الجمهورية الجزائرية الديموقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Minstère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

---

CENTRE UNIVERSITAIRE DE MILA
INSTITUT DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE

Réf. /12

Mémoire de fin d'étude
Présenté pour l'obtention du diplôme de

Licence Académique

Domaine : **Mathématiques et Informatique**
Filière : **Mathématiques**
Spécialité : **Mathématiques Fondamentales**

<u>Thème</u>

Théorème de l'Argument Cas-complexe

***Présenté par* :**
1- Lecheheb Randa

***Dirigé par* :**
- Boudjerida Nadjet

Année universitaire 2011-2012

Dédicace

A ma source de tendresse, ma chère mère maman Hakima,

A mon exemplaire, mon chère père Djamel,

A mon frère Abdou « Titouh »,

A mes sœurs : Mouna, Rima, Imen, Yousra,

A mon grand père, Ibrahim,

A mes grandes mère Zouina et Khadija,

A touts les familles de mes ancles et de mes tantes surtout tante Naima et Saida,

A touts mes cousines surtout, Amel, Hanan, Souad et Hadjar,

A tout ma famille.

Remerciement

Je remercie Allah, le tout puissant de m'avoir donné, la santé, la volonté et la patiente pour l'accomplissement de cette mémoire.

Mes remerciements en deuxième temps, à toute ma famille qui m'a soutient dans les moments de pénibles comme dans les moments de joie.

Egalement, je remercie M^{elle} Boudjrida Nadjet qui encadre ce mémoire et me dirige et m'encourage tout le long du travail.

Je tiens à remercier très chaleureusement l'ensemble des membres du jury qui m'ont fait l'honneur d'accepter de juger ce modeste travail.

Un grand remerciement a mes enseignants au département des sciences et technologie surtout, les enseignants des mathématique et informatique et tous les membres du département des sciences et technologie du centre universitaire de Mila.

Enfin, je ne pourrais jamais manquer de remercier mes amis, Loutchou, ma belle Hadjar, ma sœur Asma, ma pucette Choubiela, Fatima, Rima, mon frère Fakhro, Rida et tous mes collègues. Ainsi que tous mes enseignants toutes les 17 ans d'étude surtout Houria Chareum et Berri Akila.

Table des matières

Introduction Générale **2**

1 Notion de base **4**

2 Séries entières et Fonction Analytique **7**

2.1 **Rappels(Dérivabilité complexe-Holomorphie)** 7

2.1.1 **Quelques propriétés élémentaires des fonctions holomorphes** 8

2.2 **Séries entières** 9

2.2.1 **Rayon de convergence d'une série entière** 9

2.2.2 **Dérivée k$^{=ième}$une série entière** 11

2.2.3 **Calcul des coefficients d'une série entière** 11

2.3 **Fonction analytique d'une variable complexe** 12

2.3.1 **Identité entre fonctions holomorphes et analytiques** 13

2.3.2 **Zéros isolés d'une fonction analytique** 14

2.3.3 **Intégrale de Cauchy :** 15

2.3.4 **Détermination principale de la fonction Logarithme** 18

3 Points singulières, Fonctions méromorphes **21**

3.1 **singularités isolées, zéros et pôles** 21

3.2 **Fonctions Méromorphes** 23

3.2.1 **Propriétés des fonctions méromorphes** 23

3.2.2 **Fonctions holomorphes dans une couronne et sériés de Laurent** 24

3.2.3 **Classification des singularités isolées ; pôles ; résidus** . . 26

3.3 **Théorème des résidus** 28

3.3.1 **Résidus des fonctions** 28

3.3.2 **Calcul pratique des résidus** 29

4 Principe de l'Argument **31**

4.1 **Application à la détermination des nombres des pôles et des zéros d'une fonction méromorphe** 32

4.1.1 **Principe de l'argument dans le cas des fonctions analytiques** 32

4.1.2 **Principe de l'argument dans le cas des fonctions méromorphes** 33

4.2 **Résultat du théorème de l'argument** 37

Bibliographie **38**

Introduction Générale

L'analyse complexe est un domaine des mathématiques traitant des fonctions à valeurs complexes et qui sont dérivables par rapport à une ou plusieurs variables complexes.

Les fonctions dérivables sur un ouvert du plan complexes sont appellées holomorphes et satisfant de nombreuses propriétes plus fortes que celles vérifiées par les fonctions dérivables en analyse réelle. Ce mémoire est consacré au domaine de la distribution de valeurs des fonctions méromorphes. On se propose d'étudier des propriétés des fonctions méromorphes et d'examiner leurs problèmes des distributions de zéros dans un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes.

Le principe de zéros isolés permet de défini le corps des fonctions méromorphes comme ensemble des qautients des fonctions entières, c'est-à-dire de fonctions holomorphes définies sur tout le plan complexe.

Les fonctions entières apparaissent comme des généralisations des fonctions polynomes : elle se coportent comme des "Polynômes de degré infini". ce sont ainsi les fonctions analytiques les plus simples en dehors des Polynômes, n'ayant aucune singularité à distance finie et une seule singularitéé à l'infini. L'étude de ces fonctions est difficile et il reste encore de trés nombreuses questions ouverts bien que cette soit commencée depuis prés de deux cents ans.

La théorie des fonctions entières selon leurs croissance , le bien entre les zéros éventuels et le comportement de la fonction, et les relations entre la fonctions entières ont été étendus aux fonctions méromorphes.

On classe habituellement les fonctions analytiques complexes selon leur complexité et cette complexité est celle de leurs singularités. Harmis les fonctions polynomes, apparaissent ainsi les fonctions entières, les fonctions méromophes qui sont des quatients des fonctions entières et dont les seules singularilarités sont polaires, les fonctions présentant des singularités essentielles on des ponits de branchement forment ainsi les fonctions les plus compliquées parmi les fonctions analytiques d'une seule variable complexe.

Le contenue de ce travail est presque immuable ; il s'organise autour des trois grandes piliérs du sujet : les séries entières, le théorème et la formule de Cauchy, et le théorème de résidus, les séries de Taylor et Laurent ainsi que les propriètés principales des fonctions holomorphes.

la théorie des fonctions méromorphes s'illustre par l'étude plus ou moins détaillée des fonctions et de quelques fonctions dites spéciales. les applications variées de la théorie en utilisant ces fonctios forment une justification principale du temps imparti à la théorie des fonctions méromorphes au niveau procédentique .

Ce travail est réporté sur l introduction et quatre chapitres :

Le prémier chapitre consiste à rappeler précisément les définitions et notions de base du corps de nombres complexes et ses propriétés fondamentales analytiques et topologriques .

Dans le deuxiéme chapitre, on s'intéresse à la distribution des zéros de fonctios analytiques ; on définit les séries entiéres qui forment un outil de base pour l'étude des fonctions holomorphes (analytique) et de donner quelques propriétés principales de ces fonction,puis on s'intéresse à la détermination des propriétés sur les zéros usolés d'une fonction analytique et la fonction loganithmique .

Le trioxième chapitre sur les fonctions méromophes et le calcul des résidus on donne la représentation d'une fonction holomorphe dans une couronne y développe en série de Laurent ; les coéfficient de le s' expriment comme des intégrales sur un chemin fermé contenu dans la couronne, ces séries sont surtout utilisées pour étudier le comportement d' une fonction holomorphe f en z en fonction d une expression intégrale le long d'une courbe fermée qui " entoure "z. C'est la formule intégrale de Cauchy qui permet d'obtenir le développement en série entiéres de f au voisinage des points de son domaine de définition . Il est donc naturel de voulior de nouveau exploiter cette formule ici pour obtenir le développement en série de Laurent .

Enfin, dans le dernier chapitre , en s'intéresse à l'application du théorème de résidus pour démontrer le principe de l'argument pour les types des fonctions méromorphes.

Chapitre 1

Notion de base

Notation :

Nous utiliserons les notations suivantes tout au long du travail :

U : un ouvert connexe de $\mathbb{C}$.

D : le disque ouvert de $\mathbb{C}$.

Z_f : le nombre des zéros isolée de$f$.

P_f : le nombre des pôles isolée de f .

$rés(f, z_0)$: le résidus de f au point z_0.

$H(U)$: l'ensemble des fonction holomorphes sur U.

$A(U)$: l'ensemble des fonction analytiques sur U.

$M(U)$: l' ensemble des fonction méromorphes sur U.

$\int\limits_\gamma$: l'integrale sur le conteur γ.

$\theta = \arg z$: l'argument d'un nombre complexe z.

Notations de topologie générale :

Celles que nous utilisons sont les suivantes :

Espace normé, Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{k} = \mathbb{C}$, Une norme sur E est une application $N : E \to \mathbb{R}_+$ vérifiant les propriétés suivantest

1)- Séparation : $\forall x \in E : N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

2)- Homogénéité : $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{k} : N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$

3)- Sous-additivité :$\forall (x, y) \in E^2 : N(x+y) \leq N(x)+N(y)$.**(inégalité triangulaire)**

Pour $x \in E, N(x)$ est appelée **norme** de x, notée$\|x\|$.

Ouverts, Fermés : L'espace $\mathbb{C}$, corps des nombres comlexes, est muni de sa topologie d'espace vectoriel normé par $|\cdot|$ (« module» des nombres complexes ou norme euclidienne).

C'est un espace complet, ce qui veut dire que toutes les suites de Cauchy y sont convergentes.

On note

$$D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} / \, |z - z_0| < r\}$$

le disque ouvert de rayon r centré en z_0.

Les ouverts sont des réunions de disques ouverts. Par exemple, le quadrant

$$\{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Re}(z) > 0 \text{ et } \operatorname{Im}(z) > 0\}$$

est un ouvert, ainsi que la couronne

$$\{z \in \mathbb{C} / \, 1 < |z| < 2\}$$

Les fermés sont les complémentaires des ouverts, toute partie A a une adhérence Ā(le plus petit fermé qui la contient), ce qui fait que on note aussi

$$\bar{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} / \, |z - z_0| \leq r\}$$

l'adhérence du disque ouvert, qui est le disque fermé. Toute partie a aussi et un intérieur Å (le plus ouvert contenant A).

Compacts : Un séparée de cet espace telle que, de tout recouvrement de cette partie par des ouverts, on puisse extraire un sous-recouverement fini.

Les compacts de $\mathbb{C}$ sont les parties à la fois fermées et bornées (contenues dans une boule assez grande). c'est un théorème (dit de **Borel-Lebesguen** ou de **Heine-Borel),** vrai dans $\mathbb{C}$ et dans n'importe quel espace $\mathbb{R}^n$, mais pas dans n'importe quel espase topologique).

Connexes : Un ensemble $E \subseteq \mathbb{C}$ est **connexe** s'il n'est pas possible de l'´ecrire sous la forme

$$E = EO1 + EO2$$

avec $O1$ et $O2$ ouverts tels que $EO1 \neq \emptyset$; et $EO2 \neq \emptyset$; (+ d´esigne une r´eunion disjointe). Un domaine D est un ensemble connexe ouvert.

Lacet homotopes : Nous allons donner un sens précis à la déformation d'un lacet en un autre lacets

$$\begin{aligned} \gamma_0 &: [0,1] \to U \\ \gamma_1 &: [0,1] \to U \end{aligned}$$

pour tout λ de $[0,1]$, supposons l'existence de

$$\gamma_\lambda : [0,1] \to U$$

qui soit encore un lacet, pour peu que, en outre $(\lambda, t) \to \gamma_\lambda(t)$ soit continue sur $[0,1] \times [0,1]$, On voit que l'on peut passer de γ_0 à γ_1 en déformant continument γ_0 et en restant dans l'ensemble des lacets de U.

On dit alors que γ_0 et γ_1 sont homotopes.

Rappels généraux sur les nombres complexes :

L'ensemble des nombres complexes

$$\mathbb{C} = \left\{ z = x + iy, \text{ avec } (x,y) \in \mathbb{R}^2, i^2 = -1 \right\}$$

On calcule donc avec les nombres complexes comme avec les nombres réels en remplaçant partout $i^{\,2}$ par -1

Le nombre réel x est la partie réelle de z $(\operatorname{Re} z)$, le nombre réel y sa partie imaginaire $(\operatorname{Im} z)$, et i l'imaginaire pur forme, muni des lois d'addition

$$(x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i\ (y + y')$$

et de multiplication

$$(x + iy)(x' + iy') = xx' - yy' + i\ (yx' + xy')$$

le nombre $\bar{z} = x - iy$ est le conjugée de z et le nombre positif $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ est son module.

Rappelons que la norme du module vérifie par nature les propriétes.

D'homogénéité : $\forall z, z' \in \mathbb{C}; |zz'| = |z|\,|z'|$.

De séparation : $\forall z \in \mathbb{C}; |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0.$

Et l'inégalité triangulaire :$\forall z, z' \in \mathbb{C}; |z + z'| \leq |z| + |z'|$.

On en déduit : $\forall z, z' \in \mathbb{C}; |z - z'| \geq |z| - |z'|$.

Le nombre $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ est **le module** de z et **l'angle** :

$$\theta = \arg z = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} + \pi \ \text{ si } \ x < 0, y \geq 0 \\ \frac{\pi}{2} \ \text{ si } \ x = 0, y > 0 \\ \arctan \frac{y}{x} \ \text{ si } \ x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} \ \text{ si } \ x = 0, y < 0 \\ \arctan \frac{y}{x} - \pi \ \text{ si } \ x < 0, y < 0 \end{cases}$$

est son argument.

Chapitre 2

Séries entières et Fonction Analytique

2.1 Rappels(Dérivabilité complexe-Holomorphie)

Rappelons la définition d'une fonction holomorphe

Définition 2.1.1 ***(la dérivibilité) :*** *Soit U ouvert de $\mathbb{C}$, $z_0 \in U$. On dit que f est* ***dérivable*** *en z_0 si la fonction de $U \setminus \{z_0\}$ dans $\mathbb{C}$ qui à z associe $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ adt une limite quand z tend vers z_0. cette limite est alors l**a dérivée** de f en z_0. que l'on notera $f^{'}(z_0)$.*

Définition 2.1.2 ***(l'holomorphie) :*** *On dit que f est* ***holomorphe*** *sur U si elle est dérivable en tout point de U.On peut définir dans ce cas la fonction dérivée f '*de f.*

- On notera $H(U\ )$ l' ensemble des fonction holomorphes sur U.

- Si f est différentiable sur $\mathbb{C}$, elle a des dérivées partielles en x et y, et on peut écrire :

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x}\partial x + \frac{\partial f}{\partial y}\partial y \\ &= \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y})\partial z + \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y})\partial \bar{z} \end{aligned} \tag{2.1}$$

Soit encore :

$$df = \frac{\partial f}{\partial z}\partial z + \frac{\partial f}{\partial \acute{z}}\partial \bar{z} \tag{2.2}$$

En prenant les operateurs différentielles :

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial}{\partial z} &= \tfrac{1}{2}(\tfrac{\partial f}{\partial x} - i\tfrac{\partial f}{\partial y}) \\ \tfrac{\partial}{\partial \bar{z}} &= \tfrac{1}{2}(\tfrac{\partial f}{\partial x} - i\tfrac{\partial f}{\partial y}) \end{aligned} \tag{2.3}$$

La fonction différentiable f est holomorphe, si les conditions de Cauchy sont respectees à savoir si : $f = u + iv$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad et \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{2.4}$$

2.1.1 Quelques propriétés élémentaires des fonctions holomorphes

1)- Si $f : U \to \mathbb{C}$est holomorphe en $z_0$et si $g : V \to \mathbb{C}$est holomorphe en $f(z_0) \in V$.Alors :$g \circ f$ est holomorphe en z_0 et $(g \circ f)'(z_0) = f'(z_0)g'(f(z_0))$

2)- Soit $f : U \to \mathbb{C}$et soit $z_0 \in U$ Alors : f est holomorphe en z_0 si et seulement si :f est $\mathbb{R}-$différentiable en $z_0$et si sa $\mathbb{R}-$différentiable $d_{z_0}f$ au point z_0 est une application $\mathbb{C}-$linèaire.

3)- Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert U de $\mathbb{C}$, alors ; comme f est analytique dans U . elle est indéfiniment dérivable au sens complexe dans U .

4)- Si U est un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe $f : U \to \mathbb{C}$; Les conditions suivantes sont equivalentes :

$$i) - \; f \text{ est constante sur } U.$$

$$ii) - \; f' = 0 \text{ sur } U.$$

$$iii) - \; \bar{f} \text{ est holomorphe sur } U.$$

5)- Si f est une fonction holomorphe dans U, Alors $\frac{1}{f}$ est holomorphe dans U.

Exemple 2.1.3 ***:(Fonctions holomorphes)***

1. Toute fonction constante est holomorphe

2. La fonction Identique $z \to z$ est holomorphe a partir de ces fonctions initiales, On obtient par addition et multiplication toutes les fonctions f qui se mettant sous la forme suivante :

$$f(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n$$

Ou $a_0, ...; a_n$ sont des nombres complexes.Ce sont des fonctions polynomiales dans $\mathbb{C}$.

De plus, les formules de derivation appliquée à l'expression (2.5) donnent :

$$f'(z) = a_1 + 2a_2 z + ... + na_n z^{n-1}$$

2.2 Séries entières

Définition 2.2.1 *: Les Série Des fonctions les plus simples sont les séries entières (on les séries de puissances) ; qui sont des séries de la forme :*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$$

Les coefficients a_k sont donnés, la plus simple des séries entières est la série géométrique, pour laquelle ces coefficients sont tous égaux à 1 puisque : si $z \neq 1$:

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$$

- Comme il est aisé de la vérifier en multipliant les deux membres de l'équation par $1-z$ ".

- La série géométrique de raison z converge si et seulement si :$|z| < 1$.

Auquel cas :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} z^k = \frac{1}{1-z}; |z| < 1$$

Dans le cas général, les coefficients a_k déterminent les valeurs de z pour les quelles la série entière converge vià la notion de rayon de convergence.

Et le calcul de ce rayon de convergence ce fait au moyen d'une limite supérieure.

2.2.1 Rayon de convergence d'une série entière

L'ensemble des $r \geq 0$ pour lesquels

$$\sum_{n\geq 0} |a_n| r^n < +\infty$$

est évidemment un intervalle de la demi-droite $\mathbb{R}^+$et cet intervalle n'est pas vide puisque la série converge pour $r = 0$. cet intervalle peut etre ouvert à droite ou fermé ; fini ou infini et il peut se réduire au seul point 0.

Dans tous les cas ; soit ρ la borne supérieure de cet intervalle ; ρ est un nombre ≥ 0, fini ou infini éventuellement nul. On l'appelle **le rayon de convergence** de la série formelle $\sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$; L'ensemble des z tels que $|z| < \rho$. s'appel le disque de convergence de la série entière ; c'est un ensemble ouvert ; Il est vide si $\rho = 0$ c'est vraiment un disque lorsque le corps des coefficients est le corps complexe$\mathbb{C}$.

Proposition 2.2.2 *:Soit* $\rho = \sup \{r \in [0, +\infty[\,, telque\ |a_n| \, r^n < +\infty\}$.

1) pour tout $r < \rho$, *la série* $\sum\limits_{n \geq 0} a_n(z - z_0)^n$ *converge normalement pour* $|z| < r$ *; en particulier la série converge absolument pour chaque* z *tel que* $|z| < \rho$

2) la série $\sum\limits_{n \geq 0} a_n(z - z_0)^n$ *diverge pour* $|z| < \rho$ *(Ou n'affirme rien pour).*

Remarque 2.2.3 ***:(Expression du Rayon de Convergence)***

1)- Dabord, ρ *existe(la série converge pour* $r = 0$*) mais il peut etre nul,fini ou infini. On l'appelle le rayon de convergence de la série entière.*

Le disque ouvert $D(z_0, \rho) = \{z, \, |z| < \rho\}$ *est* ***le disque de convergence****. La notation de limite supèrieure, On peut doner la formule suivante(dite de "Hadamard") pour le rayon de convergence*

$$\frac{1}{\rho} = \lim_{n \to \infty} \sup |a_n|^{\frac{1}{n}}$$

2)- Si la suite $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$*à une limite* ℓ *, Alors* $\rho = \frac{1}{\ell}$*,On considère la suite*$\frac{a_{n\ +1}\ z^{n+1}}{a_n z^n}$*qui converge vers* $\ell \, |z|$ *et on conclut par le critère habituel sur les séries numériques(comparaison avec une série géométrique).*

3)- Pour les z *avec* $|z| = \rho$ *il n'y a pas de règle générale pour la convergence, divergence. Cela dépend de chaque* z *individuellement une série entière est une série de la forme*

$$\sum_{n \geq 0} a_n \left(z - z_0\right)^n$$

- Vue comme fonction du paramètre $z - z_0$ *. Elle converge au moins pour* $z = z_0$ *, mais parfois seulement pour* $z = z_0$ *;*

- On dit alors que le rayon de convergence est nul.

- Si elle converge pour tous les z *on dit que le rayon de convergence est infini.*

Exemple 2.2.4 ***(Rayon de convergence)***

1) ***la série géométrique :*** $\sum\limits_{n \geq 0} z^{\ n}$

On a : $\rho = 1$ *et l'étude direct est plus intérésants, pour tout* $z \neq 1$*,On a :*

$$1 + z + ... + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

i)- Si $|z| \geq 1$, z^n *ne tend vers 0 et la série diverge : En particulier, il y a divergence en tout point du cercle de convergence :*

ii)- Si $|z| < 1$, *Le passage à la limite donne*

$$\sum_{n \geq 0} z^n = \frac{1}{1 - z}$$

*2) **la série exponentielle** $\sum\limits_{n\geq 0}\frac{1}{n!}z^{\ n}$ a un rayon de convergence infini.*

(car $\lim\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\frac{|z|^{n+1}n!}{|z|^n(n+1)}=\lim\frac{|z|}{n+1}=0$ *donc le rayon de convergence* $\rho=\frac{1}{0}=\infty$*)*

.

2.2.2 Dérivée k$^{=ième}$une série entière

Proposition 2.2.5 *: Une série entière* $f\ (z)=a_n(z-z_0)^n$ *est holomorphe dans son disque de convergence, de dérivée*

$$f\ '(z)=na_n(z-z_0)^{n-1}$$

- Les séries entières f *et* $f\ '$ *ont le même rayon de convergence.De plus ; Si ce rayon de convergence* ρ *et déférence de* 0*.*

On a Pour $|z|<\rho f\ '(z)=\lim_h\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ *lorsque* $h\to 0$ *par valeurs* $\neq 0$*.*

Théorème 2.2.6 *Une série entière* $f\ (z)=\sum\limits_{n\geq 0}a_n(z-z_0)^n$ *est indéfiniment dérivable par rapport à* z *dans son disque de convergence de dérivée* $k^{=ième}$

$$f\ ^{(k)}(z)=\sum_{n=k}^{\infty}n(n-1)...(n-k+1)a_n(z-z_0)^{n-1}$$

2.2.3 Calcul des coefficients d'une série entière

Soit $f\ (z)$ une série entière formelle dont le rayon de convergence, soit $\rho\neq 0$.
Soit $S(z)$ la somme de la série $\sum\limits_{n\ \geq 0}a_n(z-z_0)^n$ pour $|z|<\rho$
C'est une fonction qui admet pour dérivée la fonction :

$$f\ '(z)=\sum_{n\ \geq 0}na_n(z-z_0)^{n-1}$$

A la série f ; on peut de nouveau appliquer la proposition(2.2.5) donc :

$f\ '(z)$ admet à son tour Pour $|z|<\rho$: la fonction dérivée $f\ ''(z)$ somme de la série entière

$$\sum_{n\ \geq 0}n(n-1)a_nz^{n-2}$$

série qui à le même rayon de convergence ρ et ainsi de suite.
Par récurrence on voit que $f\ (z)$ est une fonction indéfiniment dérivable pour $|z|<\rho$.
sa dérivée d'ordre n est $f\ ^{(n)}(z)=n!a_n+T_n(z-z_0)$ ou : T_n est une série d'ordre ≥ 1.

Autrement dit : $T_n(0) = 0$.D'où :

$$a_n = \frac{1}{n\,!} f^{\,(n)}(0)$$

Cette formule fondamentale montre que si l'on connait la fonction $f\ (z)$ dans le voisinage de 0, les coefficients a_n de la série entière f sont entièrement déterminés.

En conséquence : étant donnée une fonction $f\ (z)$ définit pour $|z|$ assez petit.

Il existe au plus une série entière

$$f\ (z) = \sum_{n\ \geq 0} a_n (z - z_0)^n$$

pour $|z|$ assez petit .

Proposition 2.2.7 ***(Unicité des série entière) :*** *Supposons que*

$$\sum_{n\ \geq 0} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n\ \geq 0} b_n (z - z_0)^n$$

ou l'on supposé que les rayons de convergence des deux séries entières sont plus grands ou égaux à $\rho > 0$, Alors on a : $\forall n \geq 0$

$$a_n = b_n$$

En effet : Si $f\ (z)$ est la valeur commune de deux séries entières pour $z \in D(z_0, \rho)$, On sait que :

$$f^{\,(n)}(z) = n!a_n = n!b_n \qquad \forall n \geq 0$$

D'ou $a_n = b_n$, pour $\forall n \geq 0$

2.3 Fonction analytique d'une variable complexe

Définition 2.3.1 ***(fonction analytique) :*** *Une fonction $f\ (z)$ à valeurs complexes définie dans l'ouvert D ; est dite* ***analytique*** *si pour tout point $z_0 \in D$; elle peut se développer en série entière dans un disque ouvert non vide centré en z_0 et inclus dans D, Selon*

$$f\ (z) = \sum_{n\ \geq 0} a_n (z - z_0)^n$$

Autrement dit ; il doit exister un nombre et une série entière $f\ (z) = \sum_{n\ \geq 0} a_n z^{\,n}$ de rayon *de convergence telle que :*

$$f\ (z) = \sum_{n\ \geq 0} a_n (z - z_0)^n \qquad \textit{pour} \qquad |z - z_0| < \rho(z_0)$$

On note $A(D)$ l'ensemble des fonctions analytiques.

Propriétés Analytiques

Les propriètés suivantes sont évidentes :

1)- Toute fonction analytique dans un ouvert connexe U est dérivable dans U et ses dérivées successives sont analytiques dans U.

2)- La somme, le produit de deux fonctions analytiques dans U est analytique dans U.

3)- Toute fonction f est analytique dans U, Alors $\frac{1}{f}$ est analytique dans l'ouvert U prèvé des points $z_0$tels que $f(z_0) \neq 0$.

4)- **Théorème de Liouville :**Toute fonction analytique est bornée dans $\mathbb{C}$ est constante.

5)- Tout fonction f est analytique dans U et prend ses valeurs dans U, et si g est analytique dans U, Alors la fonction composée $g \circ f$ est analytique dans U.

2.3.1 Identité entre fonctions holomorphes et analytiques

Le théorème fondamental suivant est du principalement à Cauchy : **TOUTE FONCTION HOLOMORPHE EST ANALYTIQUE**. Il est facile de vérifier que les fonctions analytiques étaient holomorphes on voit qu'il y a totale identité de ces deux notions.

En particulier toute fonction dérivable au sens complexe une fois(sur un ouvert) est dérivable au sens complexe autant de fois que l'on veut ! Cauchy et les autres mathématiciens qui le suivirent travaillaient sous l'hypothèse additionnelle que $f\ \prime$ est une fonction continue.

En 1904, **Goursat** a montré un certain théorème clé de la théorie de Cauchy en supposant seulement l'existance de $f\ \prime$. A partir de ce théorème clé, on prouve le théorème fondamental qui dit que la fonction holomorphe f est analytique et donc non seulement $f\ \prime$ est automatiquement continue, on a meme que f est infinement dérivable au sens complexe.

Théorème 2.3.2 ***(Développement en série de Taylor) :*** *Pour qu'une fonction $f\ (z)$ définie dans un ouvert U soit analytique dans U ; Il faut et il suffit que f soit holomorphe* *dans U . On peut alors la développer en série de Taylor autour de tout point z_0 de U selon*

$$f\ (z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \quad , \quad a_n = \frac{f^{\ (n)}(z_0)}{n\ !}$$

Le rayon de convergence de cette série étant au moins égale à la distance de z_0 au bord de U . Ce théorème est extrêmement puissant.

2.3.2 Zéros isolés d'une fonction analytique

Soit $f\ (z)$ une fonction analytique dans un voisinage de z_0, et soit $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$ son développement en série entière pour $z - z_0$ assez petit.

Supposons $f\ (z_0) = 0$, et supposons que $f\ (z)$ ne soit pas identiquement nulle au voisinage de z_0. soit k le plus petit entier tel que $a_k \neq 0$.

La série $\sum_{n \geq k} a_n (z - z_0)^{n-k}$ converge pour $|z - z_0|$ assez petit, et sa somme $g(z)$ est une fonction analytique au voisinage de z_0 et telle que $g(z_0) \neq 0$. Ainsi, pour z voisinage dez_0.

On a :

$$f(z) = (z - z_0)^k g(z) \tag{2.6}$$

L'entier $k > 0$ ainsi défini s'appelle **l'ordre de multiplicité** du zéro z_0 pour la fonction f.

Il est caractérisé par la relation (2.6) ; ou $g(z)$ est analytique en voisinage dez_0.

L'ordre de multiplicité k est aussi caractérisé par la condition :

$$f^{\ (n)}(z_0) = 0 \qquad \textit{pour} \qquad 0 \leq n < k, f^{\ (n)}(z_0) \neq 0$$

- Si $k = 1$; on dit que z_0 est **un zéro simple.**

- Si $k \geq 2$; on dit que z_0 est **un zéro multiple.**

La relation (2.6) et la continuité de $g(z)$ entrainent $f\ (z) \neq 0$ pour $0 < |z - z_0| < \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ assez petit).

Autrement dit, le point z_0 possède un voisinage dans lequel il est l'unique zéro de la fonction $f\ (z)$.

Proposition 2.3.3 *: Si f est une fonction analytique dans un ouvert connexe D et si f n'est pas identiquement nulle, l'ensemble des zéros de f est un ensemble discrète (Autrement dit, tous les points de cet ensemble sont isolés).En effet, f n'est identiquement nulle au voisinage d'aucun point de D, et on peut appliquer ce qui précède à chaque zéro* *de f. En particulier ; tout sous-ensemble compact de D ne contient qu'un nombre fini de zéro de la fonction.*

Exemple 2.3.4 ***(Fonctions Analytiques Usuelles) :***

Il est plus que temps de définir et d'étudier les fonctions analytiques usuelles :

*1.**Polynôme :***

$$P=\sum_{k=0}^{n} a_k z^k = P(z_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\,!}P^{(k)}(z_0)(z-z_0)^k \tag{2.7}$$

2.Fonction Exponentielle :

La série entière définis par :

$$e^{\,z}=\exp z=1+z+\frac{z^2}{2!}+...=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{\,n}}{n\,!} \tag{2.8}$$

est telle que le rapport de deux termes généraux consécutif $\frac{z}{n+1}$ tend vers 0 , lorsque $n\to+\infty$; On peut donc la majorée en module, pour z fixé et n suffisamment grand, par une série géométrique convergente.

Ainsi son rayon de convergence est $+\infty$, D'aprés le critère d'analycité, la fonction exponentielle est donc analytique sur $\mathbb{C}$, de dérivée complexe

$$\frac{d}{dz}\exp z=\exp z$$

Comme $e^0=1$, $\exp(z)\cdot\exp(\bar{z})=1$ pout tout z.

Donc : que $\exp$ ne s'annule jamais.

2.3.3 Intégrale de Cauchy :

Soit U un ensemble ouvert non vide dans $\mathbb{C}$, supposons que $f\in A(U)$.

i)- Soit γ un conteur dans U tel que son domaine associé $D\subset U$. Alors :

$$\int_{\gamma} f\ (z)dz=0$$

ii)- Soit $D=D_1\backslash\ \bar{D}_2$ un domaine régulier contenu dans U ayant les contours associés γ_1,γ_2 dans U. alors :

$$\int_{\gamma_1} f\ (z)dz=\int_{\gamma_2} f\ (z)dz$$

iii)-Soit $D = D_1 \setminus (\ \bar{D}_2 \cup ... \cup\ \bar{D}_n)$ un domaine régulier contenu dans U ayant les contours associés γ_1,$\gamma_2, ..., \gamma_n$ dans U. alors :

$$\int_{\gamma_1} f\ (z)dz = \sum_{j=2}^{n} \int_{\gamma_j} f\ (z)dz$$

Théorème 2.3.5 *Soit f une fonction analytique dans un ouvert U. Soit $z_0 \in U$, et soit γ^+ un conteur de U, ne passant pas par z, entourant z_0 et homotope à zéro dans U. On a*

$$f\ (z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^+} \frac{f\ (z)}{z - z_0} dz \tag{2.9}$$

Preuve. posons, pour $z \neq z_0$

$$g(z) = \frac{f\ (z) - f\ (z_0)}{z - z_0} \quad \text{et} \quad g(z_0) = f\ (z_0)$$

L'application g ainsi définie est analytique sur $U - \{z_0\}$, et continue sur U.
Gràce à i), on obtient

$$\int_{\gamma^+} \frac{f\ (z) - f\ (z_0)}{z - z_0} dz = 0$$

ou

$$f\ (z_0) \int_{\gamma^+} \frac{dz}{z - z_0} = \int_{\gamma^+} \frac{f\ (z)}{z - z_0} dz$$

Pour calculer $\int_{\gamma^+} \frac{dz}{z-z_0}$, on paramètre γ^+ par $t \to \alpha + r\exp(it)$. il vient

$$\begin{aligned} \int_{\gamma^+} \frac{dz}{z - z_0} &= \int_0^{2\pi} \frac{ir\exp(it)}{\alpha - z_0 + r\exp(it)} dt \\ &= i \int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 + \frac{\alpha - z_0}{r} \exp(-it)} \\ &= i \int_0^{2\pi} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{z_0 - \alpha}{r} \right)^n \exp(-int)dt \end{aligned}$$

car $|z_0 - \alpha| < r$, Donc

$$\int_{\gamma^+} \frac{dz}{z - z_0} = i \sum_{n \geq 0} \left(\frac{z_0 - \alpha}{r} \right)^n \int_0^{2\pi} \exp(-int)dt = 2\pi i$$

Finalement

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^+} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Ce qui fait la démonstration. ■

Notant r le rayon de γ^+ tel que $r < \rho$. On va appliquer la formule intégrale du théorème, en prenant pour γ^+le cercle de centre z_0 et de rayon r parcouru dans le sens direct

$$f\ (z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^+} \frac{f\ (\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta \tag{2.10}$$

on a $|z - z_0|\ < |\zeta - z_0| = r$ ce qui permet d'écrire la fonction $\frac{1}{\zeta - z_0}$qui figure sous le signe d'intégration peut être développée en série

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\zeta - z_0} &= \frac{1}{\zeta - z_0 + z_0 - z} \\
&= \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} \\
&= \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n
\end{aligned}$$

Cette dernière série est convergente pour $\zeta \in \gamma^+$, d'après

$$\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| = \frac{|z - z_0|}{r} < 1$$

par suit

$$\begin{aligned}
f\ (z) &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n \frac{f\ (\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta \qquad (2.11) \\
&= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \frac{f\ (\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta
\end{aligned}$$

On peut donc intégrer terme à terme, et on obtient une série normalement convergente.

pour $|z - z_0| < \rho$

$$f\ (z) = \sum_{n\ =0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

ou les coefficients a_n sont donnés par les intégrales

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^+} \frac{f\ (\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$$

L'expression

$$a_n = \frac{f\ ^{(n)}(z_0)}{n!}$$

suit de l'expression générale de **Taylor** pour les coefficients d'une série entière ou de la formule **intégrale de Cauchy** pour la nième d'une fonction analytique.

Théorème 2.3.6 ***(formule d'intégrale de Cauchy d'ordre supérieur)*** *si f est analytique sur U alors elle est indéfiniment dérivable sur U, sa dérivée nième étant donnée pour $z \in U$ et γ un conteur entourant z homotope à zéro dans U par*

$$f\ ^{(n)}(z) = \frac{d\ ^n f}{dz\ ^n} = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma^+} \frac{f\ (\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \tag{2.12}$$

La formule intégrale de Cauchy

$$f\ (z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^+} \frac{f\ (\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

nous donne la preuve de (2.8) à l'ordre 0. Si f est $n-1$ fois dérivable avec $n-1 \geq 0$ et (2.11) est vérifiée à l'ordre $n-1$, alors en appliquant la dérivation sous le signe somme à $\varphi = f$ qui continue sur U , on obtient que $f\ ^{(n-1)}$ est dérivable et que $f\ ^{(n)}$ est donnée par (2.11) à l'ordre n.

2.3.4 Détermination principale de la fonction Logarithme

On dit que $\omega \in \mathbb{C}$ est une **détermination du logarithme** de z (ou brièvement, ω est une détermination de $\log z$), si $\exp \omega = z$.

Notons qu'aucune détermination de $\log(0)$ n'est possible,

car $\exp \omega \neq 0$ pour tout $\omega \in \mathbb{C}$.
Par contre, si $z \neq 0$, il existe une infinité dénombrable de détermination de $\log z$.
En effet, si $z \neq 0$,
posons :

$$\omega = \ln |z| + i(\arg \omega + 2\pi n)$$

Où n est un entier quelconque, ici, $\ln r$ pour $r > 0$, est l'unique nombre réel tel que

$$\exp(\ln r) = r$$

Dont l'existence et l'unicité résulte de la nature strictement croissante de la fonction réelle $x \to \exp(x), x \in \mathbb{R}$.

Alors :

$$\exp \omega = \exp(\ln |z|) \exp(i \arg z) \exp(2\pi i n)$$

$$= |z| \exp(i \arg z) = z$$

Selon la définition de $\arg z \in]-\pi, \pi]$.
Nous définissons

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z, \quad z \in \mathbb{C}.$$

$\ln z$ s'appelle **la détermination principale** de $\log z$ et la fonction ln s'appelle la branche principale du logarithme complexe.

Notons que notre définition de $\ln z$ $(z \neq 0)$ était rendue possible par l'utilisation de la fonction argument (avec $\arg z \in]-\pi, \pi]$, définit pour tout $z \neq 0$).

On pourrait définir une infinité d'autres déterminations en changeant la définition de la fonction argument.

Cette détermination principale de la fonction logarithme vérifie bien

$$\forall \omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-, \exp(\ln \omega) = \omega$$

Et de plus

$$\frac{d\ \ln \omega}{d\ \omega} = \frac{1}{\omega}$$

Fig.2 {**Gauche :** exemple de domaine restreint de définition de **l'exponentielle** assurant son injectivité. **Droite :** domaine image par l'exponentielle, sur lequel est définie la détermination principale de la fonction **logarithme**}.

Chapitre 3

Points singulières, Fonctions méromorphes

Nous considérons dans cette section les fonctions méromorphe dans $\mathbb{C}$(resp ; dans un ouvert connexe de ; les fonctions rationnelles sont de telles fonctions.permis les fonctions rationnelles les plus simples sont de la forme $c\ (z - z_0)$ avec z_0, c dans $\mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{Z}$.

Nous démontrons qu'une grande classe de fonctions méromorphes dans $\mathbb{C}$ s'ecrit comme $\sum_{n\ \in \mathbb{Z}} c_n\ (z - z_0)$, c'est donc une généralisation d'un résultat connu d'lgebre qu 'une fonction rationnelle peut être décomposé en une somme d'eléments simples .

3.1 singularités isolées, zéros et pôles

Définition 3.1.1 ***(points singuliers isolés) :*** *Un point z_0 est appelé* ***singulier isolé*** *d'une fonction $f\ (z)$ s'il existe un voisinage de ce point dans lequel la fonction $f\ (z)$ est analytique, sauf au point $z = z_0$ lui-même.*

Autrement dit : un point z_0 est ***point singulier*** *d'une fonction f, si $f\ (z)$ n'est pas égale à la somme d'une série entière convergente au point z_0 .*

Le point z_0 est appelé ***point singulier éliminable*** *de la fonction $f\ (z)$ si cette fonction admet une limite finie au point z_0 .*

Exemple 3.1.2 *Soit $z_0 = \frac{e^{\ z}-1}{z}$. soit $z_0 = 0$ un point singulier pour la fonction $z_0$on a :*

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{e^{\ z} - 1}{z} = 1$$

par conséquent, le point $z_0 = 0$ est un point singulier éliminable.

Définition 3.1.3 ***(zéros d'une fonction) :*** *Soient U un ouvert connexe et $f\ (z)$ une fonction analytique en un point z_0.Le point z_0 est appelé* ***zéro d'ordre****(ou de multiplicité)*

n.de la fonction $f\ (z)$ si les conditions ci-dessous sont vérifiées :

$$f\ (z_0) = 0, f\ '(z_0) = 0, ..., f\ ^{(n-1)}(z_0) = 0, f\ ^{(n)}(z_0) \neq 0$$

*Si $n = 1$:Le point z_0 est un **zéro simple.***

Théorème 3.1.4 ***(zéros isolée) :*** *Soit f une fonction non nulle et non constante dans un ouvert connexe U de $\mathbb{C}$. Alors l**es zéros** de f sont des **points isolés**.*

Proposition 3.1.5 ***:*** *Le point z_0 constitue un zéro d'ordre n de la fonction $f\ (z)$, qui est analytique en ce point, si et seulement si dans un certain voisinage du point z_0 l'égalité*

$$f(z) = (z - z_0)^n \phi(z) \qquad \textit{est vérifiée.}$$

Ici la fonction $\phi(z)$ est analytique au point z_0 et $\phi(z) \neq 0$.

Définition 3.1.6 ***(pôles d'une fonction) :****Soit f une fonction analytique sur un ouvert connexe U de C sauf au point z_0*

*1). Le point z_0 est appelé **pôle** de la fonction $f\ (z)$ si : $\lim_{z\to z_0} f\ (z) = +\infty$*

*2).le point z_0 est un **pôle** de la fonction f ;il faut et il suffit que ce point soit un zéro pour la fonction*

$$g(z) = \frac{1}{f\ (z)}$$

*3). Le point $z_0$est appelé **pôle** d'ordre $n(n \geq 1)$ de la fonction $f\ (z)$ si ce point constitue un zéro d'ordre n. pour la fonction $g(z) = \frac{1}{f\ (z)}$ dans le cas ou $n = 1$,le point $z_0$est un **pôle simple**.*

Théorème 3.1.7 ***(Ordre d'un pôle)*** *: Le point constitue un pôle d'ordre n d'une fonction f , qui est analytique sur un ouvert connexe U de $\mathbb{C}$ sauf en ce point, Si et seulement si dans certain voisinage de point z_0, l'égalité :*

$$f\ (z) = \frac{\phi(z)}{(z - z_0)^n} \ \textit{est vérifiée,Ou lafonction } \phi \textit{ est analytique au point } z_0 \textit{ et } \phi(z_0) \neq 0.$$

Théorème 3.1.8 ***(Pôle isolée) :*** *Soit une fonction analytique non nulle et non constante dans un ouvert connexe U de $\mathbb{C}$ sauf au point . Alors les pôles de f sont des isolées.*

Notation : On noté

Z_f : l'ensemble **des zéros** de la fonction f.

P_f : l'ensemble **des pôles** de la fonction f.

3.2 Fonctions Méromorphes

Définition 3.2.1 *:On appelle fonction **méromorphe** dans un ouvert connexe D une fonction $f\ (z)$ définie et analytique dans un ouvert $D^{'}$ obtenu en enlevant de D un ensemble de points isolés, dont chacun est un **pôle** pour $f\ (z)$.*

Définition 3.2.2 *: Si une fonction f ne possède que des singularités isolées dans un ouvert connexe U de $\mathbb{C}$; f est dit **méromorphe** dans U.*

Remarque 3.2.3 *: Selon cette définition, une fonction f est analytique dans U sera un cas particulier d'une fonction méromorphe dans U.*

Au voisinage de chaque point de D (sans exception) ; f peut donc se mettre sous la forme du quotient de deux fonctions analytiques $\frac{f\ (z)}{g\ (z)}$, le dénominateur n'étant pas identiquement nul.

Proposition 3.2.4 *:On définit d'une manière évidente la somme et le produit de deux fonctions méromorphes : les fonctions méromorphes dans D forment un anneau et même une algèbre.*

Notation : On note :
$M(U)$ l'**ensemble des fonctions méromorphes.**

Remarque 3.2.5 *: Le quatient de deux fonctions entières est une fonction méromorphe ; D'après le théorème de factorisation d'Hamard qui affine que toute fonction méromorphe peut s'écrire comme le rapport de deux fonctions entières(dont celle du dénominateur n'est pas identiquement nulle) : les **pôles** de la fonction correspent au zéros du dénominateur.*

3.2.1 Propriétés des fonctions méromorphes

i. L'ensemble des fonctions méromorphes est un corps des fractions de l'anneau des fonctions analytiques.

ii. La somme de deux fonctions méromorphes dans U est une fonction méromorphe dans U.

iii. Le produit de deux fonctions méromorphes dans U est une fonction méromorphe dans U.

iv. La dérivée d'une fonction méromorphe est méromorphe.

v. La fonction f est méromorphe et non nulle dans un ouvert connexe U de $\mathbb{C}$, et si Z_f et P_f sont respectivement l'ensemble de ses zéros et l'ensemble des ses pôles : $\frac{1}{f}$ existe sur $U\ /Z_f$ (les zéros de f deviennent des pôle de$\frac{1}{f}$)

vi. L'ensemble des fonctions méromorphes sur un ouvert connexe U de $\mathbb{C}$ forment un corps

viii. En effet ; $f\ '$est définie et analytique en tout point de D qui n'est pas un pôle de f .il reste à montrer que si z_0 est un pôle de f, z_0 est aussi un pôle de $f\ '$.

Or ; on a pour z voisin de z_0 :

$$f\ (z) = \frac{1}{(z-z_0)^{(k)}} g(z)$$

$g(z)$ étant analytique ; avec : $g(z_0) \neq 0; k > 0$

On a donc ; pour $z \neq z_0$

$$f\ '(z) = \frac{1}{(z-z_0)^{(k+1)}} \left[(z-z_0)\, g'(z) - kg(z)\right]$$

Et comme :$g_1(z_0) \neq 0$

z_0 : est bien un pôle de $f\ \ '$ d'ordre $(k+1)$.

3.2.2 Fonctions holomorphes dans une couronne et sériés de Laurent

Une couronne est la partie du plan délimitée par deux cercles concentriques.si r_1 et r_2 sont deux nombres réels

positifs vérifiant $r_1 < r_2$; On notera : $C\ (\ r_1\ ,\ r_2\ ) = \{z \in \mathbb{C} \setminus r_1 < |z-z_0| < r_2\}$. (le C est pour couronne)

On autorise r_1 à être nul (la couronne est alors un disque épointé) et / ou r_2 à être infini.

Soit $(a_n)_{n\ \in\mathbb{Z}}$ une suite des nombres complexes telle que si : ρ (reps δ) est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$(reps :$\sum_{n\geq 0} a_{-n}(z-z_0)^{-n}$) ; On ait $\rho \geq r_2$ et $\delta \geq \frac{1}{r_1}$

Alors :

- La série $\sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$ converge normalement sur les compacts du disque de rayon r_2 et Y définit une fonction holomorphe.

- La série $\sum_{n\geq 0} a_{-n}(z-z_0)^{-n}$ converge normalement sur les compacts du disque de rayon $\frac{1}{r_1}$ et donc $\left(z=\frac{1}{\omega}\right)$; La série converge normalement sur les compacts de $\{z \in \mathbb{C} \setminus |z-z_0| > r_1\}$et Y définit une fonction holomorphe.

- Donc, Leur somme$\sum_{n\geq Z} a_n(z-z_0)^n$ est une série converge normalement sur les compacts de la couronne C (r_1 , r_2) et définit une fonction holomorphe sur cet ouvert. Le but de ce paragraphe est de montrer la réciproque, à savoir que toute fonction holomorphe sur le couronne est somme d'une série de ce type, **dite série de Laurent.**

Définition 3.2.6 *: On dit qu'une fonction f, définie dans un couronne*

$$C(r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} \setminus r_1 < |z-z_0| < r_2\}$$

est développable en série de Laurent dans cette couronne, s'il existe une série de Laurent $\sum_{n\geq Z} a_n(z-z_0)^n$ soit égal à f (z) en tout point de la couronne.

En intégrant terme à terme la série $\sum_{n\geq Z} a_n(z-z_0)^n$ sur un conteur fermé γ^+de centre z_0 et de rayon $r_1 < r < r_2$, on obtient

$$\int_{\gamma^+} f\ (z)dz = \sum_{n\ \in Z} a_n \int_{\gamma^+} (z-z_0)^n dz = (2\pi i)\, a_{-1}$$

de meme, pour $k \in \mathbb{Z}$

$$\int_{\gamma^+} f\ (z)(z-z_0)^{k-1}dz = \sum_{n\ \in Z} a_n \int_{\gamma^+} (z-z_0)^{n-k-1}dz = (2\pi i)\, a_k$$

*Ces formule et le théorème suivant donnent que la fonction f étant donné, les coefficients a_n du développement de Laurent de f , si un tel développement existe, sont déterminés de manière unique, on l'appelle le **développement de Laurent** de f.*

Théorème 3.2.7 ***(Développement en série de Laurent) :****Toute fonction holomorphe dans une couronne C (r_1 , r_2) est développable en **série de Laurent** dans cette couronne.*

Les coefficients du développement de f se calculent par la formule :

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C(0,r)} z^{-n-1} f(z) dz \tag{3.1}$$

Pour :$r \in \left]r_1, r_2\right[$ arbitraire.

3.2.3 Classification des singularités isolées ; pôles ; résidus

Un point z_0 est une singularité isolées pour une fonctio f , si elle est analytique dans un disque pointé

$$D(z_0, r) = \{z \text{ tels que } 0 < |z - z_0| < r\}$$

centré en z_0.

Suivant la nature du **développement de Laurent** en z_0, on distinge trois cas :

1. Pour qu'un point z_0 soit un point **singulier éliminable** d'une fonction f, il faut et il suffit que le dévloppement en serie de f au voisinage du point z_0 ne contienne pas de partie principale.

2. Pour qu'un point z_0 soit **un pôle** d'une fonction f , il faut et il suffit que la partie principale du développement en série de Laurente de f au voisinage du point z_0 ne contienne qu'un nombre infini de termes

$$f\ (z) = \frac{b_{-k}}{(z - z_0)^k} + ... + \frac{b_{-1}}{(z - z_0)} + \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n, \quad b_{-k} \neq 0 \tag{3.2}$$

L'exposant le plus grand de la différence $(z - z_0)$ qui figure aux dénominateurs des termes constitutifs de la partie principale de la serie de Laurent conside avec **l'ordre du pôle.** (Ici d'après la formule (3.3) on dit que z_0 est un pôle d'ordre k de f) .

Si $k = 1$ on dit que z_0 est un **pôle simple** de f.

3.un point z_0 est un point **singulier essentielle** d'une fonction si et seulement si la partie principale du développement en série de Laurent de cette fonction au voisinage du point z_0 contient une infinité de termes.

Proposition 3.2.8 *: Soit une fonction f analytique sur $U - \{z_0\}$ admet un pôle d'ordre $n > 0$ on z_0 si et seulement si :*

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^n f\ (z) \text{ existe et est non nulle finie.}$$

Cette limite n'est alors autre que le coefficient a_{-n}du développent de Laurent de f enz_0.

Exemple 3.2.9 ***(Classification des singularités isolées)***

1)- La fonction $f\ (z) = \frac{\sin z}{z}$ définie sur $\mathbb{C}^*$, et la limite

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = 1 \qquad \text{(existe)}$$

La fonction n'admet qu'une ***singularité éliminable*** *en $z_0 = 0$; puisque le dévleoppement de Taylor de $\sin z$ en zéro donne :*

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + ...$$

2)- La fonction $g(z) = \frac{\exp 2z}{(z-1)^3}$ définie sur $\mathbb{C} - \{1\}$

Par le changement de variable $u = z - 1$, on a

$$g(u) = \frac{\exp 2(u+1)}{u^3} = \frac{(\exp(2u) - \exp 2)}{u^3} = (\frac{\exp 2}{u^3}) \exp(2u)$$

Par le développement de Taylor de $\exp(2u)$ en zéro, on a

$$\begin{aligned} g(u) &= \exp 2(1 + 2u + \frac{(2u)^2}{2!} + \frac{(2u)^3}{3!} + ...) \\ g(z) &= \frac{\exp 2}{(z-1)^3} + 2\frac{\exp 2}{(z-1)^2} + 2\frac{\exp 2}{z-1} + 4\frac{\exp 2}{3} + \frac{2}{3}\exp 2(z-1) + ... \end{aligned}$$

la partie principale est finie, donc $z = 1$ est un pôle d'ordre 3

3)- La fonction $h(z) = \exp(\frac{1}{z})$ définie sur $\mathbb{C}^*$.

On pose $u = \frac{1}{z}$, on obtient le développement en série de Laurent de la fonction h au voisinage du point $z_0 = 0$

$$h(z) = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + ...$$

Ce développement contient une infinité de termes à puissances négatives. Par conséquent, le point $z_0 = 0$ est un point singulier essentiel de la fonction h

Proposition 3.2.10 ***(dérivation terme à terme d'une série de Laurente)***

f vérifie les hypothèse du théorème de développement en série de Laurente, alors la série de Laurent et sa dérivée f 's'obtient par dérivation terme à terme de la série de Laurent de f

3.3 Théorème des résidus

Théorème 3.3.1 *: Si une fonction $f\ (z)$ est analytique sur la frontière $\mathbb{C}$ d'un domaine D et partout à l'intérieur de ce domaine, sauf en un nombre fini de points singuliers $z_1, z_2, ..., z_n$. Alors :*

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Résf(z_k) \tag{3.3}$$

3.3.1 Résidus des fonctions

Soit z_0 un point singulier isolé d'une fonction $f\ (z)$.

On appelle résidu de la fonction $f\ (z)$ au point z_0 le nombre désigne par le symbole *Rés* $f\ (z_0)$ qui vérifié l'égalité

$$Résf(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma f(z)dz \tag{3.4}$$

On utilise également les notations :

$$\left(Rés\left[f\ (z), z_0\right]; Rés\ f\ (z)\right)$$

Comme conteur γ

On peut prendre une circonférence centrée z_0 en et de rayon suffisamment petit pour qu'elle ne dépasse pas les frontières du domaine d'analycité de la fonction $f\ (z)$ et ne contienne pas dans son intérieur d'autres points singuliers de cette fonction.

- Le résidu de la fonction est donnée par le coefficient de la première puissance négative dans le développement en série de Laurent de $f\ (z)$ au voisinage de point $z = z_0$

$$Résf\ (z_0) = c_{-1} \tag{3.5}$$

Le résidu en un point singulier éliminable est nul.

Si le point z_0 est un pôle d'ordre n de la fonction $f\ (z)$,

Alors

$$Résf\ (z_0) = \frac{1}{(n\ -1)!}\lim_{z\ \to z_0}\frac{d^{\ n-1}}{dz^{\ n-1}}\left\{f\ (z)(z-z_0)^n\right\} \tag{3.6}$$

S'il s'agit d'un pôle simple ($n = 1$).

$$Résf\ (z_0) = \lim_{z \to z_0} [f\ (z)(z - z_0)^n] \tag{3.7}$$

Si la fonction $f\ (z)$ peut être présentée dans le voisinage du point z_0 comme le quotient de deux fonctions analytiques

$$f\ (z) = \frac{\phi(z)}{\psi(z)}$$

De plus, si $\phi(z_0) \neq 0, \psi(z_0) = 0$; Alors que $\psi^{'}(z_0) \neq 0$.

C'est-à-dire si z_0 est un pôle simple de la fonction $f\ (z)$

Alors :

$$Résf\ (z_0) = \frac{\phi(z)}{\psi^{'}(z)} \tag{3.8}$$

Si le point z_0 est un point singulier essentiel de la fonction $f\ (z)$, pour obtenir *Rés* $f\ (z_0)$; il faut trouver c_{-1} le coefficient dans le développement en série de Laurent de la fonction $f\ (z)$ au voisinage du point. Ce coefficient sera justement *Rés* $f\ (z_0)$.

Exemple 3.3.2 *:trouver les résidus de la fonction* $f(z) = -\frac{\sin z^{\ 2}}{z^{\ 3} - \frac{\pi}{4} z^{\ 2}}$ *En ses points singuliers.*

Les points singuliers de la fonction $f\ (z) = -\frac{\sin z^{\ 2}}{z^{\ 3} - \frac{\pi}{4} z^{\ 2}}$ *sont* $z = 0$ *et* $z = \frac{\pi}{4}$

Solution 3.3.3 *Au point* $z = 0$ *; On a :* $Résf\ (0) = 0$

Donc : le point $z = 0$ *est un point singulier éliminable de la fonction* $f\ (z)$ *.*

Au point $z = \frac{\pi}{4}$ *; on a :* $Résf(\frac{\pi}{4})\ == \frac{16}{\pi^{\ 2}} \sin \frac{\pi^{\ 2}}{16}$.

Donc : le point $z = \frac{\pi}{4}$ *est un pôle (d'ordre* 1*) de la fonction* $f\ (z)$*.*

3.3.2 Calcul pratique des résidus

***Cas d'un pôle simple :**

Soit z_0 un pôle simple de f ;

on a donc :

$$f\ (z) = \frac{1}{z\ - z_0} g(z)$$

Ou g est holomorphe au voisinage de z_0 ;avec $g(z_0) \neq 0$

Soit $g(z) = \sum_{n \geq 0} a_n(z\ - z_0)^n$ le développement de Taylor de $g(z)$ au voisinage de z_0 ; on voit que, dans le développement de Laurent de $f\ (z)$,le coefficient de $\frac{1}{z\ - z_0}$ est égal à

$g(z_0)$. on a donc

$$Rés(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$$

Si f est donnée sous la forme d'un quotient P/Q .P et Q étant holomorphe au voisinage de z_0 .

et z_0 un zéro simple de Q avec : $P(z_0) \neq 0$

On a :

$$Rés(f, z_0) = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$$

Q' désignant la dérivée de Q.

***cas d'un pôle multiples :**

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^k} g(z)$$

Ou $g(z)$ est holomorphe au point z_0 avec :$g(z_0) \neq 0$

Le résidu de $f(z)$ est égal au coefficient de $(z - z_0)^{k-1}$ dans le développement de Taylor de $g(z)$ au point z_0

Tout revient donc à calculer un développement limité de $g(z)$.

Pour cela, il est souvent commode de prendre comme nouvelle variable $t = z - z_0$.

Chapitre 4

Principe de l'Argument

Le théorème des résidus est une conséquence directe de la formulée de Cauchy ; il permet le calcul efficace de nombreuses intégrales et séries, dans ce chapitre on donne une application théorique du théorème des résidus que l'on nomme le principe de l'argument ; une conséquence de ce principe est le théorème de Rouché qui est très utile pour l'étude des racines de certaines équations.

Définition 4.0.4 ***(dérivée logarithmique) :*** *Soit f une fonction méromorphe au voisinage de z_0. On dit* ***« la dérivée logarithmique »*** *de f l'expression*

$$h(z) = \frac{f\ '(z)}{f\ (z)}. \tag{4.1}$$

Définition 4.0.5 ***(résidu logarithmique) :*** *Soient U un ouvert connexe et γ^+ un conteur fermé contenu dans U. Soit f une fonction méromorphe sur γ^+ on dit* ***« le résidu logarithmique »*** *de f sur , l'expression*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^+} h(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^+} \frac{f\ '(z)}{f(z)}dz \tag{4.2}$$

Théorème 4.0.6 ***: Le résidu logarithmique*** *d'une fonction f par rapport à un conteur fermé γ^+ est égal à la variation $\triangle \arg f(z)$ de l'argument de la fonction $f\ (z)$, enregistré lors du parcours du conteur γ^+, divisé par 2π.*

4.1 Application à la détermination des nombres des pôles et des zéros d'une fonction méromorphe

4.1.1 Principe de l'argument dans le cas des fonctions analytiques

Théorème 4.1.1 *: Soient f une fonction analytique dans un ouvert connexe U et γ^+ est un conteur ayant pour domaine associé D. **Le résidu logarithmique** de f par rapport à γ^+ est donné par **le nombre des zéros** de f dans U, qui est égale*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^+}\frac{f\ '(z)}{f\ (z)}dz = z_f \tag{4.3}$$

Preuve. : f une fonction analytique au voisinage de z_0, On se propose de calculer le résidu de la dérivée logarithmique $\frac{f'}{f}$ au point z_0.On a

$$f\ (z) = (z - z_0)^n g(z)$$

Ou $g(z)$ est analytique au point z_0, $g(z) \neq 0$, l'entier n est ≥ 0 qui correspond à la multiplication de z_0.

On dérive la fonction f, donc

$$f\ '(z) = n_1(z - z_0)^{n-1}g(z) + (z - z_0)^n g'(z).$$

On divise cette expression par f , on obtient

$$\frac{f\ '(z)}{f\ (z)} = \frac{n_1(z - z_0)^{n-1}}{(z - z_0)^n} + \frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{n}{(z - z_0)} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

Le quotient ci-dessus a un pôle simple en z_0 puisque g est analytique et non nulle au voisinage de z_0.

1ère méthode : on peut maintenant calculer le résidu en z_0

$$\begin{aligned} res(\frac{f\ '}{f}, z_0) &= \lim_{z\to z_0}\left((z - z_0)\,\frac{f\ '(z)}{f\ (z)}\right) \\ &= \lim_{z\to z_0}((z - z_0)\,\frac{n}{(z - z_0)} + (z - z_0)\,\frac{g'(z)}{g(z)}) \\ &= \lim_{z\to z_0}((z - z_0)\,\frac{n}{(z - z_0)}) = n. \end{aligned}$$

Par le théorème de résidu, on trouve le résultat

$$\int_{\gamma^+} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i \; res(\frac{f'}{f}, z_0) = (2\pi i)n$$

2^{éme} **méthode :** par l'intéggation de $\frac{f'}{f}$, on trouve

$$\begin{aligned} \int_{\gamma^+} \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \int_{\gamma^+} (\frac{n}{(z-z_0)} + \frac{g'(z)}{g(z)}) dz \\ &= \int_{\gamma^+} \frac{n}{(z-z_0)} dz + \int_{\gamma^+} \frac{g'(z)}{g(z)} dz \end{aligned}$$

Et comme g est une fonction analytique au voisinage de z_0, elle est analytique dans un conteur γ^+. D'après l'intégrale de Cauchy, .Donc :

$$\int_{\gamma^+} \frac{g'(z)}{g(z)} dz = 0.$$

Donc :

$$\int_{\gamma^+} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = n \int_{\gamma^+} \frac{dz}{z-z_0} = n(2\pi i) \qquad \text{(\textbf{D'après la formule de Cauchy})}.$$

Maintenant, nous supposons que les zéros de f dans γ^+forment un ensemble fini $\{z_{0_1}, ...; z_{0_m}\}$; soit $n_j, j = 1, ..., m$ l'ordre du zéros z_{0_j}.On note $\sum_{j=1}^{m} n_j = Z_f$ (i : e : Le nombre des zéros isolés de f dans γ^+). D'après les deux méthodes de la démonstration, on trouve :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^+} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{j=1}^{m} n_j = Z_f$$

Ce qui fait la démonstration. ■

4.1.2 Principe de l'argument dans le cas des fonctions méromorphes

Théorème 4.1.2 *: Soient $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert connexe et $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction méromorphe dans U. Soit γ^+un conteur fermé contenu ainsi que son intérieur dans U, ne passant pas aucun des zéros ni aucun des pôles de f.*

Alors, désignant par Z_f le nombre des zéros de f à l'intérieur de γ^+ et par P_f celui de ses pôles

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^+} \frac{f\,'(z)}{f\,(z)}dz = Z_f - P_f \tag{4.4}$$

Le conteur γ^+ étant parcouru dans le sens positif. Cette interprétation est souvent appelée ***principe de l'argument.***

Preuve. : Commençons par un rappel qui quand nous employons le symbole $\int\limits_{\gamma^+}$ pour le conteur, ceci signifie que nous intégrons dans la direction positive autour du conteur fermé γ^+ .

Pour la démonstration, il suffit d'appliquer le théorème des résidus à la fonction $h(z) = \frac{f\,'(z)}{f\,(z)}$, donc de rechercher les points singuliers de h.

La fonction h présente uniquement des pôles, provenant des pôles de la fonction $f\,'$ et des zéros de la fonction f.

La fonction h est analytique dans γ^+sauf aux zéros et aux pôles de f. Si z_0 est un zéro d'ordre n de f à l'intérieur de γ^+ , en utilisant les mêmes étapes de la démonstration du théorème(4.1.2), on a

$$f\,(z) = (z - z_0)^n g(z)$$

Ou $g(z)$ est analytique au point z_0,$g(z) \neq 0$ .Par la dérivée de la fonction f, on a

$$\frac{f\,'(z)}{f\,(z)} = \frac{n}{(z - z_0)} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

Ce résultat prouve que la fonction à intégrer $\frac{f\,'(z)}{f\,(z)}$ a un pôle simple à z_0 et le résidu à ce point est

$$res(\frac{f\,'(z)}{f\,(z)}, z_0) = n$$

Ce qui est l'ordre du zéro z_0. D'après l'intégrale de Cauchy

$$\int_{\gamma^+} \frac{f\,'(z)}{f\,(z)}dz = 2\pi i\; n$$

Maintenant si z_p est un pôle de l'ordre m de f dans γ^+ , par le critère des pôles isolés d'une fonction méromorphe au voisinage de z_p, nous pouvons écrire

$$f\,(z) = \frac{\phi(z)}{(z - z_0)^m} = (z - z_0)^{-m}\phi(z)$$

Ou ϕ est analytique au z_p et $\phi(z_p) \neq 0$.

Par la dérivation de f, on a

$$f\ '(z) = (z - z_0)^{-m}\phi'(z) - m(z - z_0)^{-m-1}\phi(z)$$

Par conséquent, dans un certain disque a centré au z_p

$$\begin{aligned} \frac{f\ '(z)}{f\ (z)} &= \frac{(z - z_0)^{-m}\phi'(z) - m(z - z_0)^{-m-1}\phi(z)}{(z - z_0)^{-m}\phi(z)} \\ &= \frac{\phi'(z)}{\phi(z)} + \frac{-m}{z - z_p} \end{aligned}$$

Donc $\frac{f\ '}{f}$ admet z_p pour pôle simple, et le résidu de ce pôle est égal à l'entier $-m$, ordre de multiplicité du pôle z_p (compté négativement). On intègre $\frac{f\ '}{f}$, on a

$$\begin{aligned} \int\limits_{\gamma^+} \frac{f\ '(z)}{f\ (z)} dz &= \int\limits_{\gamma^+} (\frac{\phi'(z)}{\phi(z)} + \frac{-m}{z - z_p}) dz \\ &= \int\limits_{\gamma^+} \frac{-m}{z - z_p} dz + \int\limits_{\gamma^+} \frac{\phi'(z)}{\phi(z)} dz \end{aligned}$$

Et comme ϕ est une fonction analytique au voisinage de z_p, elle est analytique dans un conteur γ^+.D'après l'intégrale de Cauchy, $\int\limits_{\gamma^+} \frac{\phi'(z)}{\phi(z)} dz = 0$.Donc

$$\int\limits_{\gamma^+} \frac{f\ '(z)}{f\ (z)} dz = -m \int\limits_{\gamma^+} \frac{dz}{z - z_p} = 2\pi i m \qquad (D'après\ la\ formule\ de\ Cauchy)$$

Finalement, on suppose que $z_{0_1}, z_{0_2},...; z_{0r}$ et $z_{p_1}, z_{p_2}, ...; z_{p_s}$sont les zéros et les pôles de f dans γ^+, avec $n_1, n_2, ..., n_r$ sont d'ordres de multiplicités de zéros et $m_1, m_2, ..., m_s$ que sont d'ordre de multiplicités de pôle de f. On a déjà remarqué que ces singularités sont des pôles simples de $\frac{f'}{f}$ avec résidus correspondants aux multiplicités

$$res(\frac{f\ '(z)}{f\ (z)}, z_{0_k}) = n_k, \qquad res(\frac{f\ '(z)}{f\ (z)}, z_{p_k}) = -m_k$$

Par le théorème de résidu, on a $\int\limits_{\gamma^+} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ est égal à fois $2\pi i$ la sommes des résidus aux pôles.

$$\begin{aligned}\int\limits_{\gamma^+} \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= 2\pi i \left[\sum_{k=1}^{r} res\left(\frac{f'(z)}{f(z)}, z_{0_k}\right) + \sum_{k=1}^{s} res\left(\frac{f'(z)}{f(z)}, z_{p_k}\right)\right] \\ &= 2\pi i \left[\sum_{k=1}^{r} n_k + \sum_{k=1}^{s} (-m_k)\right] = 2\pi i \left[Z_f - P_f\right]\end{aligned}$$

En divisant par $2\pi i$, on trouve le résultat. ■

Pourquoi ce nom ? Pourquoi s'appelle-t-il le principe d'argument ? Ce théorème prend ce nom puisque il y a une relation entre $Z_f - P_f$; la différence du nombre de zéros et le nombre de pôles d'une fonction méromorphe f définie dans un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ avec la variation de l'argument $\arg f(z)$.

Plus avec précision,

$Z_f - P_f = \frac{1}{2\pi i}$ [Variation d' $\arg f(z)$ comme z traverse une fois γ^+ dans la direction positive].

Ce principe peut être facilement vérifié pour les fonctions simples.

Exemple 4.1.3 *:On considère une fonction simple $f(z) = z^2$ définie dans le cercle d'unité $|z| = 1$ qui contenu dans un conteur fermé γ^+ de $\mathbb{C}$.*

Puisque la fonction f a un zéro de multiplicité 2 dans γ^+et aucuns pôles, nous avons $Z_f - P_f = 2$.Maintenant si γ^+paramétriez par $z = \exp(i\theta), 0 \leq \theta \leq 2\pi$, puis on a $\omega = z^2 = \exp(i\, 2\theta), 0 \leq \theta \leq 2\pi$, avec $|\omega| = 1$ qui est le cercle d'unité . Pendant que z traverse γ^+une fois commençant par $z = 1\,(\theta = 0)$ et finissant à $z = 1\,(\theta = 2\pi)$, nous voyons que une fois commençant par , et finissant à , nous voyons que

$$\arg f(z) = \arg(\omega) = 2\theta$$

est croissante de 0 à 4π, Mais une autre manière, des traversées de ω ou des vents autour du cercle $|\omega| = 1$ deux fois. Ainsi,$\frac{1}{2\pi}$ [changement d'$\arg f(z)$ comme z traverse γ^+une fois dans la direc
$= \frac{1}{2\pi}[4\pi - 0] = 2 = Z_f - Z_p$.

Tels que $\triangle \arg f(z)$ est variation d'$\arg f(z)$ comme z traverse γ^+une fois dans la direction positive. Alors $\triangle \arg f(z)$ est équal à $2\pi\times$ le nombre des tours du point $f(z)$ autour de l'origine.

Le théorème suivant donne une observation que la différence entre le nombre des zéros et le nombre des pôles d'une fonction méromorphe f est égale au quotient par 2π de la variation de l'argument de f lorsque z d'écrit le conteur fermé γ^+.

Théorème 4.1.4 *Soient U un ouvert connexe et f une fonction analytique à l'interieur d'un conteur γ^+fermé simple, sauf pour un nombre fini de pôles à l'interieur de γ^+.*

Soient Z_f et P_f le nombre de zéros et de pôles(au leurs multiplicités) de f, à l'interieur . Soit $\triangle \arg f(z)$ la variation d'$\arg f(z)$ sur γ^+ dans le sens positif(à gauche). Alors lorsque z lors parcours γ^+ dans le sens positif, On a

$$\triangle \arg f(z) = 2\pi(Z_f - P_f).$$

4.2 Résultat du théorème de l'argument

Le théorème suivant est utilisé pour calculer le nombre de zéro d'une fonction analytique dans un domaine borné D.

Théorème 4.2.1 ***(théorème de Rouché) :*** *Soient $f\ (z)$ et $g(z)$ deux fonction analytiques sur un domaine borné D et sur frontière μ si*

$$|f\ (z)| > |g(z)|\,, \forall z \in \mu \tag{4.5}$$

alors les fonctions $f\ (z)$ et $F(z) = f\ (z) + g(z)$ ont le meme nombre de zéros dans D, i,e :

$$Z_f = Z_F \tag{4.6}$$

Preuve. : nous avons $f\ (z) \neq 0$ et $F\ (z) \neq 0$, $\forall z \in \mu$ .en effet,(remarquons d'abord que l'hypothèse implique que ni f ni F ne s'annule sur μ)

A partir de (4.5), on a :$f\ (z) \neq 0$, $\forall z \in \mu$.de meme

$$|F(z)| = |f\ (z) + g(z)| \geq\ |f\ (z)| - |g(z)|\,, \forall z \in \mu$$

donc les conditions du théorème de principe de l'argument sont vérifié pour $f\ (z)$ et $F(z)$

D'ou

$$\frac{1}{2\pi} D_\mu \arg F(z) = Z_F \qquad \textit{et} \qquad \frac{1}{2\pi} D_\mu \arg f\ (z) = \ Z_f$$

d'autre part, on a

$$F(z) = f\ (z)\left(1 + \frac{g(z)}{f\ (z)}\right), \forall z \in \mu$$

D'ou

$$\begin{aligned}\arg F(z) &= \arg f\ (z) + \arg(1 + \frac{g(z)}{f\ (z)}) \\ &\Rightarrow D_\mu \arg F(z) = D_\mu \arg f\ (z) + D_\mu \arg(1 + \frac{g(z)}{f\ (z)})\end{aligned}$$

soit $\omega = 1 + \frac{g(z)}{f\ (z)}$, on a

$$|\omega - 1| = \frac{|g(z)|}{|f\ (z)|} < 1; \forall z \in \mu; \omega \in B\,(1,1)$$

comme le vecteur ω ne fait aucune rotation complète autour $\omega = 0$; On a :

$$D_\mu \arg \left(1 + \frac{g(z)}{f\ (z)}\right) = 0$$

D'ou

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi} D_\mu \arg f(z) &= \frac{1}{2\pi} D_\mu \arg F(z) \\ &\Rightarrow Z_f = Z_f\end{aligned}$$

■

Bibliographie

[1] Michéle Audin- Analyse complexe- Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université Louis Pasteur et CNRS, 7 rue René Descartes, 67084 Strasbourg cedex, France- 2007.

[2] Henri Cartan- Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variable complexes- Germain Paris- 19961.

[3] M.Krasnov, A.Kissélev, G.Makarenko- Fonctions d'une variable complexe et leur applications- Moscou- 1985.

[4] Jean_François Burnol- Analyse complexe- 2006_2007.

[5] André Groux- Analyse complexe- 2004.

[6] Emmanuel Plaut- Analyse complexe- Nancy- 27 février 2008.