الجمهورية الجزائرية الديموقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et populaire

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

CENTRE UNIVERSIT AIRE DE MILA

INSTITUT DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE

Réf :

Mémoire de fin d'étude

Présenté pour l'obtention du diplôme de

LICENCE ACADEMIQUE

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité : Mathématiques Fondamentales

Thème

Résolution des équations et Systèmes non linéaires

Dirigé par : Labed Boudjema

Présenté par : 1- Rezaiki Saida

2- Bareuk Samia

Année universitaire

2011-2012

إهــداء

اهدي ثمرة جهدي إلى روح أبي الظاهرة رحمه الله .
إلى من غاب ولكنه لم يغب عنا إليك ابي الحبيب.

إلى من أنارت قلبي و دربي إلى نبع الحنان إلى من غمرتنا بعطفها و حنانها و كانت الصدر الذي يملؤنا ، إلى من لم تتوان لحظة في دعمنا وتقديم أغلى ما يمكن أن تقدمه الأم إلى أولادها ، إلى أمي أطــال الله في عمرها و أمدها بالصحة و العافية إلى إخوتـــــي .
إلــى أخي الكبير "بلال" الذي لــم يبخل عنا يوما في مدنـــا بالنصائح إلى أخي المـدلل "جهاد" إلى أخيّ لطفي صاحب القلـــب الطيب ، إلى أخي الصغير "يعقوب".

سامية باروق

إهــداء

إلى من قال فيهما الرحمن ". وَقَضَى رَبُّكَ أَلاَّ تَعْبُدُواْ إِلاَّ إِيَّاهُ وَبِالْوَالِدَيْنِ إِحْسَاناً إِمَّا يَبْلُغَنَّ عِندَكَ الْكِبَرَ أَحَدُهُمَا أَوْ كِلاَهُمَا فَلاَ تَقُل لَّهُمَا أُفٍّ وَلاَ تَنْهَرْهُمَا وَقُل لَّهُمَا قَوْلاً كَرِيماً (23) وَاخْفِضْ لَهُمَا جَنَاحَ الذُّلِّ .....

صدق الله العظيم

إلى من ربياني صغيرا وتعبا في تربيتي

إلى من حملتني وهنا على وهن و تحملت عناء حملها وسهرت الليالي من اجل منبع الحنان و الحب و الدعوة الصالحة إليك أمي الغالية إلــى مصدر النصح و الإرشاد و التوجيه الهادف والكلمــة الطيبة لا أستطيع التعبير عن مشاعري نحوك فمشاعري أكبـر من أن أسطرها على الورق ولكني لا املك إلا أن أدعو الله سبحانه أن يجعلك دخرا لي ولا يحرمني من حبك وحنانك ويا من أوصلتني إلى هنا ، إليك أبي الغالي والى العائلة الكريمة كل أخواتي وإخوتي كبيرا و صغيرا وأخص بالذكر أختي الصغرى " الهام" و اخي الصغير "هشام". صديقتي عائشة و فراح وسامية و إلى كل من أعرفه من قريب وبعيد.

سعيدة رزايقي

شكر وتقدير وعرفان

يقول تعالى" وَإِذْ تَأَذَّنَ رَبُّكُمْ لَئِنْ شَكَرْتُمْ لأَزِيدَنَّكُمْ وَلَئِنْ كَفَرْتُمْ إِنَّ عَذَابِي لَشَدِيدٌ"

--- صدق الله العظيم ---

فـي بـادئ الأمر نحمد الله على توفيقـنا فـي انجاز هـذا العمـــل

كما نتقدم بالشكر الجزيل إلى الأستاذ المحترم " لعابد بوجمعة " الـذي

سهل علينـا المهمـة ولـم يبخـل بنصائحـه و توجيهـاتـه القيمـة

في انجاز هـذه المذكـرة كمـا لا ننسى كل الأساتــذة الذيــن درسـونا

خلال مشوارنا الدراسي وكل من ساعدنا من قريب أو من بعيـــد

ولـــو بكلمة طيبــة.

سامية و سعيدة.

Table des matières

0.1 Introduction

Dans la pratique, la plupart des problèmes se ramènent à la résolution d'une équation de la forme: $f(x) = 0$

La résolution de cette équation dépend de la classe à laquelle appartient la fonction f.

Si f est un polynôme de degré n, on sait que l'équation possède n racines complexes. Si l'équation est transcendante, elle peut avoir un nombre fini, voir nul, ou infini de racine. Le problème est alors de trouver la racine dont on sait l'existence et dont, par fois, on Connaît une valeur approchée.

Les méthodes de résolution sont toujours des méthodes itératives ou Newton-Raphson.

Chapitre 1

Résolutions les équations non linéaire

1.1 Méthode itérative général

On suppose que l'équation a été mise sous la forme: $f(x) = 0$ (ceci est toujours possible en définissant par exemple $g(x) = x + f(x)$ puisque lorsque $f(x) = 0$, $g(x) = x$).

à partir d'une valeur initiale x_1, que l'on se donne, on engendre la suit:

$$\begin{cases} x_2 = f(x_1) \\ x_3 = f(x_2) \\ x_4 = f(x_3) \\ \quad . \\ \quad . \\ \quad . \\ x_n = f(x_{n-1}) \end{cases}$$

Si la suite des mesures $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ converge vers une valeur x_0, alors:
$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n-1} = x_0$, et $f(x_0) = x_0$; x_0 est une racine.

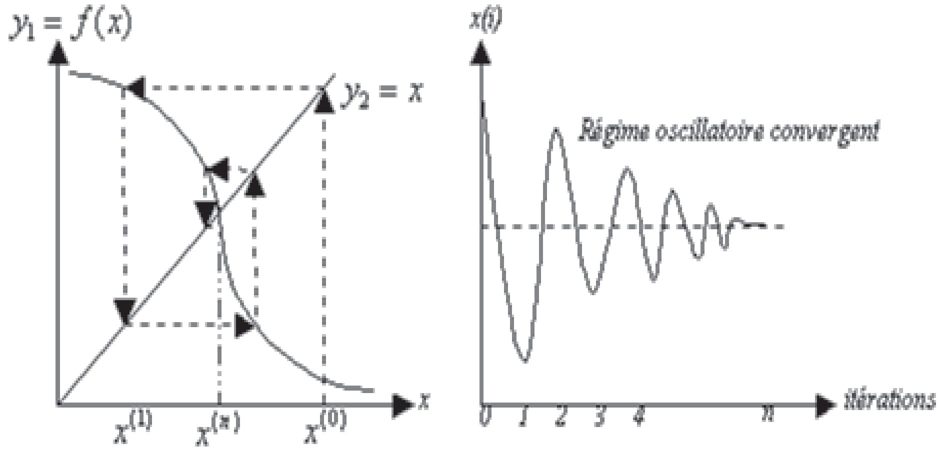


fig.1: exemple de solution convergente

Supposons que l'équation admette une racine x_0 sur l'intervalle $[a, b]$. On peut légitimement supposer que $f(x)$ prendra des valeurs sur cet intervalle. Si l'on n'ajoute pas d'hypothéses supplémentaires, on ne peut être sûr de la convergence. Il est donc impossible de donner une condition nécessaire sans expliciter la fonction f.

1.2 Méthode de Newton-Raphson

Cette méthode s'applique à des équations du type $f(x) = 0$, pour lesquelles on peut calculer la dérivée de f est $f'(x)$.

Soit $x_1$une valeur approchée de la racine s inconnue. Posons: $x_2 = x_1 + h$,et cherchons l'accroissement qu'il faut donner à x_1, de façon à ce que:

$f(x_2) = f(x_1 + h) = 0$

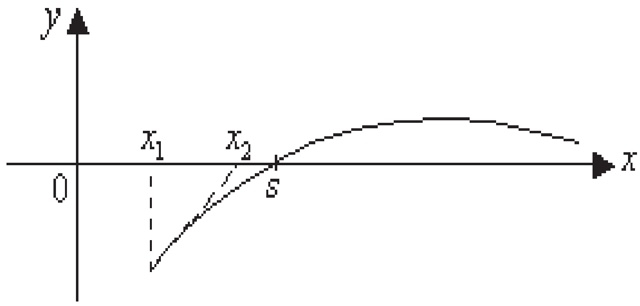
Après développement en série de Taylor à l'ordre 2, on obtient:

$f(x_1 + h) = f(x_1) + hf'(x_1) + \dfrac{h^2}{2} f''(x_1 + \theta h) = 0$

ou approximativement: $f(x_1) + hf'(x_1) = 0 \Longrightarrow h = -\dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$

et plus généralement, la solution: $x_{n+1} - x_n = h$, soit $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$

interprétation géométrique: La valeur x_2 est l'abscisse du point d'intersection avec l'axe ox de la tangente ou graphe $y = f(x)$ en x_1.



Sens de l'approximatio: Si l'on avait fait aucune approximation dans l'écriture de $f\left(x_1+h\right)=0$, on aurait obtenu, pour la racine s, l'expression suivant:

$$s=x_1-\frac{f\left(x_1\right)}{f'\left(x_1\right)}-\frac{h^2}{2}\frac{f''\left(x_1+\theta h\right)}{f'\left(x_1\right)}$$

donc:

$$s-x_1=-\frac{f\left(x_1\right)}{f'\left(x_1\right)}-\frac{h^2}{2}\frac{f''\left(x_1+\theta h\right)}{f'\left(x_1\right)}$$

$$s-x_2=-\frac{h^2}{2}\frac{f''\left(x_1+\theta h\right)}{f'\left(x_1\right)}$$

Ce qui conduit à la conclusion suivant:

- Si $f\cdot f''<0$:

x_1 et x_2 sont de part et d'autre de s: l'approximation x_2 peut alors être moins bonne que x_1. Mais si la racine est simple, $f\left(x_2\right)$ sera de signe contraire à celui de $f\left(x_1\right)$ ($f\left(x_1\right)$ et $f\left(x_2\right)$ seront alors de même signe et l'algorithme converge).

Exemple Soit l'equation $f\left(x\right)=x^2-a=0$

La formule de Newton s'écrit: $x_2=x_1-\dfrac{f\left(x_1\right)}{f'\left(x_1\right)}=x_1-\dfrac{x_1^2-a}{2x_1}=\dfrac{1}{2}\left(x_1+\dfrac{a}{x_1}\right)$

soit la formule de récurrence: $x_{n+1}=x_n-\dfrac{f\left(x_{n_1}\right)}{f'\left(x_{n_1}\right)}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)$

Quand n tend vers l'infini, x_{n+1} tend vers x_n et par conséquent:

$$x_n=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)\Rightarrow\lim_{n\to\infty}x_n=\sqrt{a}$$

Cet algorithme converge quelque soit la valeur de x_1 d'initialisation, pour que $x_1\neq 0$.

1.3 Méthode de Bairstow

La méthode de Bairstow permet de calculer des racines réelles ou complexes d'un équation polynomiale à coefficients réels. La méthode consiste à extraire (le plus exactement possible) les racines (réelles ou complexes) deux à deux (à la fin, il en rest éventuellement une), jusqu'à épuisement des n racines. Soit à trouver les racines de l'équation polynomiale suivante:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots ..... + a_n = 0$$

On effectue la division eucludiénne de f par le trinôme $x^2 + px + q$, où p et q sont à priori deux nombres quelconques:

$$f(x) = (x^2 + px + q)(b_0x^{n-2} + b_1x^{n-3} + b_2x^{n-4} \ldots + b_{n-3}x + b_{n-2}) + rx + S$$

Les coefficients $b_j(j = 0, 1, 2, 3, ..., n-2)$ dépendent de p et q, de méme que r et S.

Si $r = S = 0$, alors $f(x) = 0$ permet de donner $x^2 + px + q = 0$ (donc deux racines de $f(x)$ déjà)

Si r et/ou S ne sont pas nuls, la méthode de Bairstow va consister à déterminer par approximations successives les valeurs de p et q qui annulent r et S :

$$\begin{aligned} r(p,q) &= 0 \\ S(p,q) &= 0 \end{aligned}$$

Ce systéme peut être non liniéaire. On le supposera liniéaire au voisinage de chaque couple (p, q) fixé.

Pour cela, on se donne 2 valeurs p_0 et q_0 arbitraires. On calcule alors successivement $\triangle p$ et $\triangle q$ de telle sorte que:

$$\begin{cases} r(p_0 + \triangle p, q_0 + \triangle q) = 0 \\ S(p_0 + \triangle p, q_0 + \triangle q) = 0 \end{cases}$$

Soit au premier ordre en $\triangle p$ et $\triangle q$:

$$\begin{cases} r(p_0, q_0) + \left(\dfrac{\partial r}{\partial p}\right)_0 \cdot \triangle p + \left(\dfrac{\partial r}{\partial q}\right)_0 \cdot \triangle q = 0 \\ S(p_0, q_0) + \left(\dfrac{\partial S}{\partial p}\right)_0 \cdot \triangle p + \left(\dfrac{\partial S}{\partial q}\right)_0 \cdot \triangle q = 0 \end{cases}$$

Si l'on pose:

$$\left(\frac{\partial r}{\partial p}\right)_0 \cdot \left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)_0 - \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_0 \cdot \left(\frac{\partial r}{\partial q}\right)_0 = \delta$$

et

$$\begin{cases} S_0 \cdot \left(\frac{\partial r}{\partial q}\right)_0 + r_0 \cdot \left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)_0 = P \\ r_0 \cdot \left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)_0 + S_0 \cdot \left(\frac{\partial r}{\partial q}\right)_0 = Q \end{cases}$$

La solution du systéme précédent est (Cramer):

$$\begin{cases} \triangle p = \frac{P}{\delta} = \frac{S_0 \cdot \left(\frac{\partial r}{\partial q}\right)_0 - r_0 \cdot \left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)_0}{\delta} \\ \triangle q = \frac{Q}{\delta} = \frac{r_0 \cdot \left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)_0 - S_0 \cdot \left(\frac{\partial r}{\partial q}\right)_0}{\delta} \end{cases}$$

Les expressions qui entrent dans le calcul de δ, P et Q vont être évaluées par étapes. Les coefficients b_i sont liés aux coefficients a_i du polynome initial par l'interméiaire ses relations suivantes:

$$\begin{cases} b_\circ = a_\circ \\ b_1 = a_1 - pb_\circ \\ b_2 = a_2 - pb_1 - qb_\circ \\ b_3 = a_3 - pb_2 - qb_1 \\ \quad . \\ \quad . \\ \quad . \\ b_{x-2} = a_{x-2} - pb_{x-3} - qb_{x-4} \end{cases} \qquad (1)$$

relations auxquelles on peut ajouter:

$$\begin{cases} b_{n-1} = a_{n-1} - pb_{n-2} - qb_{n-3} \\ b_n = a_n - pb_{n-1} - qb_{n-2} \end{cases}$$

en ayant défini b_{n-1} et b_n par :$b_{n-1} = r$ et $b_n = S - pr$

Ce tableau (1) permet de calculer les b_i , r et S en fonction de p et q.

posant maintenant :

$$\frac{\partial b_k}{\partial p} = -c_k, \quad \text{avec} \quad k = 0, 1, 2, ...n-1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial b_x}{\partial p} = -c_{n-1} - b_{n-1}$$

En dérivant le tableau (1) par rapport á p ,on obtient:

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial b_0}{\partial p} = 0 \\ \frac{\partial b_1}{\partial p} = -b_0 - p\frac{\partial b_0}{\partial} \\ \frac{\partial b_2}{\partial p} = -b_1 - p\frac{\partial b_1}{\partial p} - q\frac{\partial b_0}{\partial p} \\ \frac{\partial b_3}{\partial p} = -b_2 - \frac{\partial b_2}{\partial p} - q\frac{\partial b_1}{\partial p_1} \\ . \\ . \\ \frac{\partial b_{n-1}}{\partial p} = -b_{n-2} - p\frac{\partial b_{n-2}}{\partial p} - q\frac{\partial b_{n-3}}{\partial p} \\ \frac{\partial b_n}{\partial p} = -b_{n-1} - p\frac{\partial b_{n-1}}{\partial p} - q\frac{\partial b_{n-2}}{\partial p} \end{array} \right. \qquad (2)$$

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} c_0 = b_0 \\ c_1 = b_1 - pc_0 \\ c_2 = b_2 - pc_1 - qc_0 \\ c_3 = b_3 - pc_2 - qc_1 \\ . \\ . \\ . \\ c_{n-2} = b_{n-2} - pc_{n-3} - qc_{n-4} \\ c_{n-1} = b_{n-1} - pc_{n-2} - qc_{n-3} \end{array} \right.$$

Ce tableau (2) permt de calculer les $c_i\,(i = 0, 1, 2, ..., n-1)$.

posons maintenant :

$$\frac{\partial b_k}{\partial q} = -c'_{k-2} \quad , \quad k \geq 2$$

En dérivant le tableau (1) par rapport à q, il vient:

$$\left\{\begin{array}{l} c'_0 = b_0 \\ c'_1 = b_1 - pc'_0 \\ c'_2 = b_2 - pc'_1 - qc'_0 \\ c'_3 = b_3 - pc'_2 - qc'_1 \\ \quad\quad\quad\quad . \\ \quad\quad\quad\quad . \\ \quad\quad\quad\quad . \\ c'_{x-2} = b_{x-2} - pc'_{x-3} - qc'_{x-4} \end{array}\right. \tag{3}$$

La comparaison des tableaux (2) et (3) montre que :

$$c_k = c'_k, \quad \text{pour} \quad k \leq n-2$$

On en conclut alors:

$$\frac{\partial b_{n-1}}{\partial q} = -c'_{n-3} = -c_{n-3} \ \text{ et } \ \frac{\partial b_n}{\partial q} = -c'_{n-2} = -c_{n-2}$$

Les tableaux (1) et (3) permettent de calculer les dérivèe partielles:

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial r}{\partial p} = -\frac{\partial b_{n-1}}{\partial p} = -c_{n-2} \\ \frac{\partial r}{\partial q} = -\frac{\partial b_{n-1}}{\partial q} = -c_{n-3} \\ \frac{\partial S}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p}(b_n + pb_{n-1}) = \frac{\partial b_n}{\partial p} + b_{xn-1} + p\frac{\partial b_{n-1}}{\partial p} = -c_{n-1} - pc_{n-2} \\ \frac{\partial S}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q}(b_n + pb_{n-1}) = -c_{n-2} - pc_{n-3} \end{array}\right.$$

et par conséquent,les quantités δ, P, Q recherchées sont:

$$\left\{\begin{array}{l} \delta = c^2_{n-2} - c_{n-1}c_{n-3} \\ P = b_{n-1}c_{n-2} - b_nc_{n-3} \\ Q = b_nc_{n-2} - b_{n-1}c_{n-1} \end{array}\right.$$

Mise en oeuvre de la méthode:

le calcul du premier trinôme $x^2 + px + q$ s'obtient à l'issue des phases de calcul suivantes:

1 - On fixe arbitrairment deux valeurs p_0 et q_0.

2 - On calcule alors les deux valeurs:

$$\begin{cases} p_1 = p_0 + \Delta p \\ q_1 = q_0 + \Delta q \end{cases}$$

On constitue le tableau :$b_0, b_1, b_2, ..., b_n$, et le tableau $c_0, c_1, c_2, ..., c_n$.

On calcule δ, P et Q et on en déduit: $\Delta p = \dfrac{P}{\delta}$ et $\Delta q = \dfrac{Q}{\delta}$.

3 - Si $\mid r \mid < \varepsilon$ et $\mid S \mid < \varepsilon$, alors les racines de $x^2 + px + q$ sont les racines du polynôme initial.

4 - Sinon, on remonte en 2 en reportant des valeurs p_1 et q_1 et ainsi de suite.

Les deux premières racines ayant été extraites, on applique de nouveau la méthode de Bairstow au polynôme quotient (1).

Chapitre 2

Résolution des systemes non linéaires

En pratique, on est souvent confronté à la résolution d'un systéme de type $f(x) = 0$ où $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, non linéaire, dans ce cas, il n'y à pas un algorithme général qui permet de résoudre ce système.

2.1 Méthode de Newton

2.1.1 Déscription de la méthode

Soit $f : K$ (converse) $\subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continûment et différentiable définie:

$$x = (x_1,x_{2,\ldots,}x_n) \longmapsto f(x) = (f_1(x_1,x_{2,\ldots,}x_n)\ldots, f_n(x_1,x_{2,\ldots,}x_n))$$

Considérons le système d'équations non linéaires suivants:

$$\begin{cases} f_1(x_1,x_{2,\ldots,}x_n) = 0 \\ f_2(x_1,x_{2,\ldots,}x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1,x_{2,\ldots,}x_n) = 0 \end{cases} \tag{2.1.1}$$

Le système (2.1.1) s'écrit sous la forme générale:

$$f(x) = 0_{\mathbb{R}^n} \tag{2.1.2}$$

Pour résoudre le système (2.1.2) on fera appel à la méthode de Newton qu'on va d'écrire de la racine x du système (2.1.2)

$$x^{(p)} = \left(x_1^{(p)},\ x_2^{(p)} \ldots,\ x_n^{(p)}\right).$$

La solution exacte de (2.1.2) pourra, alors se mettre sous la forme

$$x = x^{(p)} + \varepsilon^{(p)} \tag{2.1.3}$$

où: $\varepsilon^{(p)} = \left(\varepsilon_1^{(p)}, \varepsilon_2^{(p)} \ldots, \varepsilon_n^{(p)}\right)$ est l'erreur d'approximation.

En portant l'expréssion (2.1.3) dans (2.1.1) on aura:

$$f\left(x^p + \varepsilon^{(p)}\right) = 0 \tag{2.1.4}$$

Comme la fonction f est différentiable, alors: la rolation (2.1.4) peut s'écrire sous la forme:

$$f\left(x^{(p)} + \varepsilon^{(p)}\right) = f\left(x^{(p)}\right) + f'\left(x^{(p)}\right)\varepsilon^{(p)} = 0_{\mathbb{R}^n} \tag{2.1.5}$$

Où: $f'\left(x^{(p)}\right)$ est la matrice Jacobienne de f au point $x^{(p)}$

$$f'\left(x^{(p)}\right) = J_f\left(x^{(p)}\right) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}x^{(p)}\right)_{\substack{i=1,n\\ j=1,n}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}x^{(p)} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}x^{(p)} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}x^{(p)} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}x^{(p)} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}x^{(p)} & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}x^{(p)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}x^{(p)} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}x^{(p)} & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}x^{(p)} \end{pmatrix}$$

Si la matric Jacobienne $J_f\left(x^{(p)}\right)$ est inversible (ou régulière).

La relation (2.1.5) entrainne que:

$$\varepsilon^{(p)} = -J_f^{-1}\left(x^{(p)}\right) f\left(x^{(p)}\right) \tag{2.1.6}$$

de (2.1.3) et (2.1.6) on déduit:

$$\left\{\begin{array}{l} x^{(p+1)} = x^{(p)} - J_f^{-1}\left(x^{(p)}\right) f\left(x^{(p)}\right) \\ \text{avec } x^{(0)} \text{ donné dans } \mathbb{R}^n \left(x_0 \in V(x)\right) \end{array}\right. \tag{2.1.7}$$

L'algorithme (2.1.7) est dit algorithme de Newton.

Exemple:

trouver par la méthode de Newton la solution positive approchée du système d'équations:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ 2x^2+y-4z=0 \\ 2x^2-4y+z^2=0 \end{cases}$$

En portant de l'approximation initiele.

$$x_0=y_0=z_0=0,5$$

Solution:

On a:

$$f(x)=\begin{bmatrix} x^2+y^2+z^2-1 \\ 2x^2+y-4z \\ 2x^2-4y+z^2 \end{bmatrix}$$

D'où:

$$f\left(x^{(0)}\right)=\begin{bmatrix} 0,25+0,25+0,25-1 \\ 0,50+0,25-2,00 \\ 0,745-2,00+0,25 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -0,25 \\ -1,25 \\ 1,00 \end{bmatrix}$$

Formons la matrice jacobienne:

$$J_f^{(x)}=\begin{bmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 4x & 2y & -4 \\ 6x & -4 & 2z \end{bmatrix}$$

On a:

$$J_f\left(x^{(0)}\right)=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

et

$$\det J_f\left(x^{(0)}\right)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix}=-40$$

Cherchons la matrice inverse

$$J_f^{-1}\left(x^{(0)}\right) = -\frac{1}{40}\begin{bmatrix} -15 & -5 & -5 \\ -14 & -2 & 6 \\ -11 & 7 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{7}{20} & \frac{1}{20} & -\frac{3}{20} \\ \frac{11}{40} & -\frac{7}{40} & \frac{1}{40} \end{bmatrix}$$

D'après la formule (2.1.7) la première approximation est:

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= x^{(0)} - J_f^{-1}\left(x^{(0)}\right) f\left(x^{(0)}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{7}{20} & \frac{1}{20} & -\frac{3}{20} \\ \frac{11}{40} & -\frac{7}{40} & \frac{1}{40} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,25 \\ -0,25 \\ -1,00 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,375 \\ 0 \\ -0,125 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0,875 \\ 0,500 \\ 0,375 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Calculons en suite la deuxième approximation $x^{(2)}$, On a:

$$f\left(x^{(1)}\right) = \begin{bmatrix} (0,875)^2 + (0,500)^2 + (0,375)^2 - 1 \\ 2\,(0,875)^2 + (0,500)^2 - 4\,(0,375) \\ 3\,(0,875)^2 - 4\,(0,500) + (0,375)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,15625 \\ 0,28125 \\ 0,43750 \end{bmatrix}$$

et:

$$J_f\left(x^{(1)}\right) = \begin{bmatrix} 2 \times 0,875 & 2 \times 0,500 & 2 \times 0,375 \\ 4 \times 0,875 & 2 \times 0,500 & -4 \\ 6 \times 0,875 & -4 & 2 \times 0,375 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,750 & 1 & 0,750 \\ 3,500 & 1 & -4 \\ 5,250 & -4 & 0,750 \end{bmatrix}$$

d'où:

$$\det J_f\left(x^{(1)}\right) = \begin{vmatrix} 1,750 & 1 & 0,750 \\ 3,500 & 1 & -4 \\ 5,250 & -4 & 0,750 \end{vmatrix} = -64,75$$

$$J_f^{-1}\left(x^{(1)}\right) = -\frac{1}{64,75}\begin{bmatrix} -15,25 & -3,75 & -4,75 \\ -23,625 & -2,6250 & 9,625 \\ -19,25 & 12,25 & -1,75 \end{bmatrix}$$

En appliquant la formule (2.1.7), on obtient:

$$\begin{aligned}
x^{(2)} &= x^{(1)} - J_f^{-1}\left(x^{(1)}\right) f\left(x^{(1)}\right) \\
&= \begin{bmatrix} 0,875 \\ 0,500 \\ 0,375 \end{bmatrix} + \frac{1}{64,75}\begin{bmatrix} -15,25 & -3,75 & -4,75 \\ -23,625 & -2,6250 & 9,625 \\ -19,25 & 12,25 & -1,75 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,15625 \\ 0,28125 \\ 0,43750 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0,875 \\ 0,500 \\ 0,375 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,08519 \\ 0,00338 \\ 0,00705 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0,78981 \\ 0,49662 \\ 0,36993 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

De façon analogue on calcule les approximations suivantes:

$$x^{(3)} = \begin{bmatrix} 0,78521 \\ 0,49662 \\ 0,36992 \end{bmatrix}, \quad f\left(x^{(3)}\right) = \begin{bmatrix} 0,00001 \\ 0,00004 \\ 0,00005 \end{bmatrix}, \quad \text{...........etc.}$$

En se bornant à la troisième approximation, on a:

$$x = 0,7852 \ ; \quad y = 0,4996 \ ; \quad z = 0,3699.$$

2.1.2 Existance des solutions du processus de Newton

Théorème 1:

Soit V un voisinage de $\mathbb{R}^n$, $f \in C^2(V, \mathbb{R}^n)$ et $x \in B'(x_0, r) \subset V$.

Si les hypothèses suivantes sont vérifiés:

1) La matrice jacobienne $J_f(x) = \left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$, pour $x = x^{(0)}$

possède une inverse $T_0 = J^{-1}\left(x^{(0)}\right)$ avec: $\|T_0\|_{\mathbb{R}^n} \leq A_0^*$.

2) $\left\|T_0 f\left(x^{(0)}\right)\right\|_{\mathbb{R}^n} \leq B_0 \leq \dfrac{r}{2}$.

3) $\sum_{k=0}^{n}\left|\dfrac{\partial^2 f_i(x)}{\partial x_j \partial x_k}\right| \leq C \quad , \quad \forall i, j = 1, \ldots\ldots\ldots, n.$

4) Les constantes A_0, B_0 et C satisfant à l'inégalité:

$$U_0 = 2nA_0B_0C \leq 1.$$

Alors, l'algorithme de Newton (2.1.7), converge vers la solution x^* et on a l'estimation suivante:

$$\left\|x^* - x^{(0)}\right\|_{\mathbb{R}^n} \leq 2B_0 \leq r$$

Preuve: Pour la démonstration voir [1]

2.1.3 Unicité de la solution de Newton

Théorème 2:

Sous les hypothèses (1) à (4), la boule fermé $B'(x^{(0)}, 2B_0)$, contient une seule solution du systéme (2.1.1).

Preuve:

Supposons qu'en plus de la solution x^* du système (2.1.1), il existe une solution

$$x^{**} : \quad \left\|x^{**} - x^{(0)}\right\|_{\mathbb{R}^n} \|T\| \leq 2B_0 \tag{2.1.8}$$

les approximation macemives

$$x^{(p)} \; ; \quad (p = 0, 1, 2, \ldots) : \quad f\left(x^{(p)}\right) + J_{f_p}\left(x^{(p+1)} - x^{(p)}\right) = 0$$

avec:

$$J_{f_p} = J_f(x^{(p)}). \tag{2.1.9}$$

En tenant compte de fait que:

$$f\left(x^{**}\right) = 0$$

il vient:

$$J_{f_p}\left(x^{(p+1)}-x^{**}\right)=f\left(x^{**}\right)-f\left(x^{(p)}\right)-J_{f_p}\left(x^{**}-x^{(p)}\right) \tag{2.1.10}$$

et par concéquent:

$$x^{(p+1)}-x^{**}=T_p\left[f\left(x^{**}\right)-f\left(x^{(p)}\right)-J_{f_p}\left(x^{**}-x^{(p)}\right)\right] \tag{2.1.11}$$

où:

$$T_p=J_{f_p}^{-1}.$$

On aura:

$$\left\|x^{**}-x^{(p+1)}\right\|_{\mathbb{R}^n}\leq\|T\|_{\mathbb{R}^n}\left\|f\left(x^{**}\right)-f\left(x^{(p)}\right)-J_{f_p}\left(x^{**}-x^{(p)}\right)\right\|_{\mathbb{R}^n} \tag{2.1.12}$$

dans les notation du

$$(I-2):\quad \|T_p\|_{\mathbb{R}^n}\leq A_p.$$

En application:

$$\left\|f\left(x^{**}\right)-f\left(x^{(p)}\right)-J_{f_p}\left(x^{**}-x^{(p)}\right)\right\|_{\mathbb{R}^n}\leq\frac{1}{2}nc\left\|x^{**}-x^{(p)}\right\|_{\mathbb{R}^n}^2$$

Par suite:

$$\left\|x^{**}-x^{(p+1)}\right\|_{\mathbb{R}^n}\leq\frac{1}{2}nA_pc\left\|x^{**}-x^{(p)}\right\|_{\mathbb{R}^n}^2 \tag{2.1.13}$$

On pose $p=0$ on obtien:

$$\left\|x^{**}-x^{(1)}\right\|_{\mathbb{R}^n}\leq\frac{1}{2}nA_0c\left\|x^{**}-x^{(0)}\right\|_{\mathbb{R}^n}^2\leq 2nA_0B_0^2c \tag{2.1.14}$$

Par les relations:

$$\begin{cases}\mu_p=2nA_pB_pc\\ B_{p+1}=\dfrac{1}{2}\mu_pB_p\end{cases};\quad (p=0,1,2,.......) \tag{2.1.15}$$

On trouve:

$$\left\|x^{**}-x^{(1)}\right\|_{\mathbb{R}^n}\leq\mu_0B_0=2B_1 \tag{2.1.16}$$

En général:

$$\left\|x^{**}-x^{(p)}\right\|_{\mathbb{R}^n}\leq 2B_p;\quad (p=0,1,2,.......) \tag{2.1.17}$$

La grandeur $B_p \longrightarrow 0$ quand $p \longrightarrow \infty$, prassant à la limite dans l'inégalité (2.1.17) à:

$$x^{**} = \lim_{p\to\infty} x^{(p)} = x^*$$

C'est à dire la spmution du systéme (1) dans la boule fermé $B'\left(x^{(0)}, 2B_0\right)$ est unique.

2.1.4 Convergence de Newton

Théorème 3:

Si les hypothèses (1) (4) du $(I-2)$ sont remplies, les approximation successives $x^{(p)}\,(p=0,1,2,\ldots)$ vérifiant l'inégalité:

$$\left\|x^* - x^{(p)}\right\| \leq \left(\frac{1}{2}^{p-1}\right)\mu_0^{2p-1}B_0$$

Preuve:

En appliquant les relation (2.1.15) et (2.1.16) du $(I-2)$ on à:

$$\begin{aligned}\mu_p &= 2nA_pB_pC\\ &= 2n\times 2A_{p-1}\times\frac{1}{2}\mu_{p-1}B_{P-1\times}C\\ &= \mu_{p-1}\times 2A_{p-1}B_{p-1}C\\ &= \mu_{p-1}^2\end{aligned}$$

il en rénulte que:

$$\begin{cases}\mu_1 = \mu_0^2\\ \mu_2 = \mu_1^2 = \mu_0^4\\ \mu_p = \mu_0^{2^p}\end{cases} \tag{2.1.18}$$

En suite:

$$B_p = \frac{1}{2}\mu_{p-1}B_{p-1} = \frac{1}{2}\mu_0^{2^{p-1}}B_{p-1} \tag{2.1.19}$$

Donc:

$$\begin{aligned}B_p &= \frac{1}{2}\mu_0^{2^{p-1}}\times\frac{1}{2}\mu_0^{2^{p-2}}\times\ldots\ldots\times\frac{1}{2}\mu_0^{2^0}B_0\\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^p\times\mu_0^{2^{p-1}+2^{p-2}+\ldots\ldots+1}B_0\\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^p\times\mu_0^{2^p-1}B_0\end{aligned} \tag{2.1.20}$$

Comme:

$$\left\|x^{(p+1)}-x^{(p)}\right\| \leq B_p$$

On pose $q>1$:

$$\begin{aligned}
\left\|x^{(p+q)}-x^{(p)}\right\| &\leq \left\|x^{(p+1)}-x^{(p)}\right\|+\left\|x^{(p+2)}-x^{(p+1)}\right\|+\ldots.+\left\|x^{(p+q)}-x^{(p+q+1)}\right\| \\
&\leq B_p+B_{p+1}+\ldots+B_{p+q-1} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^p \mu_0^{2^p-1} B_0+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^{p+1} \mu_0^{2^{p+1}-1} B_0+\ldots.+\left(\frac{1}{2}\right)^{p+q-1} \mu_0^{2^{p+q-1}-1} B_0 \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^p \mu_0^{2^p-1} B_0\left[1+\frac{1}{2} \mu_0^{2^p}+\ldots.+\left(\frac{1}{2}\right)^{q-1} \mu_0^{2^p\left(2^{q-1}-1\right)}\right]
\end{aligned}$$

En détruit que: $\mu_0 \leq 1$.

$$\begin{aligned}
\left\|x^{(p+q)}-x^{(p)}\right\|_{\mathbb{R}^n} &\leq \left(\frac{1}{2}\right)^p \mu_0^{2^p-1} B_0\left[1+\frac{1}{2}+\ldots.+\left(\frac{1}{2}\right)^{q-1}\right] \\
&\leq \left(\frac{1}{2}\right)^p \mu_0^{2^p-1} B_0
\end{aligned}$$

En passant à la limite $q \longrightarrow \infty$, on obtient:

$$\left\|x^*-x^{(p)}\right\|_{\mathbb{R}^n} \leq\left(\frac{1}{2}\right)^{p-1} \mu_0^{2^p-1} \leq\left(\frac{1}{2}\right)^p \mu_0^{2^p-1} r.$$

Où $\mu_0=2 n A_0 B_0 C \leq 1$.

Ainsi pour $\mu_0<1$ la convergence du processus de Newton est superrapide.

En particulier, pour $p=0$ on a:

$$\left\|x^*-x^{(0)}\right\|_{\mathbb{R}^n} \leq 2 B_0 \leq r.$$

2.1.5 Stabilité de la solution par rapport à la donnée initiale

Théorème 4:

Si les typothéses (1) (4) sont remplies et si:

$$\frac{2}{\mu_0} B_0 \leq r$$

où $\mu_0=2 n A_0 B_0<1$, x^* est solution unique du systéme (2.1.1) dans la boule fermé $\left(x^{(0)}, 2 B_0\right)$, $x'(0)$ est un approximation initiale dans la boule fermé:

$$B'\left(x^{(0)}, r'\right) \text{ où } r'=\frac{1-\mu_0}{2 \mu_0} B_0 \qquad (2.1.21)$$

Preuve:

Par analogie avec les notation données ci-dessus:

$$J_{f_0} = J_f\left(x^{(0)}\right) \quad \text{et } T_0 = J_{f_0}^{-1} \quad \text{et} \quad J'_{f_0} = J_f\left(x'^{(0)}\right) \quad \text{et } T'_0 = \left(J_{f_0}\right)^{-1} \tag{2.1.22}$$

Montrons q'au point $x'^{(0)}$ on vérifie des condition analogie:

$$\begin{aligned} \|E - T_0 K'_0\|_{\mathbb{R}^n} &= \left\|T_0\left(J_{f_0} - J_{f_0}^{-1}\right)\right\|_{\mathbb{R}^n} \\ &\leq \|T_0\|_{\mathbb{R}^n} \left\|\left(J_{f_0} - J_{f_0}^{-1}\right)\right\|_{\mathbb{R}^n} \\ &\leq A_0 nc \left\|x'^{(0)} - x^{(0)}\right\|_{\mathbb{R}^n} \end{aligned}$$

Par suite:

$$\begin{aligned} \left\|\left(T_0 - J_{f_0}^{-1}\right)^{-1}\right\|_{\mathbb{R}^n} &= \left\|\left[E - \left(E - T_0 J'_{f_0}\right)\right]^{-1}\right\|_{\mathbb{R}^n} \\ &\leq \frac{1}{1 - \left\|E - T_0 J'_{f_0}\right\|_{\mathbb{R}^n}} \\ &\leq \frac{1}{1 - \dfrac{1 - \mu_0}{4}} = \frac{4}{3 + \mu_0} \end{aligned} \tag{2.1.23}$$

Il existe donc:

$$T'_0 = \left(T_0 J'_{f_0}\right)^{-1} T_0$$

et

$$\|T'_0\|_{\mathbb{R}^n} \leq \left\|\left(T_0 J'_{f_0}\right)^{-1}\right\|_{\mathbb{R}^n} \times \|T_0\|_{\mathbb{R}^n} \leq \frac{4A_0}{3 + \mu_0} = A \tag{2.1.24}$$

Détuit sons en suite:

$$\begin{aligned} \left\|T_0 f\left(x'^{(0)}\right)\right\|_{\mathbb{R}^n} &\leq \|T'_0\|_{\mathbb{R}^n} \left\|f\left(x'^{(0)}\right) - f\left(x^{(0)}\right) - J_{f_0}\left(x'^{(0)} - x^{(0)}\right)\right\|_{\mathbb{R}^n} + \left\|T_0 f\left(x^{(0)}\right)\right\|_{\mathbb{R}^n} \\ &\quad + \left\|x'^{(0)} - x^{(0)}\right\|_{\mathbb{R}^n} \\ &\leq \frac{1}{2} A_0 nc \left\|x'^{(0)}\right\|_{\mathbb{R}^n}^2 + B_0 + \left\|x'^{(0)} - x^{(0)}\right\|_{\mathbb{R}^n} + B_0 + \left\|x'^{(0)} - x^{(0)}\right\|_{\mathbb{R}^n} \\ &\leq \frac{1}{4}\mu_0 B_0 \frac{1 - 2\mu_0 + \mu_0^2}{4\mu_0^2} + B_0 + \frac{1 - \mu_0}{4\mu_0} B_0 \\ &= \frac{1 - 2\mu_0 + \mu_0^2 + 16\mu_0 + 8 - 8\mu_0}{16\mu_0} B_0 = \frac{\left(3 + \mu_0\right)^2}{16\mu_0} B \end{aligned}$$

En utilisant l'inigalité(2.1.23):

$$\begin{aligned}\left\|T_0 f\left(x'^{(0)}\right)\right\|_{\mathbb{R}^n} &\leq \left\|\left(T_0 J'_{f_0}\right)^{-1} \times T_0 f\left(x'^{(0)}\right)\right\|_{\mathbb{R}^n} \\ &\leq \left\|\left(T_0 J'_{f_0}\right)^{-1}\right\|_{\mathbb{R}^n} \times \left\|T_0 f\left(x'^{(0)}\right)\right\|_{\mathbb{R}^n} \\ &\leq \frac{3-\mu_0}{4\mu_0} B_0 = B' \qquad (2.1.25)\end{aligned}$$

En vertue des inégalités (2.1.24) et (2.1.25), ou obtien:

$$\mu' = 2ncA'B'c = 2n\frac{4A_0}{3+4\mu_0} \times \frac{3+\mu_0}{4\mu_0} B_0 c = 1$$

De plus:

$$2B' + \left\|x'^{(0)} - x^{(0)}\right\|_{\mathbb{R}^n} \leq \frac{3+\mu_0}{2\mu_0} B_0 + \frac{1-\mu_0}{2\mu_0} B_0 = 2\frac{B_0}{2\mu_0} \leq r$$

Donc:

$$2B' \leq \frac{2B_0}{\mu_0} \leq r$$

Ainsi, au point

$$x'^{(0)} \in \overline{\cup_{2B}\left(x'^{(0)}\right)} \subset \overline{\cup_{\frac{2B}{\mu_0}}\left(x^{(0)}\right)} \subset \overline{\cup_r\left(x^{(0)}\right)} \qquad (2.1.26)$$

La procédure de Newton:

$$x'^{(p+1)} = x'^{(p)} - T'_p f\left(x'^{(p)}\right)$$

Où:

$$T'_p = J_f^{-1}\left(x'^{(p)}\right); \qquad (p = 0, 1, 2, ...)$$

Dans la formule (2.1.26):

$$x'^* \in \overline{\cup_{2\frac{B}{\mu_0}}\left(x^{(0)}\right)}$$

Mais la remarque du Théoreme 3 du paragraphe précédent fait que dans le domaine $\overline{\cup_{\frac{2B}{\mu_0}}\left(x^{(0)}\right)}$ il n'y a qu'une seule solution x^* du systéme Principale (2.1.1).

donc:

$$x'^* = x^* \ \text{ et } \ x^* = \lim_{p\to\infty} x'^{(p)}.$$

Remarque:

Si $2B_0 < r$ et $\mu_0 < 1$, pour la premiere approximation initiale $x^{(0)}$, il existe toujours un voisinage dont n'importe quel point être prus comme approximation initiale de la procédure de Newton qui converge vers la solution cherchée x^*.

En effet,soit:

$$2B_0 < 2qB_0 = r$$

où $q > 1$ Pasant $\mu_0^* = \max\left(\mu_0, \dfrac{1}{q}\right)$

donc $x^{(0)}$ qui vérifié la condition

$$\left\|x'^{(0)} - x^{(0)}\right\|_{\mathbb{R}^n} \leq \frac{1-\mu_0^*}{2\mu_0} B_0.$$

2.2 Méthode des approximations successives

Soit $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et considérons le système d'équations non linéaires suivants:

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(x_1, x_2, ..., x_n) \\ x_2 = \varphi_2(x_1, x_2, ..., x_n) \\ \quad\quad . \\ \quad\quad . \\ \quad\quad . \\ x_n = \varphi_n(x_1, x_2, ..., x_n) \end{cases} \tag{2.2.27}$$

Le système (2.2.27) peut être écrit sous la forme générale:

$$x = \varphi(x) \tag{2.2.28}$$

La méthode des approximations successives consiste à faire les approximations suivantes:

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ donné dans } \mathbb{R}^n \\ x^{(P+1)} = \varphi(x^{(P)}), \quad p \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{2.2.29}$$

Si la fonction φ est contractante (c'est à dire il existe $k \in]0, 1[$ tel que:

$$\|\varphi(x) - \varphi(y)\|_{\mathbb{R}^n} \leqslant k \|x - y\|_{\mathbb{R}^n}, \quad x \neq y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Alors l'argorithme (2.2.29) converge vers la solution x^* (la solution x^* est.le point fixe de φ).

En effet, φ contractante $\Longrightarrow \varphi$ est continue sur $\mathbb{R}^n$.

En passante à la limite dans (2.2.29) on aura:

$$\lim_{p \longrightarrow \infty} x^{(p+1)} = \lim_{p \longrightarrow \infty} \varphi(x^{(P+1)}) \Longrightarrow x^* = \varphi(x^{(*)})$$

on peut écrire (2.2.28) sous la forme.

$$f(x) = x - \varphi(x) = 0_{\mathbb{R}^n}.$$

Donc le problème des approximations successives, peut être ramené à résoudre le problème non linéaire (2.2.27).

On a en vertu de la continuité de la fonction $\varphi(x)$.

$$\lim_{p \longrightarrow \infty} x^{(p+1)} = \varphi(\lim_{p \longrightarrow \infty} x^{(p)})$$

c'est-à-dire $\varepsilon = \varphi(\varepsilon)$.

Ainsi ε est une racine de l'équation vectorielle (2.2.28), x^* est une solution unique du système (2.2.28) alors: $\varepsilon = x^*$.

La méthode des approximations successives peut être appliquée également au système générale

$$f(x) = 0 \tag{2.2.30}$$

A une matrice régulière. Introduisant les notations:

$$x + Af(x) = \varphi(x) \tag{2.2.31}$$

On aura: $x = \varphi(x)$.

La fonction $f(x)$ possède une derivée continue $f'(x)$, la formule (2.2.31) entraine

$$\varphi'(x) = I + Af'(x).$$

Choisissons la matrice A telle que:

$$\varphi'(x^{(0)}) = I + Af'(x^{(0)}) = 0$$

d'où, si la matrice f' est régulière:

$$A = -\left[f'(x^{(0)})\right]^{-1}.$$

Remarquons qu'au fond c'est un processus de Newton appliqué à l'équation (2.2.30).

dans le cas du $\det f'(x^{(0)}) = 0$, il convient de choisir une autre approximation initiale $x^{(0)}$.

Il existe d'autre mode encore pour remplacer le système (2.2.30) par un système (2.2.27) équivalent.

Bibliographie

[1] B. Dimidovich, et I. Marron; *Eléments de calcul numérique,* Edition Mir 2, Pervi Rijski préoulok, Moscou, (1993).

[2] Christian Guilpin; *Manuel de Calcul Numérique Appliqué*; EDP. Sciences, 7 avenue de hoggar parc d'activité de courtaboeuf, BP 112, Les Ulis Cedex A, France.

[3] Ernst Hairer; *Introduction à l'analyse Numérique;* Université de Genève section mathématiques case postale 240 CH 1211; Genève (2001).

[4] Francis Filbet; *Analyse Numérique - Algorithme et étude mathématique. Cours et exercices corrigés;* Collection: Sciences Sup, Dunod (Mars 2009)..

[5] G. Allaire; *Analyse Numérique et optimisation;* Les Editions de l'école polycechnique; (2005).