Entraîne

$$L'Rv = L'\lambda v = AL'v.$$

D'où

$$\lambda L'v = AL'v.$$

Donc  $L'v$  est un vecteur propre de  $A$ .

•Description de la méthode de décomposition LR :

Soit  $A = [a_{ij}]$  une matrice que l'on décompose suivant  $A = LR$  où  $L = [l_{ij}]$  est triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale et  $R = [r_{ij}]$  triangulaire supérieure.

Par hypothèse :

$$l_{ij} = 0 \text{ pour } : i < j \leq n,$$

$$l_{ii} = 1,$$

$$r_{ij} = 0 \text{ pour } : i > j.$$

Comme

$$A = LR,$$

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^n l_{ik} r_{kj}.$$

En utilisant les définitions de  $l_{ij}$  et  $r_{ij}$ , on obtient

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} r_{kj} + r_{ij} \text{ pour } : i \leq j,$$

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} r_{kj} + l_{ij} r_{jj} \text{ pour } : i > j.$$

Donc

$$\begin{aligned}
 r_{1j} &= a_{1j} \quad \forall j, \\
 r_{ij} &= a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} r_{kj} \text{ pour } : 1 < i \leq j, \\
 l_{i1} &= \frac{a_{i1}}{r_{11}} \text{ pour } : 1 < i, \\
 l_{ij} &= \frac{1}{r_{jj}} \left[ a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} r_{kj} \right] \text{ pour } : i > j > 1.
 \end{aligned}$$

Le calcul précédent de  $L$  et  $R$  connaissant  $A$  se fait de manière alternative, on calcule d'abord la première ligne de  $R$ , puis la première colonne de  $L$ , puis la deuxième ligne de  $R$ , puis la deuxième colonne de  $L$ , etc...

**Algorithme : Méthode LR de Rutishauser**

$k = 0.$

$A_1 = A.$

Répétez

$k = k + 1.$
$A_k = L_k R_k.$
<i>on calculer <math>L_k.</math></i>
<i>on calculer <math>R_k.</math></i>
<i>on calculer <math>A_{k+1} = R_k L_k.</math></i>

Jusqu'a  $\left( \lim_{k \rightarrow \infty} L_k = I \right).$

ecrire  $R_k$

Les valeurs propres de la matrice  $A$  sont les éléments diagonaux de  $R_k.$

**Exemple 2.2.1** Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 4 & 8 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

• On décompose cette matrice sous la forme

$$A_1 = A = L_1 R_1,$$

où  $L_1$  est triangulaire inférieure et a ses éléments diagonaux égaux à 1 tandis que  $R_1$  est triangulaire supérieure.

On utilise la description de la méthode de décomposition LR on trouve

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.571 & 1 & 0 \\ 0.285 & 0.365 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_1 = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 0 & 7.428 & 3.285 \\ 0 & 0 & 3.942 \end{pmatrix}.$$

• On calcule ensuite la matrice

$$\begin{aligned} A_2 &= R_1 L_1, \\ A_2 &= \begin{pmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 0 & 7.428 & 3.285 \\ 0 & 0 & 3.942 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.571 & 1 & 0 \\ 0.285 & 0.365 & 1 \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} 8.4286 & 2.0962 & 3 \\ 5.1837 & 8.6291 & 3.2857 \\ 1.1264 & 1.4405 & 3.9423 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

• On décompose la matrice  $A_2$  sous la forme

$$A_2 = L_2 R_2,$$

et on obtient

$$L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.615 & 1 & 0 \\ 0.133 & 0.158 & 1 \end{pmatrix}, R_2 = \begin{pmatrix} 8.428 & 2.096 & 3 \\ 0 & 7.340 & 1.440 \\ 0 & 0 & 3.313 \end{pmatrix}.$$

• On calculera ensuite la matrice

$$A_3 = R_2 L_2,$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 10.116 & 2.570 & 3 \\ 4.705 & 7.567 & 1.440 \\ 0.440 & 0.523 & 3.313 \end{pmatrix}.$$

• On décompose la matrice  $A_3$  sous la forme

$$A_3 = L_3 R_3,$$

et on obtient

$$L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.465 & 1 & 0 \\ 0.043 & 0.064 & 1 \end{pmatrix}, R_3 = \begin{pmatrix} 10.116 & 2.570 & 3 \\ 0 & 6.371 & 0.045 \\ 0 & 0 & 3.181 \end{pmatrix}.$$

De plus, on calcule simultanément :  $L'_k = L_1 L_2 \dots L_k$ .

• A la 10<sup>ème</sup> itération, on trouve

$$L_{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.001 & 1 & 0 \\ 0.000 & 0.001 & 1 \end{pmatrix}, R_{10} = \begin{pmatrix} 12.789 & 2.970 & 3 \\ 0 & 5.008 & -1.338 \\ 0 & 0 & 3.200 \end{pmatrix}.$$

On arrête lorsque  $\lim_{k \rightarrow \infty} L_k = I$ .

La limite de  $R_k$  égale à la limite de  $A_k$  est une matrice qui a les mêmes valeurs propres que  $A$  et ce sont ses éléments diagonaux. Alors les valeurs propres de  $A$  sont  $\{12.789, 5.008, 3.200\}$ .

## Méthodes numériques pour calculer les valeurs propres

---

• Ensuite, on recherche les vecteurs propres  $v$  de  $R_k$  (notés par la suite  $R$  qui est leur limite).

Pour cela, on doit résoudre les  $n$  systèmes suivants

$$R v_i = \lambda_i v_i; i = 1, \dots, n, \quad (2.1)$$

où  $\lambda_i$  est une valeur propre estimée de  $R$ . Chaque vecteur  $v_i$  présente les composantes suivantes

$$v_i = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_{i-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}^t,$$

où donc les composantes de rang inférieur à  $i$  sont non nulles, la composante de rang  $i$  est égale à 1 et les composantes suivantes sont nulles. Si l'on explicite un système (2.1) pour une valeur propre donnée  $\lambda_i$  en fait approximée par  $r_{ii}$ , élément diagonale de  $R_k$  et donc valeur propre de  $R_k$

Par résolution de système triangulaire supérieur (2.1), et en considérant l'ensemble des valeurs propres de  $R_k$ , on obtient ainsi les vecteurs propres  $v_i$  de  $R$  (en fait  $R_k$ ), soit

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -0.381 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -0.542 \\ 0.740 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

• Si  $v$  est un vecteur propre de  $R$ , alors  $L'v$  est un vecteur propre de  $A$ . Donc, comme on a stocké  $L'$ , on en déduit facilement des estimations des vecteurs propres de  $A$ .

Connaissant  $L'$  au bout de 10 itérations

$$L'_{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2.112 & 1 & 0 \\ 1.226 & 0.658 & 1 \end{pmatrix}.$$

On trouve les estimations suivantes  $\omega_i$  les résultats numérique correspondent à des vecteurs

qui ont été normés après le calcul  $L'v''$  des vecteurs propres de  $A$ , selon la formule  $\omega_i = L'v_i$ , d'où

$$\omega_1 = \begin{pmatrix} 0.378 \\ 0.800 \\ 0.464 \end{pmatrix}, \quad \omega_2 = \begin{pmatrix} -0.815 \\ 0.413 \\ 0.405 \end{pmatrix}, \quad \omega_3 = \begin{pmatrix} -0.509 \\ -0.380 \\ 0.772 \end{pmatrix}.$$

## 2.2.2 Méthode QR de Francis

La méthode QR de Francis, est un développement de la méthode précédente de Rutishauser. La transformation QR préserve la symétrie de la matrice  $A$ , préserve la forme tridiagonale de  $A$ . La méthode QR est une méthode de réduction de matrice qui a pour objectif de déterminer l'ensemble des valeurs propres d'une matrice  $A$  symétrique tridiagonale. Dans le cas où la matrice  $A$  est quelconque, la méthode n'est pas bien adaptée et sa convergence lente. Soit  $A$  de dimension  $n \times n$  la matrice de départ.

On pose

$$A^{(1)} = A.$$

Et on forme des matrices  $Q^{(i)}, R^{(i)}, A^{(i)}$  répondant aux conditions suivantes

$$A^{(i)} = Q^{(i)}R^{(i)},$$

avec

$$Q^{(i)t}Q^{(i)} = I, \\ R^{(i)} = \begin{pmatrix} * & \dots & * \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & * \end{pmatrix}.$$

La matrice  $A^{(i)}$  est décomposée en un produit d'une matrice unitaire

(orthogonale si réelle  $Q^{(i)t}Q^{(i)} = I \iff Q^{(i)-1} = Q^{(i)t}$ )  $Q^{(i)}$  et d'une matrice triangulaire supérieure  $R^{(i)}$ .

$$A^{(i+1)} = R^{(i)}Q^{(i)} = Q^{(i)-1}Q^{(i)}R^{(i)}Q^{(i)} = Q^{(i)-1}A^{(i)}Q^{(i)}.$$

Ainsi, si  $A^{(i)}$  est symétrique, la matrice  $A^{(i+1)}$  est symétrique et semblable à  $A^{(i)}$ , elle a donc les mêmes valeurs propres que  $A^{(i)}$ . On obtient ainsi

$$A^{(i+1)} = (Q^{(1)} \dots Q^{(i)})^{-1} A^{(1)} (Q^{(1)} \dots Q^{(i)}).$$

On pose les matrices  $P^{(i)}, R^{(i)}$  telles que

$$\begin{aligned} P^{(i)} &= Q^{(1)}Q^{(2)} \dots Q^{(i)}, \\ U^{(i)} &= R^{(i)}R^{(i-1)} \dots R^{(1)}, \end{aligned}$$

où  $P^{(i)}$  est unitaire, et  $U^{(i)}$  est triangulaire supérieure. On en déduit

$$A^{(i+1)} = P^{(i)}A^{(1)}U^{(i)}.$$

Donc  $A^{(i+1)}$  est semblable à  $A^{(1)}$  alors elle a les mêmes valeurs propres que  $A$ .

Si  $A$  est symétrique,  $A^{(i+1)}$  tend vers une matrice diagonale avec les valeurs propres le long de la diagonale.

**Remarque 2.2.1** • Si  $A$  n'est pas symétrique,  $A^{(i)}$  converge vers une matrice triangulaire supérieure avec les valeurs propres le long de la diagonale lorsque les valeurs propres sont distinctes. De plus, les valeurs propres sont rangées par ordre croissant en module. Dans le cas

d'une valeur propre multiple d'ordre  $p$ , il apparaît un bloc diagonal d'ordre  $p$  possédant cette valeur propre.

• Si  $A$  est symétrique, mais pas tridiagonale, il faut commencer par appliquer une transformation de Householder afin d'obtenir une matrice symétrique tridiagonale semblable à la matrice  $A$  de départ.

**Théorème 2.2.2** (Convergence de la méthode QR)

Soit  $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$  une matrice dont les valeurs propres  $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$  sont telles que  $|\lambda_1| > \dots > |\lambda_n| > 0$ . Alors la suite des matrices  $(A^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  construites par la méthode QR données ci-dessus vérifie

$$\begin{cases} \lim_{k \rightarrow \infty} A_{i,i}^{(k)} = \lambda_i, & 1 \leq i \leq n \\ \lim_{k \rightarrow \infty} A_{i,j}^{(k)} = 0, & 1 \leq j < i \leq n. \end{cases}$$

Si de plus  $A$  est symétrique, alors la limite de  $(A^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  est la matrice diagonale  $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . La décomposition QR n'est pas unique, il y a trois méthodes de la décomposition QR. Par exemple

• **Décomposition QR par Gram-Schmidt** : Cette décomposition est valable pour une matrice  $A$  quelconque. On définit la matrice  $A$  à l'aide de ses vecteurs colonnes selon

$$A = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_n].$$

Et le vecteur projection de  $v_1$  sur  $v_2$  défini à partir de deux vecteurs quelconques  $v_1$  et  $v_2$ .

$$\text{proj}_{v_2}(v_1) = \frac{\langle v_2, v_1 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} v_2.$$

Où  $\langle v_1, v_2 \rangle$  est le produit scalaire de  $v_1$  par  $v_2$ .

La procédure de Gram-Schmidt définit successivement les vecteurs orthogonaux  $u_i$  et les vecteurs unitaires associés  $e_i$ .

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \alpha_1, \quad e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}, \\
 u_2 &= \alpha_2 - \text{proj}_{e_1}(\alpha_2), \quad e_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|}, \\
 &\vdots \\
 u_i &= \alpha_i - \sum_{j=1}^{i-1} \text{proj}_{e_j}(\alpha_i), \quad e_i = \frac{u_i}{\|u_i\|}. \quad \forall i = 1, \dots, n.
 \end{aligned}$$

Les vecteurs  $\alpha_i$  peuvent être représentés sur la base  $e$  selon

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^i \langle e_j, \alpha_i \rangle e_j, \tag{2.2}$$

avec

$$\langle e_i, \alpha_i \rangle = \|u_i\|.$$

L'équation (2.2) s'écrit sous forme matricielle

$$A = QR,$$

avec

$$\begin{aligned}
 Q &= [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n], \\
 R &= Q^T A = \begin{pmatrix} \langle e_1, \alpha_1 \rangle & \langle e_1, \alpha_2 \rangle & \dots & \langle e_1, \alpha_n \rangle \\ 0 & \langle e_2, \alpha_2 \rangle & \dots & \langle e_2, \alpha_n \rangle \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \langle e_n, \alpha_n \rangle \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Ce qui termine cette décomposition  $QR$ .

**Exemple 2.2.2** Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

On pose

$$A^{(1)} = A.$$

On effectue une première fois la décomposition QR de  $A$  par la décomposition QR de Gram-Schmidt. On obtient ainsi

$$Q^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.7071 & -0.4082 & -0.4364 & 0.3780 \\ 0.7071 & 0.4082 & 0.4364 & -0.3780 \\ 0 & -0.8165 & 0.4364 & -0.3780 \\ 0 & 0 & 0.6547 & 0.7559 \end{pmatrix}.$$

$$R^{(1)} = \begin{pmatrix} 1.4142 & 2.1213 & -0.7071 & 0 \\ 0 & 1.2247 & -2.8577 & -0.8165 \\ 0 & 0 & 1.5275 & 3.0551 \\ 0 & 0 & 0 & 2.6458 \end{pmatrix}.$$

On calcule ensuite

$$A^{(2)} = R^{(1)}Q^{(1)}.$$

Soit

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 2.5000 & 0.8660 & 0 & 0 \\ 0.8660 & 2.8333 & -1.2472 & 0 \\ 0 & -1.2472 & 2.6667 & 1.7321 \\ 0 & 0 & 1.7321 & 2.0000 \end{pmatrix}.$$

On décompose la matrice

$$A^{(2)} = Q^{(2)}R^{(2)}.$$

Et l'on continue cette opération jusqu'à ce que la majorité des éléments non diagonaux (excepté le cas d'une valeur propre multiplie) tende vers 0. On trouve ainsi après  $k$  itérations ( $k = 5, 10, 20$ ).

$$A^{(6)} = \begin{pmatrix} 4.2928 & 0.7213 & 0 & 0 \\ 0.7213 & 3.5561 & -0.3350 & 0 \\ 0 & -0.3350 & 1.8964 & 0.0004 \\ 0 & 0 & 0.0004 & 0.2547 \end{pmatrix}.$$

$$A^{(11)} = \begin{pmatrix} 4.7342 & 0.1314 & 0. & 0 \\ 0.1314 & 3.1881 & -0.0186 & 0 \\ 0 & -0.0186 & 1.8230 & 0.0000 \\ 0 & 0 & 0.0000 & 0.2547 \end{pmatrix}.$$

$$A^{(21)} = \begin{pmatrix} 4.7453 & 0.0024 & 0 & 0 \\ 0.0024 & 3.1773 & -0.0001 & 0 \\ 0 & -0.0001 & 1.8227 & 0.0000 \\ 0 & 0 & 0.0000 & 0.2547 \end{pmatrix}.$$

Donc les valeurs propres de  $A$  sont les éléments diagonaux de  $A^{(21)}$  rangées par ordre croissant en module :  $\{4.7453; 3.1773; 1.8227; 0.2547\}$ .

### 2.2.3 Méthode de Jacobi

La méthode de Jacobi est une méthode itérative applicable à une matrice  $A$  symétrique. Elle consiste à faire opérer le groupe des rotations planes sur  $A$ , c'est-à-dire à multiplier  $A$  par des transformations orthogonales afin de la mettre sous forme diagonale, les éléments diagonaux étant les valeurs propres de la matrice  $A$ . Étudions le

principe de la méthode. Considérons la matrice  $R$  dont les éléments sont égaux à ceux de la matrice identité sauf pour les quatre valeurs suivantes

$$\begin{aligned} r_{pp} &= \cos(\alpha), \\ r_{pq} &= \sin(\alpha), \\ r_{qq} &= \cos(\alpha), \\ r_{qp} &= -\sin(\alpha). \end{aligned}$$

Avec  $p < q$ . La matrice  $R$  est une matrice orthogonale

$$R^t R = I,$$

à la première étape, on calcule la matrice  $A^{(1)} = R_1^{-1} A R_1 = R_1^t A R_1$ , en remarquant que seules les lignes et les colonnes  $p$  et  $q$  sont modifiées, pour  $j = p$  ou  $q$ , on a

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{pj}^{(1)} = a_{jp}^{(1)} = a_{jp} \cos(\alpha) - a_{jq} \sin(\alpha) \\ a_{qj}^{(1)} = a_{jq}^{(1)} = a_{jp} \cos(\alpha) + a_{jq} \sin(\alpha) \\ a_{pp}^{(1)} = a_{pp} \cos^2(\alpha) + a_{qq} \sin^2(\alpha) - 2a_{pq} \sin(\alpha) \cos(\alpha) \\ a_{qq}^{(1)} = a_{qq} \cos^2(\alpha) + a_{pp} \sin^2(\alpha) + 2a_{pq} \sin(\alpha) \cos(\alpha) \\ a_{pq}^{(1)} = a_{qp}^{(1)} = a_{pq} (\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)) + (a_{pp} - a_{qq}) \sin(\alpha) \cos(\alpha). \end{array} \right.$$

On peut donc choisir  $\alpha$  de sorte que

$$a_{pq}^{(1)} = a_{qp}^{(1)} = 0,$$

c'est-à-dire tel que

$$\tan(2\alpha) = \frac{2a_{pq}}{a_{qq} - a_{pp}} \equiv \theta, \text{ avec } |\alpha| \leq \frac{\pi}{4}.$$

Ou encore

$$\cos(\alpha) = \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{1 + \theta^2}} \right)},$$

$$\sin(\alpha) = \operatorname{sgn}(\theta) \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \theta^2}} \right)}.$$

Si  $a_{pp} = a_{qq}$ , on choisira

$$\cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\sin(\alpha) = \frac{\operatorname{sgn}(a_{pq})}{\sqrt{2}}.$$

On a alors

$$\left(a_{pp}^{(1)}\right)^2 + \left(a_{qq}^{(1)}\right)^2 = a_{pp}^2 + a_{qq}^2 + 2a_{pq}^2.$$

Et comme

$$a_{ii}^{(1)} = a_{ii} \text{ pour } i \neq p \text{ ou } q$$

$$\sum_{i=1}^n \left(a_{ii}^{(1)}\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^n a_{ii}^2\right) + 2a_{pq}^2.$$

En passant de  $A$  à  $A^{(1)}$  la somme des carrés des éléments diagonaux augmente de la quantité  $2a_{pq}^2$ . En itérant ce processus, on obtient

$$A^{(k+1)} = (R_1 R_2 \dots R_k)^t A (R_1 R_2 \dots R_k).$$

La suite des matrices  $A^{(k)}$  converge vers une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres de la matrice initiale  $A$ . La suite des matrices

$$R = R_1 R_2 \dots R_k,$$

converge vers la matrice dont les colonnes sont constituées de vecteurs propres. Au cours des itérations un terme peut redevenir nul, mais on démontre que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i \neq j} (a_{ij}^{(k)})^2 = 0.$$

On arrête l'itération quand

$$1 - \frac{\sum_{i=1}^n (a_{ii}^{(k)})^2}{\sum_{i=1}^n (a_{ii}^{(k+1)})^2} < \varepsilon.$$

En pratique, on a le choix à chaque pas d'itération du couple  $(p, q)$ . On définit différentes stratégies. Dans la méthode de Jacobi classique, on choisit  $(p, q)$  tels que

$$|a_{pq}^{(k)}| = \sup_{i \neq j} |a_{ij}^{(k)}|.$$

Dans la méthode de Jacobi cyclique, on effectue un balayage systématique en prenant pour  $(p, q)$  les couples  $(1, 2), (1, 3), \dots, (1, n)$  puis  $(2, 3), \dots, (2, n)$ , etc., jusqu'à  $(n-1, n)$ . Dans la méthode de Jacobi cyclique avec seuil, on effectue comme précédemment un balayage sur les éléments triangulaires supérieurs, chaque élément  $a_{ij}$  étant pris comme élément à annuler  $a_{pq}$ , mais on ne retient le couple  $(p, q)$  que si  $|a_{ij}|$  est supérieur à un certain seuil qui peut être réajusté à chaque itération. La méthode de Jacobi est stable, mais sa convergence est lente, ce qui en fait une méthode très peu utilisée.

**Exemple 2.2.3** Soit  $A$  la matrice symétrique tel que

$$A = A^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0.5 \\ 1 & 1 & 0.25 \\ 0.5 & 0.25 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pour annuler le plus grand élément extradiagonal  $a_{12}$ , il faut effectuer une première rotation dans le sous-espace  $(1, 2)$ .

On a  $\tan(2\alpha) = \frac{2a_{12}}{a_{22}-a_{11}}$  et Comme  $a_{22} = a_{11}$ , alors  $\tan(2\alpha) = 0$  donc  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ , si bien que

$$R_1 = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7071068 & 0.7071068 & 0 \\ -0.7071068 & 0.7071068 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$A^{(1)} = R_1^t A R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.1767767 \\ 0 & 2 & 0.5303301 \\ 0.1767767 & 0.5303301 & 2 \end{pmatrix}.$$

La deuxième rotation, soit  $a_{23}^{(1)}$  le plus grand élément extradiagonal, est encore particulière  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  car  $(a_{33}^{(1)} = a_{22}^{(1)})$ .

Donc

$$R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ 0 & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7071068 & 0.7071068 \\ 0 & -0.7071068 & 0.7071068 \end{pmatrix}.$$

$$A^{(2)} = R_2^t A^{(1)} R_2 = \begin{pmatrix} 0 & -0.125 & 0.125 \\ -0.125 & 1.4696699 & 0 \\ 0.125 & 0 & 2.5303301 \end{pmatrix}.$$

La troisième rotation, dans le sous-espace (1, 2), vise à éliminer  $a_{12}^{(2)}$ . Avec  $\tan(2\alpha) = \frac{2a_{12}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}-a_{11}^{(2)}} = -0.1701062$ , alors  $\alpha = -0.0842466$  rd. d'où la matrice de rotation

$$R_3 = \begin{pmatrix} 0.9964533 & -0.0841471 & 0 \\ 0.0841471 & 0.9964533 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Et la matrice  $A^{(3)}$

$$A^{(3)} = R_3^t A^{(2)} R_3 = \begin{pmatrix} -0.0105558 & 0 & 0.1245567 \\ 0 & 1.4802257 & -0.0105184 \\ 0.1245567 & -0.0105184 & 2.5303301 \end{pmatrix}.$$

La quatrième rotation aura lieu dans le sous-espace(1,3), avec  $\tan(2\alpha) = 0.0980419$ , alors  $\alpha = 0.0488648$  rd. La matrice de rotation s'écrit

$$R_4 = \begin{pmatrix} 0.9988064 & 0 & 0.0488453 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.0488453 & 0 & 0.9988064 \end{pmatrix}.$$

Et permet d'obtenir

$$A^{(4)} = R_4^t A^{(3)} R_4 = \begin{pmatrix} -0.0166471 & 0.0005138 & 0 \\ 0.0005138 & 1.4802257 & -0.0105058 \\ 0 & -0.0105058 & 2.5364214 \end{pmatrix}.$$

J'arrête l'itération lorsque la matrice  $A^{(4)}$  converge vers une matrice diagonale ou  $1 - \frac{\sum_{i=1}^3 (a_{ii}^{(3)})^2}{\sum_{i=1}^3 (a_{ii}^{(4)})^2} < \varepsilon$ , et les éléments diagonaux de la matrice  $A^{(4)}$  sont les valeurs propres de la matrice  $A$ . Alors les valeurs propres de  $A$  sont  $\{-0.0166471, 1.4802257, 2.5364214\}$ , et les vecteurs propres sont les colonnes de la matrice de similitude globale, comme je n'ai à manipuler que 4 petites matrices, je forme  $R$  directement

$$R = R_1 \times R_2 \times R_3 \times R_4 = \begin{pmatrix} 0.7213585 & 0.4387257 & 0.5358747 \\ -0.6861572 & 0.5577276 & 0.4670419 \\ -0.0939688 & -0.7045989 & 0.7033564 \end{pmatrix}.$$

L'erreur encourue sur les valeurs propres après 4 itérations de l'algorithme de Jacobi n'excède pas  $10^{-4}$ . Les vecteurs propres sont nettement moins précis. C'est toujours le cas pour l'algorithme de Jacobi. Une dernière remarque, l'ordre dans lequel apparaissent les valeurs propres et les vecteurs propres associés est arbitraire, de même que le signe des vecteurs propres.

---

---

## CHAPITRE 3

---

# APPLICATIONS DES VALEURS PROPRES

Dans ce chapitre, nous allons donner deux applications réels des valeurs propres, le premier est le mouvement des ressorts en physique et le deuxième est le dynamique de population en biologie.

### 3.1 Mouvement de ressorts

Considérons un système de deux billes de masse unité reliées par trois ressorts de raideur unité. Notons  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  les positions des deux billes au temps  $t$ , par rapport à leur position d'équilibre. Soient  $F_1(t)$ ,  $F_2(t)$  et  $F_3(t)$  les forces appliquées sur les billes : ce sont les forces de rappel des trois ressorts. Nous allons voir que l'étude des positions des billes au cours du temps,  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$ , se ramène à un calcul de valeurs propres. Pour cela, nous écrivons d'abord les équations de Newton pour les deux billes

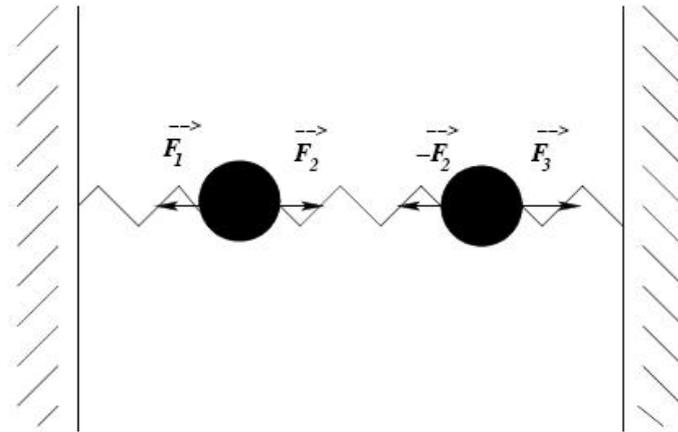


FIGURE 3.1 – Etude du mouvement de deux billes maintenues par trois ressorts.

*masse  $\times$  accélération = somme des forces extérieures,*

ce qui se traduit par

$$\begin{cases} x_1''(t) = +F_1(t) + F_2(t) \\ x_2''(t) = -F_2(t) + F_3(t). \end{cases}$$

En considérant le cas simplifié où les forces sont proportionnelles à l'allongement du ressort, nous avons

$$F_1(t) = -x_1(t), \quad F_2(t) = x_2(t) - x_1(t), \quad F_3(t) = -x_2(t),$$

et donc

$$\begin{cases} x_1''(t) = -2x_1(t) + x_2(t) \\ x_2''(t) = x_1(t) - 2x_2(t). \end{cases}$$

Cette relation peut s'écrire sous forme matricielle en posant

$$A = \begin{pmatrix} +2 & -1 \\ -1 & +2 \end{pmatrix}, \quad x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix},$$

les équations du mouvement deviennent  $x''(t) + A x(t) = 0$ . Le vecteur  $x(t)$  est alors solution d'un système d'équations différentielles linéaire qui peut être résolu de manière exacte. Les positions des billes  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  s'écrivent sous la forme  $x_1(t) = \alpha_1 \cos(\omega t)$  et  $x_2(t) = \alpha_2 \cos(\omega t)$ , où les grandeurs  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  et  $\omega$  restent à déterminer.

En substituant ces relations dans les équations du mouvement, il vient

$$\begin{cases} x_1''(t) = -\omega^2 \alpha_1 \cos(\omega t) \\ x_2''(t) = -\omega^2 \alpha_2 \cos(\omega t). \end{cases} \quad (3.1)$$

Puis après simplification par  $\cos(\omega t)$ , nous avons

$$A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \omega^2 \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

Le problème consiste donc à chercher  $\alpha_1$ , et  $\alpha_2$  tels que les deux équations ci-dessus soient satisfaites.

Ainsi, la connaissance des valeurs propres et vecteurs propres de la matrice  $A$ , c'est-à-dire  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  et  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$  tels que  $Av_1 = \lambda_1 v_1$  et  $Av_2 = \lambda_2 v_2$  permet de résoudre complètement le système différentiel. En effet, puisque  $A$  est symétrique définie positive, les valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont réelles strictement positives, les grandeurs  $\alpha_1, \alpha_2$  et  $\omega$  solutions de (3.1) sont alors données par  $\omega = \sqrt{\lambda_1}$  et  $(\alpha_1, \alpha_2)^t = v_1^t$  ou  $\omega = \sqrt{\lambda_2}$  et  $(\alpha_1, \alpha_2)^t = v_2^t$ . Dans le cas présent, nous obtenons  $\lambda_1 = 3$  et  $v_1 = (1, -1)^t$  ou  $\lambda_2 = 1$  et  $v_2 = (1, 1)^t$ .

### 3.1.1 Calculer les valeurs propres

Par utilisation de la méthode de Rutishauser, on décompose la matrice  $A$  sous la forme

$$A_1 = A = L_1 R_1,$$

où  $L_1$  est triangulaire inférieure et a ses éléments diagonaux égaux à 1 tandis que  $R_1$  est triangulaire supérieure.

On utilise la description de la méthode de décomposition LR on trouve

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0.5 & 1 \end{pmatrix}, R_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1.5 \end{pmatrix}.$$

On calcule ensuite la matrice

$$A_2 = R_1 L_1,$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0.5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.5 & -1 \\ -0.75 & 1.5 \end{pmatrix}.$$

On décompose la matrice  $A_2$  sous la forme

$$A_2 = L_2 R_2,$$

et on obtient

$$L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0.3 & 1 \end{pmatrix}, R_2 = \begin{pmatrix} 2.5 & -1 \\ 0 & 1.2 \end{pmatrix}.$$

On calcule ensuite la matrice

$$A_3 = R_2 L_2,$$
$$A_3 = \begin{pmatrix} 2.8 & -1 \\ -0.36 & 1.2 \end{pmatrix}.$$

On décompose la matrice  $A_3$  sous la forme

$$A_3 = L_3 R_3,$$

et on obtient

$$L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0.128 & 1 \end{pmatrix}, R_3 = \begin{pmatrix} 2.8 & -1 \\ 0 & 1.072 \end{pmatrix}.$$

On calcule ensuite la matrice

$$\begin{aligned} A_4 &= R_3 L_3, \\ &= \begin{pmatrix} 2.928 & -1 \\ -0.137 & 1.072 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On décompose la matrice  $A_4$  sous la forme

$$A_4 = L_4 R_4,$$

et on obtient

$$L_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0.046 & 1 \end{pmatrix}, R_4 = \begin{pmatrix} 2.928 & -1 \\ 0 & 1.026 \end{pmatrix}.$$

On calcule ensuite la matrice

$$\begin{aligned} A_5 &= R_4 L_4, \\ &= \begin{pmatrix} 2.974 & -1 \\ -0.047 & 1.026 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On décompose la matrice  $A_5$  sous la forme

$$A_5 = L_5 R_5,$$

et on obtient

$$L_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0.001 & 1 \end{pmatrix}, R_5 = \begin{pmatrix} 2.974 & -1 \\ 0 & 1.025 \end{pmatrix}.$$

Alors  $L_5$  converge vers la matrice identité  $I$ , donc les valeurs propres de la matrice  $A$  est les éléments diagonaux de  $R_5$ . Alors les valeurs propres de  $A$  sont  $\{2.974, 1.025\}$ .

## 3.2 Dynamique de population

Soit une certaine population à générations discrètes, la tail de  $l(t+1)^{\text{ème}}$  génération est  $N_{t+1}$  est une fonction de la tail de la  $t^{\text{ème}}$  génération  $N_t$ . Cette relation s'exprime dans l'équation aux différences.

$$N_{t+1} = MN_t,$$

telle que

$$N_t = \begin{pmatrix} n_{1t} \\ n_{2t} \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Q 1 : Quel est le taux d'accroissement de cette population ?

$$\frac{n_{1t+1} + n_{2t+1}}{n_{1t} + n_{2t}} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} cste,$$

c'est-à-dire

$$\frac{n_{1t+1} + n_{2t+1}}{n_{1t} + n_{2t}} = cste = \lambda.$$

Q 2 : "La structure en âge" est-elle stable ?

Au bout d'un certain temps, le rapport des deux classes d'âge se stabilise

$$\frac{n_{1t}}{n_{2t}} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} cste,$$

c'est-à-dire

$$\frac{n_{1t+1}}{n_{2t+1}} = \frac{n_{1t}}{n_{2t}} = cste,$$

alors

$$\frac{n_{1t+1}}{n_{2t+1}} = \frac{n_{1t}}{n_{2t}} \iff \begin{cases} n_{1t+1} = \lambda n_{1t} \\ n_{2t+1} = \lambda n_{2t} \end{cases}$$

Donc

$$M \begin{pmatrix} n_{1t} \\ n_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_{1t+1} \\ n_{2t+1} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} n_{1t} \\ n_{2t} \end{pmatrix}.$$

L'équation vérifiée par une structure en âge stable est

$$M N = \lambda N \iff M N - \lambda N = 0 \iff (M - \lambda I) N = 0.$$

► Si  $\det$  non nul alors une solution unique.

► Si  $\det = 0$  (matrice non inversible), soit 0 solution, soit une infinité or  $N = 0$  est forcément solution, donc si on veut des solutions  $N$  non nul, il faut que

$$\det(M - \lambda I) = 0.$$

Réponse à la question Q1 :

La plus grande des deux valeurs propres (en valeur absolue) est le taux d'accroissement de la population

$$\frac{n_{1t+1} + n_{2t+1}}{n_{1t} + n_{2t}} = \lambda_1 = 2.$$

Réponse à la question Q2 :

Si la population double chaque année ( $\lambda = 2$ ) alors la structure en âge tend à se stabiliser au bout d'un certain temps, c'est-à-dire les vecteurs propres  $\{n_i\}$  représentent la structure en âge de la population

$$\frac{n_1}{n_2} = 4,$$

il y a 4 fois plus d'individus de 1 an que d'individus de 2 ans. (L'autre valeur,  $\lambda = -1$ , n'a pas de signification biologique).

### 3.2.1 Calculer les valeurs propres

Par utilisation de la méthode de la puissance, on choisit  $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^t$  un vecteur arbitraire.

Itération (1) :

$$x^{(1)} = Ax^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 4 & 0 \end{pmatrix}^t.$$

Donc

$$|x_p^{(1)}| = \sup_{1 \leq i \leq 2} |x_i^{(1)}| = 4, \text{ et } p = 1.$$

$$\lambda_1^{(1)} = x_1^{(1)} = 4.$$

$$y^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^t.$$

Itération (2) :

$$x^{(2)} = Ay^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^t.$$

Donc

$$|x_p^{(2)}| = \sup_{1 \leq i \leq 2} |x_i^{(2)}| = 1, \text{ et } p = 1.$$

$$\lambda_1^{(2)} = x_1^{(2)} = 1.$$

$$y^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^t.$$

$$|\lambda_1^{(2)} - \lambda_1^{(1)}| = |1 - 4| = 3.$$

Itération (3) :

$$x^{(3)} = Ay^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 3 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^t.$$

Donc

$$|x_p^{(3)}| = \sup_{1 \leq i \leq 2} |x_i^{(3)}| = 3, \text{ et } p = 1.$$

$$\lambda_1^{(3)} = x_1^{(3)} = 3.$$

$$y^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}^t.$$

$$|\lambda_1^{(3)} - \lambda_1^{(2)}| = |3 - 1| = 2.$$

Itération (4) :

$$x^{(4)} = Ay^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^t.$$

Donc

$$|x_p^{(4)}| = \sup_{1 \leq i \leq 2} |x_i^{(4)}| = \frac{5}{3}, \text{ et } p = 1.$$

$$\lambda_1^{(4)} = x_1^{(4)} = \frac{5}{3}.$$

$$y^{(4)} = \left(1 \quad \frac{3}{10}\right)^t.$$

$$|\lambda_1^{(4)} - \lambda_1^{(3)}| = \left|\frac{5}{3} - 3\right| = 1.33.$$

Itération (5) :

$$x^{(5)} = Ay^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \left(1 \quad \frac{3}{10}\right)^t = \left(\frac{11}{5} \quad \frac{1}{2}\right)^t.$$

Donc

$$|x_p^{(5)}| = \sup_{1 \leq i \leq 2} |x_i^{(5)}| = \frac{11}{5}, \text{ et } p = 1.$$

$$\lambda_1^{(5)} = x_1^{(5)} = \frac{11}{5}.$$

$$y^{(5)} = \left(1 \quad \frac{5}{22}\right)^t.$$

$$|\lambda_1^{(5)} - \lambda_1^{(4)}| = \left|\frac{11}{5} - \frac{5}{3}\right| = 0.54.$$

Itération (6) :

$$x^{(6)} = Ay^{(5)} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \left(1 \quad \frac{5}{22}\right)^t = \left(\frac{21}{11} \quad \frac{1}{2}\right)^t.$$

Donc

$$|x_p^{(6)}| = \sup_{1 \leq i \leq 2} |x_i^{(6)}| = \frac{21}{11}, \text{ et } p = 1.$$

$$\lambda_1^{(6)} = x_1^{(6)} = \frac{21}{11}.$$

$$y^{(6)} = \left(1 \quad \frac{11}{42}\right)^t$$
$$|\lambda_1^{(6)} - \lambda_1^{(5)}| = \left|\frac{21}{11} - \frac{11}{5}\right| = 0.29.$$

Puisque la différence entre deux estimations de la valeur propre est suffisamment petite alors

$$\lambda_1 \cong \lambda_1^{(6)} \cong 2.$$

Et le vecteur propre

$$N_1 \cong y^{(6)} \cong \left(1 \quad \frac{1}{4}\right)^t = \left(n_1 \quad n_2\right)^t \Rightarrow \frac{n_1}{n_2} = 4.$$

On utilise la méthode de déflation de Wielandt, on a

$$A_1 = \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{-2}{3} \end{pmatrix}.$$

On choisit

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^t.$$

Itération (1) :

$$x^{(1)} = A_1 y^{(0)} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{-2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{-2}{3} \end{pmatrix}^t.$$

Donc

$$|x_p^{(1)}| = \sup_{1 \leq i \leq 2} |x_i^{(1)}| = \frac{4}{3}, \text{ et } p = 1.$$

$$\lambda_2^{(1)} = x_1^{(1)} = \frac{4}{3}.$$

$$y^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}^t.$$

Itération (2) :

$$x^{(2)} = A_1 y^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{-2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^t.$$

Donc

$$|x_p^{(2)}| = \sup_{1 \leq i \leq 2} |x_i^{(2)}| = 1, \text{ et } p = 1.$$

$$\lambda_2^{(2)} = x_1^{(2)} = -1.$$

$$y^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}^t.$$

$$|\lambda_2^{(2)} - \lambda_2^{(1)}| = \left| -1 - \frac{4}{3} \right| = 2.23.$$

Itération (3) :

$$x^{(3)} = A_1 y^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{-2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^t.$$

Donc

$$|x_p^{(3)}| = \sup_{1 \leq i \leq 2} |x_i^{(3)}| = 1, \text{ et } p = 1.$$

$$\lambda_2^{(3)} = x_1^{(3)} = -1.$$

$$y^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}^t.$$

$$|\lambda_2^{(3)} - \lambda_2^{(2)}| = |-1 + 1| = 0.$$

Alors la valeur propre

$$\lambda_2 = \lambda_2^{(3)} = -1.$$

Et le vecteur propre

$$N_2 = y^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} n_1 & n_2 \end{pmatrix}^t \Rightarrow \frac{n_1}{n_2} = -2.$$

---

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. Dennaï, *Mathématiques pour L'ingénieur, Algèbre, Géométrie, Analyse*, Hermann, Paris, 2010.
- [2] O. Gusi, S. Jallais, *Introduction à L'algèbre Linéaire*, Presses Universitaires de France, 2011.
- [3] F. Jedrzejewski, *Introduction aux Méthodes Numériques*, Springer-Verlag France, Paris, 2005, 2006.
- [4] F. Liret, D. Martinais, *Algèbre et Géométrie 2<sup>ème</sup> année*, Dunod, Paris, 2002.
- [5] A. Monnard, J. Chastenet, *Travaux Pratiques de Mathématiques, Calcul numérique des Valeurs Propres*, 2007.
- [6] J. Pierre Corriou, *Méthodes Numériques et Optimisation*, Lavoisier, 2010

## Résumé

Le présent travail est consacré à présenter les différentes méthodes numériques pour calculer les valeurs propres des matrices d'ordres supérieurs, et on donne quelques applications réelles des valeurs propres.

**Mots clés :** valeurs propres, vecteurs propres, matrices, méthodes numériques.

## Abstract

In this work we show various numerical methods to calculate the eigenvalues of higher order matrices, also we give some real application of eigenvalues.

**Key words:** eigenvalues, eigenvectors, matrices, numerical Methods .

## ملخص

نقوم في هذا العمل بتقديم مختلف الطرق العددية التي تسمح لنا بحساب القيم الذاتية للمصفوفات ذات الرتب العليا التي يتعذر حسابها بالطرق المباشرة، كما نعطي بعض التطبيقات الواقعية للقيم الذاتية.

**الكلمات الأساسية:** القيم الذاتية، الأشعة الذاتية، المصفوفات، الطرق العددية