الجمهورية الجزائرية الديموقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Minstère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

CENTRE UNIVERSITAIRE DE MILA
INSTITUT DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE

Réf. /12

Mémoire de fin d'étude
Présenté pour l'obtention du diplôme de

Licence Académique

Domaine : **Mathématiques et Informatique**
Filière : **Mathématiques**
Spécialité : **Mathématiques Fondamentales**

Thème

Intégrales curvilignes et intégrales de surface

Présenté par :
1- Khaled djaouida
2- Chahdane amina

Dirigé par :
Mr : Rabeh bouden

Année universitaire 2011-2012

remerciement

- Nous tenons tout d'abords à remercier le bon dieu pour nous avoir donné le courage, la patience et le privilège d'étudier et de terminer ce modeste travail.

- Nous remercions notre encadreur Mr Rabah Bouden pour son soutien et ses conseils précieux qui nous ont considérablement aidé.

- Nous remercions tous les enseignants du département de sciences et technologies et tous les personnes de lapon 12.

- Nous remercions nos familles pour leur patience et soutien sans oublier toutes les personnes qui nous ont aidés de prêt ou de loin.

Table des matières

0.1 Introduction

L'histoire des mathématiques doit beaucoup à la théorie de l'intégration, et de tout temps, sa place prédominante a façonné l'analyse en offrant à qui une solution, à qui un problème. le lustre des "méthodes intégrales" en Gréce antique l'atteste, et bien qu'il faille attendre le calcule infinitésimal pour une première formalisation, elles nous avaient déjà offert de profonds et beaux résultats : les athéniens évaluèrent les grandeurs de l'espace puis en démontrèrent implicitement l'existence et l'unicité ; au XVII siècle naissent des méthodes générales de "calcul de l'infini" (rectification de courbes, quadratures, etc....).C'est Leibniz qui opère le fondement de la théorie de l'intégration(Géometria recondita,1686), perpétué jusqu'aujourd'hui, d'une part par un symbolisme intégral reliant intégration et dérivation, d'autre part par la mise en place des principaux théorèmes.

Chapitre 1

Intégrale curviligne

1.1 *Intégrale curviligne :*

On pose $P(x,\ y)$ un point se mouvant sur un courbe plane L d'un point M à un point N. Le point P est sollicité par une force F et :

$$F = F(P).$$

calculons le travail A de la force F lorsque le point est déplacé de M en N et découpons la courbe MN en n morceaux arbitraires par les points $M = M_0,\ M_1, ...M_n = N$

on a $\triangle s_i$ le vecteur $\overline{M_iM_{i+1}}$ et F_i l'intensité de la force F au point M_i. on peut alors considérer le produit scalaire $F_i \triangle s_i$ représente approximativement le travail de F le long de l'arc $\widehat{M_iM_{i+1}}$:

$$A_i = \quad F_i \ \triangle s_i.$$

soit :

$$F = X(x, y)i + Y(x, y)j.$$

où $X(x,\ y)$, $Y(x,\ y)$ sont les projections du vecteur F sur les axes Ox et Oy. désignant par $\triangle x_i$ et $\triangle y_i$ les accroissements des coordonnées x_i y_i lorsqu'on passe de M_i à M_{i+1}, on obtient

$$\triangle s_i = \triangle x_i\ i + \triangle y_i\ j.$$

par conséquent

$$F_i \triangle s_i = X(x_i , y_i) \triangle x_i + y(x_i , y_i) \triangle y_i.$$

La valeur approchée du travail A de la force F tout le long de la courbe MN est

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} F_i \triangle s_i = \sum_{i=1}^{n} (X(x_i, y_i) \triangle x_i + Y(x_i , y_i) \triangle y_i). \tag{1.1}$$

On calcule la limite de la somme précédent lorsque $\triangle s_i \to 0$. Si cette limite existe elle exprime le travail de la force F le long de la courbe L entre les points M et N :

$$A = \lim_{\substack{\triangle x_i \to 0 \\ \triangle y_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} (X(x_i, y_i) \triangle x_i + Y(x_i , y_i) \triangle y_i). \tag{1.2}$$

Cette limite est appelée l'intégrale curviligne de $X(x,\ y)$ et $Y(x,\ y)$ le long de la courbe L est désignée par :

$$A = \int_L X(x,\ y)dx + y(x,\ y)dy. \tag{1.3}$$

ou

$$A = \int_{(M)}^{(N)} X(x,\ y)dx + y(x,\ y)dy. \tag{1.4}$$

Remarque 1 *$X(x,\ y)$ et $Y(x,\ y)$ étant des fonctions de deux variables dans un domaine D. Les lettres M et N dans l'intégrale* (1.4) *ont été mises entre parenthèses pour indiquer que ce ne sont pas des nombres mais les extrémités de la courbe à laquelle est étendue l'intégrale curviligne.*

Le sens de M à N le long de la courbe est dit sens d'intégration.

Si L est une courbe gouache, on définit d'une manière analogue l'intégrale curviligne des trois fonctions $X(x,\ y,\ z),\ Y(x,\ y,\ z),\ Z(x,\ y,\ z)$:

$$\int\limits_L X(x,y,z)dx + Y(x,y,z)dy + Z(x,y,z)dz \;=\; \lim_{\substack{\triangle x_k \to 0 \\ \triangle y_k \to 0 \\ \triangle z_k \to 0}} \sum_{k\to 0}^{n} X(x_k,y_k,z_k) \triangle x_k + $$
$$+Y(x_k,y_k,z_k) \triangle y_k + Z(x_k,y_k,z_k) \triangle z_k.$$

La lettre L sous le signe somme indique que l'intégrale est étendue à la courbe L.

Proposition 1 *Une intégrale curviligne est définie par l'expression sous le signe somme, la forme de la courbe d'intégration et le sens d'intégration. L'intégrale curviligne change de signe en même temps que le sens d'intégration, étant donné que le vecteur $\triangle s$ et par conséquent ses projections $\triangle x$ et $\triangle y$ changent de signe.*

Proposition 2 *Découpons la courbe L en deux parties L_1 et L_2 de sorte que $\widehat{MN} = \widehat{MK} + \widehat{KN}$. Il résulte alors directement de la formule* (1.1)

$$\int\limits_{(M)}^{(N)} X\ dx\ +Y\ dy = \int\limits_{(M)}^{(K)} X\ dx\ +Y\ dy + \int\limits_{(K)}^{(N)} X\ dx\ +Y\ dy.$$

Cette relation est valable quelque soit le nombre d'arc partiels. L'intégrale curviligne conserve son sens lorsque la courbe L est fermé. L'origine et l'extrémité de la courbe coïncidente alors on ne peut plus écrire dans le cas d'une courbe fermée

$$\int\limits_{(M)}^{(N)} X\ dx\ +Y\ dy,$$

mais $\int\limits_L Xdx+Ydy$ *et il faudra indiquer forcément le sens de parcours le long de la courbe* *fermée L. On désigne aussi fréquemment une intégrale curviligne sur une courbe fermée L par le symbole $\oint X dx + Y dy$.*

Remarque 2 *Nous avons été conduits à la notion d'intégrale curviligne en considérant le problème du travail d'une force F sur un parcours curviligne L; on considérait alors que la force F était une fonction vectorielle des coordonnées du point d'application (x, y); les projections du vecteur variable F sur les axes de coordonnées sont égales aux fonctions scalaires (c'est-à-dire numérique) $X(x, y)$ et $Y(x, y)$. On peut donc considère une intégrale curviligne de la forme*

$$\int_L X\ dx + Y dy$$

comme l'intégrale de la fonction vectorielle F donnée par ses composantes X et Y. L'intégrale de la fonction vectorielle F sur la courbe L est désignée par le symbole

$$\int_L F ds.$$

Si le vecteur F est déterminé par ses composantes X, Y, Z, cette intégrale s'écrit

$$\int_L X\ dx + Y dy + Z dz.$$

Notation 1 *Si le vecteur F se trouve dans le plan Oxy, l'intégrale de ce vecteur se réduit alors à*

$$\int_L X\ dx + Y dy.$$

Lorsque l'intégrale curviligne d'une fonction vectorielle F est étendue à une courbe fermée L, on l'appelle encore la circulation du vecteur F sur le contour fermé L.

1.2 Calcule de l'intégrale curviligne :

Nous nous proposons dans ce paragraphe de préciser la notion de limite de la somme (1.1), par là même, nous aurons précisé la notion d'intégrale curviligne et nous indiquerons un procédé de calcul. Supposons la courbe L donnée sous forme paramétrique :

$$x = \varphi(t), \; y = \psi(t).$$

Considérons l'arc de courbe MN. Soient α et β les valeurs du paramètre correspondant aux points M et N $(M(\alpha, \varphi(\alpha)), N(\beta, \psi(\beta)))$. Partageons l'arc MN en morceaux $\triangle s$ considérons l'arc de courbe MN. Soient α et β les valeurs du paramètre correspondant aux points M et N. Partageons l'arc MN en morceaux $\triangle s_i$ par les points $M(x_1, y_1), \; M(x_2, y_2), ..., \; M_n(x_n, y_n)$ et posons

$$x_i = \Phi(t_i), \; y_i = \psi(t_i).$$

Considérons l'intégrale curviligne définie au paragraphe précédent

$$\int_L X(x,y) \; dx + Y(x,y) \, dy. \tag{1.5}$$

Enonçons sans démontrer un théorème sur l'existence des intégrales curvilignes. Si les fonctions $\Phi(t)$ et $\Psi(t)$ continues et possèdent des dérivées continues $\Phi'(t)$ et $\Psi'(t)$ sur le segment $[\alpha, \beta]$ et si les fonctions de $X[\Phi(t), \Psi(t)]$ et $Y[\Phi(t), \Psi(t)]$ sont continues sur ce segment, les limites

$$\begin{aligned} \lim_{\triangle x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} X(\overline{x}_i, \overline{y}_i) \Delta x_i &= A, \qquad (1.6) \\ \lim_{\triangle y_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} X(\overline{x}_i, \overline{y}_i) \Delta y_i &= B \end{aligned}$$

existent, $\overline{x_i}$ et $\overline{y_i}$ étant les coordonnées d'un point de l'arc Δs_i. ces limites ne dépendent par du mode de découpage de la courbe L en arcs partiels $\triangle s_i$ lorsque $\triangle s_i \to 0$, ainsi que du choix du point $\overline{M_i}\left(\overline{x_i}, \overline{y_i}\right)$ sur l'arc $\triangle s_i$, on les appelle les intégrales curvilignes et on les désigne par :

$$
\begin{aligned}
A &= \int_L X\left(x, y\right) dx, \qquad (1.7)\\
B &= \int_L Y\left(x, y\right) dy.
\end{aligned}
$$

Remarque 3 *Il résulte du théorème que tendent aussi vers cette même limite (c'est -à-dire vers l'intégrale curviligne) les sommes définies au paragraphe précèdent, où les points $\overline{M}_i(\overline{x_i}, \overline{y_i})$ sont les extrémités de l'arc $\triangle s_i$, le découpage de L en arcs partiels $\triangle s_i$ étant arbitraire. Le théorème qui vient d'être formulé donne un procédé de calcul des intégrales curvilignes. Ainsi, par définition :*

$$
\int_{(M)}^{(N)} X\left(x, y\right)\ dx = \lim_{\triangle x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} X\left(\overline{x}_i, \overline{y}_i\right) \Delta x_i, \qquad (1.8)
$$

où

$$
\triangle x_i = x_i - x_{i-1} = \varphi\left(t_i\right) - \varphi\left(t_{i-1}\right).
$$

Appliquons la formule des accroissements finis de Lagrange

$$
\triangle x_i = \varphi\left(t_i\right) - \varphi\left(t_{i-1}\right) = \varphi'\left(\tau_i\right)\left(t_i - t_{i-1}\right) = \varphi'\left(\tau_i\right) \triangle t_i,
$$

τ_i étant une certaine valeur de t comprise entre les valeurs t_{i-1} et t_i. Le point $\overline{x}_i$, $\overline{y}_i$ étant arbitraire sur l'arc $\triangle s_i$, choisissons-le de manière que ses coordonnées correspondent à

la valeur du paramètre τ_i *:*

$$\overline{x}_i = \varphi(\tau_i), \overline{y}_i = \psi(\tau_i).$$

Substituant les valeurs trouvées de $\overline{x_i}$, $\overline{y_i}$ *et* $\triangle s_i$*dans la formule* (1.8) *,on trouve :*

$$\int_{(M)}^{(N)} X(x,y)\ dx = \lim_{\triangle x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} X[\varphi(\tau_i)\psi(\tau_i)]\varphi'(\tau_i) \triangle t_i.$$

le second membre représente la limite d'une somme intégrale pour la fonction continue d'une seule variable $X[\varphi(t), \psi(t)]\varphi'(t)$ *sur le segment* $[\alpha, \beta]$. *Par conséquent, cette limite est égale à l'intégrale définie de cette fonction :*

$$\int_{(M)}^{(N)} X(x,y)\ dx = \int_{\alpha}^{\beta} X[\varphi(t), \psi(t)]\varphi'(t)\, dt.$$

On obtient d'une manière analogue la formule

$$\int_{(M)}^{(N)} Y(x,y)\ dx = \int_{\alpha}^{\beta} Y[\varphi(t), \psi(t)]\varphi'(t)\, dt.$$

On obtient en ajoutant ces égalités membre à membre :

$$\int_{(M)}^{(N)} X(x,y)\ dx\ + Y(x,y)\, dy =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} X[\varphi(t), \psi(t)]\varphi'(t) + Y[\varphi(t), \psi(t)]\varphi'(t)\, dt. \tag{1.9}$$

Telle est la formule permettant de calculer une intégrale curviligne. On calcule de la *même façon l'intégrale curviligne*

$$\int Xdx + Ydy + Zdz$$

le long d'une courbe gauche définie paramétriquement : $x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \chi(t)$.

Exemple 1 *Calculer l'intégrale curviligne portant sur les fonctions* x^3; $3zy^2$; $-x^2y$ *le long du segment de droite allant du point* $M(3,2,1)$ *au point* $N(0,0,0)$.

Solution 1 *Pour trouver les équations paramétriques de la droite d'intégrale écrivons-la sous la forme :* $\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$; *désignant par* t *la valeur commune de ces rapports, on obtient l'équation paramétrique de la droite :* $x = 3t,\ y = 2t,\ z = t$. *Il correspond à l'origine du segment* MN *la valeur du paramètre* $t = 1$ *et à l'extrémité la valeur* $t = 0$. *On trouve facilement les dérivées de* $x,\ y,\ z$ *par rapport à* t *:* $x'_t = 3,\ y'_t = 2,\ z'_t = 1$. *On calcule maintenant l'intégrale curviligne proposée à l'aide de la formule*

$$\begin{aligned}\int_{(M)}^{(N)} x^3dx + 3zy^2dy - x^2ydz &= \int_1^0 \left[(3t)^3 .3 + 3t(2t)^2 .2 - (3t)^2 .2t.1\right] \\ &= \int_1^0 87t^3dt = -\frac{87}{4}.\end{aligned}$$

Donnons maintenant quelques applications des intégrales curvilignes.

1.2.1 Expression de l'aire d'un domaine délimité par une courbe en fonction d'une intégrale curviligne

Soit donné dans le plan Oxy un domaine D limité par un contour L tel que toute parallèle à un quelconque des axes de coordonnées passant par un point intérieur du domaine coupe la frontière L en deux points au plus (c'est-à-dire que le domaine est régulier). Soit $[a, b]$ le segment de l'axe Ox sur lequel se projette le domaine D limité inférieurement par la courbe (l_1) :

$$y = y_1(x),$$

et supérieurement par la courbe (l_2) :

$$\begin{aligned} y &= y_2(x), \\ & [y_1(x) \leq y_2(x)] \end{aligned}$$

l'air du domaine D est alors égale à

$$S = \int_a^b y_2(x)\, dx - \int_a^b y_1(x)\, dx.$$

Mais la première intégrale est une intégrale curviligne le long de la courbe $l_2(\widehat{MPN})$, étant donné que $y = y_2(x)$ est l'équation de cette courbe ; par conséquent,

$$\int_a^b y_2(x)\, dx = \int_{MPN} y dx.$$

La seconde intégrale est une intégrale curviligne étendue à la courbe $l_1(\widehat{MQN})$:

$$\int_a^b y_1(x)\, dx = \int_{MQN} y dx.$$

Par conséquent,

$$S = -\int_{MPN} ydx - \int_{MQN} ydx \ = -\int_{L} ydx, \qquad (1.10)$$

L étant parcouru dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Si une partie de la frontiére L est constituée d'un segment M_1M parallèle à l'axe Oy, on a

$$\int_{(M_1)}^{(M)} ydx \ = 0$$

et l'égalité (1.10) est encore vrais. On peut montre d'une manière analogue que

$$S = \int_{L} xdy. \qquad (1.11)$$

Ajoutant membre à membre (1.10) et (1.11) et divisant par 2, on obtient encore une formule pour calcule l'aire S :

$$S = \frac{1}{2}\int_{L} xdy - ydx. \qquad (1.12)$$

Exemple 2 *calculer l'aire de l'ellipse*

$$x = a\cos t \ , \ y = b \ \sin \ t.$$

Solution 2 *On trouve d'après la formule* (1.12) :

$$S = \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} [a\cos t \ - b\cos t - b \ \sin \ t\,(-a\cos t)]\, dt = \pi ab.$$

Remarque 4 *Remarquons que la formule* (1.12) *ainsi que les formules* (1.10) *et* (1.11) *convient aussi pour l'aire de domaines dont les frontières sont coupées par les parallèles aux axes de coordonnées en plus de deux points. pour le démontrer, partageons le domaine* *donné en deux domaines réguliers au moyen de la courbe l^*. La formule* (1.12) *est vraie pour chacun d'eux. Ajoutant membre à membre, on obtient dans le premier membre l'aire du domaine donné et dans le second l'intégrale curviligne (précédée du coefficient $\frac{1}{2}$) étendue à toute la frontière, étant donné que l'intégrale sur la ligne de partage l^* est prise deux fois, dans le sens direct et dans le sens inverse, et s'annule donc.*

1.2.2 Travail d'une force variable F sur un chemin curviligne L.

Nous avons indiqué au début de ce chapitre que le travail d'une force

$$F = X(x,y,z)\, i + Y(x,y,z)\, j + Z(x,y,z)\, k$$

le long d'une courbe $L = MN$ était égale à l'intégrale curviligne :

$$A = \int_{(M)}^{(N)} X(x,y,z)\, dx + Y(x,y,z)\, dy + Z(x,y,z)\, dz.$$

Exemple 3 *Calculer le travail A de la force de pesanteur F déplaçant une masse m du point $M_1(a_1,b_1,c_1)$ au point $M_2(a_2,b_2,c_2)$ le long d'un chemin arbitraire L.*

Solution 3 *les projections de la force de pesanteur F sur les axes de coordonnées sont*

$$X = 0,\ Y = 0,\ Z = -mg.$$

Le travail accompli est donc

$$A = \int_{(M_1)}^{(M_2)} X dx + Y dy + Z dz = \int_{c_1}^{c_2} (-mg)\, dz = mg\left(c_{1-c_2}\right).$$

On voit que dans le champ de la pesanteur le travail ne dépend pas du chemin suivi mais seulement du point initial et du point final. Plus exactement, le travaille de la force *pesanteur ne dépend que de la différence des niveaux déterminés par le point final et le point initial.*

1.3 Formule de Green

Montrons qu'une intégrale double dans un domaine plan D s'exprime par une intégrale curviligne prise le long de la frontière L de ce domaine. Soit un domaine D du plan limité par un contour L, D étant régulier aussi bien selon Ox que Oy. Supposons ce domaine limité inférieurement par la courbe $y = y_1(x)$ et supérieurement par la courbe $y = y_2(x)$, $y_1(x) \leq y_2(x)$ $(a \leq x \leq b)$. A elles deux, ces courbes forment le contour fermé L. soient dans D deux fonctions continues $X(x, y)$ et $Y(x, y)$ douées de dérivées partielles continues. considèrent l'intégrale $\iint\limits_D \frac{\partial X(x,y)}{\partial y} dxdy$. On a :

$$\begin{aligned} \iint\limits_D \frac{\partial X}{\partial y} dxdy &= \int\limits_a^b \left(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial X}{\partial y} dy \right) dx \\ &= \int\limits_a^b X(x, y) \Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)} dx \\ &= \int\limits_a^b \left[X(x, y_2(x)) - X(x, y_1(x)) \right] dx. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Notons que l'intégrale

$$\int\limits_a^b X(x, y_2(x))\, dx$$

est numériquement à l'intégrale curviligne

$$\int\limits_{(MPN)} X(x, y)\, dx,$$

le long de la courbe MPN d'équations paramétriques $x = x,\ y = y_2(x)$,

x étant le paramètre.

on a donc

$$\int_a^b X(x, y_2(x))\,dx = \int_{(MPN)} X(x,y)\,dx. \tag{1.14}$$

D'une manière analogue, l'intégrale $\int_a^b X(x, y_1(x))\,dx$ est numériquement égale à

$$\int_a^b X(x, y_1(x))\,dx = \int_{(MQN)} X(x,y)\,dx \tag{1.15}$$

substituant les expressions (1.14) et (1.15)dans la formule (1.13), on obtient :

$$\iint_D \frac{\partial X}{\partial y} dxdy = \int_{(MPN)} X(x,y)\,dx - \int_{(MQN)} X(x,y)\,dx. \tag{1.16}$$

Or,

$$\int_{(MPN)} X(x,y)\,dx = -\int_{(MQN)} X(x,y)\,dx$$

(voir propriété (1)). On peut donc recopier la formule (1.16) sous la forme :

$$\iint_D \frac{\partial X}{\partial y} dxdy = \int_{MPN} X(x,y)\,dx + \int_{MQN} X(x,y)\,dx.$$

Mais la somme des intégrales curvilignes du second membre est égale à l'intégrale curviligne sur le conteur L tout entier parcouru dans le sens des aiguilles d'une montre.

On peut donc mettre cette dernière égalité sous la forme

$$\iint\limits_{D} \frac{\partial X}{\partial y} dxdy = \int\limits_{L} X\left(x,y\right)dx, \tag{1.17}$$

où L indique que le contour fermé L est parcouru dans le sens des aiguilles d'une montre.

Si une partie de la frontière est constituée par un segment l_3 parallèle à l'axe Oy, on a $\int\limits_{l_3} X\left(x,y\right)dx = 0$ et l'égalité (1.17) reste vraie. On trouve de la même façon :

$$\iint\limits_{D} \frac{\partial X}{\partial y} dxdy = \int\limits_{L} Y\left(x,y\right)dy. \tag{1.18}$$

On trouve en retranchant (1.18) de (1.17) :

$$\iint\limits_{D} \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right) dxdy = \int\limits_{L} Xdx + Ydy.$$

Si l'on parcourt le contour L dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, on

$$\iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) dxdy = \int\limits_{L} Xdx + Ydy.$$

C'est la formule de Green (mathématicien anglais, $1793 - 1841$). Nous avons supposé le domaine D régulier. Mais comme pour le calcule d'une aire, on peut montrer que cette formule reste vraie pour un domaine quelconque admettant un découpage régulier.

1.4 Conditions pour qu'une intégrale curviligne ne dépende pas du chemin d'intégration

Considérons l'intégrale curviligne $\int_{(M)}^{(N)} Xdx+Ydy$, étendue à une courbe plane L réunissant les points M et N. On supposera que les fonctions $X(x,y)$ et $Y(x,y)$ possèdent des dérivées partielles continues dans le domaine considéré D. Voyons dans quelles conditions l'intégrale curviligne ne dépend pas de la forme de la courbe L, mais seulement de la position des points M et N.

Considérons deux courbes arbitraires MPN et MQN du domaine cosidéré D réunissant les points M et N.

Soit

$$\int_{MPN} Xdx+Ydy = \int_{MQN} Xdx+Ydy, \tag{1.19}$$

c'ést-à-dire :

$$\int_{MPN} Xdx+Ydy - \int_{MQN} Xdx+Ydy = 0.$$

En vertu des propriétés (1) et (2) des intégrales curvilignes, on peut écrire

$$\int_{MPN} Xdx+Ydy + \int_{MQN} Xdx+Ydy \;\; = 0,$$

qui représente l'intégrale curviligne sur le contour fermé L

$$\int_{L} Xdx+Ydy = 0. \tag{1.20}$$

Dans cette dernière formule, l'intégrale curviligne est prise sur un contour L constitué des courbes MPN et NQM. Il est évident que ce contour peut être considéré comme arbitraire.

Par conséquent, il résulte de la condition que l'intégrale sur une courbe réunissant deux points arbitraires M et N ne dépend pas du chemin suivi, mais seulement de la position de ces deux points, que l'intégrale curviligne est nulle sur tout contour fermé.

La réciproque est vraie : si une intégrale curviligne est nulle quelque soit le contour fermé elle ne dépend pas du chemin d'intégrale entre deux points, mais seulement de la position de ces deux points. En effet, l'égalité (1.20) entraîne (1.19).

Dans l'exemple (3) du calcule l'intégrale curviligne ne dépend pas du chemin d'intégration ; elle dépend du chemin dans l'exemple (2) étant donné que l'intégrale sur le contour fermé considéré n'est pas nulle, mais donne l'aire limitée par ce contour ; dans l'exemple (1) l'intégrales curviligne dépendent également du chemin d'intégration.

La question se pose naturellement : à quelles condition doivent satisfaire les fonctions $X(x,y)$ et $Y(x,y)$ pour que l'intégrale curviligne $\int Xdx + Ydy$ soit nulle quelque soit le contour fermé.

Le théorème suivant répond à cette question.

théoréme 2 *Soient $X(x,y)$ et $Y(x,y)$ deux fonctions continues dans un domaine D, ainsi que leurs dérivées partielles $\frac{\partial X(x,y)}{\partial y}$ et $\frac{\partial Y(x,y)}{\partial x}$. Pour que l'intégrale curviligne sur tout contour fermé L de ce domaine soit nulle, c'est-à-dire pour que l'on ait*

$$\int_L X(x,y)\,dx + Y(x,y)\,dy = 0,$$

il faut et il suffit que

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} \tag{1.21}$$

en tous les points du domaine D.

Preuve. Prenons un contour fermé arbitraire L dans le domaine D et écrivons la formule de Green correspondant à ce contour :

$$\iint_D \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) dxdy = \int_L Xdx + Ydy.$$

Si la condition (1.21) est satisfaite, l'intégrale double de gauche est identiquement nulle et l'on a

$$\int_L X dx + Y dy = 0.$$

On a donc démontré que la condition (1.21) est suffisante. Montrons qu'elle est nécessaire, c'est-à-dire que si l'égalité (1.20) a lieu pour tout contour fermé L dans D, la condition (1.21) a forcément lieu en chaque point du domaine. Supposons, au contraire qu'ait lieu l'égalité (1.20) :

$$\int_L X dx + Y dy = 0$$

mais que la condition (1.21) n'ait pas lieu 'c'est-à-dire que

$$\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \neq 0$$

ne serait-ce qu'en un seul point. Soit, par exemple, en un point $P(x_0, y_0)$

$$\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} > 0.$$

Comme on a dans le premier membre une fonction continue, elle est positive et supérieure à un certain nombre $\delta > 0$ en tous les points d'un domaine suffisamment petit D' contenant le point $P(x_0, y_0)$. prenons l'intégrale double de la différence $\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}$ sur ce domaine. Elle est positive. En effet,

$$\iint_D \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dxdy > \iint_D \delta dxdy = \delta \iint_D dxdy = \delta D' > 0 \ .$$

Or, d'après la formule de Green, le premier membre de cette dernière inégalité est égale à l'intégrale curviligne sur la frontière L' du domaine D', qui est nulle par hypothèse. Donc cette inégalité contredit la condition (1.20), et la supposition que $\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}$ est différente de zéro, ne serait-ce qu'en un point, est fausse. On a donc

$$\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = 0$$

en tous les points du domaine D

$$\int_L X dx + Y dy = 0$$

mais que la condition (1.21) n'ait pas lieu 'c'est-à-dire que

$$\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \neq 0$$

ne serait-ce qu'en un seul point. Soit, par exemple, en un point $P\left(x_0, y_0\right)$

$$\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} > 0.$$

Comme on a dans le premier membre une fonction continue, elle est positive et supérieure à un certain nombre $\delta > 0$ en tous les points d'un domaine suffisamment petit D' contenant le point $P\left(x_0, y_0\right)$. prenons l'intégrale double de la différence $\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}$ sur ce domaine. Elle est positive. En effet,

$$\iint_D \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) dxdy > \iint_D \delta dxdy = \delta \iint_D dxdy = \delta D' > 0 \ .$$

Or, d'aprés la formule de Green, le premier membre de cette derniére inégalité est égale à l'intégrale curviligne sur la frontiére L' du domaine D', qui est nulle par hypothése. Donc cette inégalité contredit la condition (1.20), et la supposition que $\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}$ est différente de zero, ne serait-ce qu'en un point, est fausse. On a donc

$$\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = 0$$

en tous les points du domaine D. ■

Le théorème est complètement démontré. Traduit le fait que l'expression $Xdx + Ydy$ est la différentielle totale d'une certaine fonction $u(x,y)$, c'est-à-dire que

$$Xdx + Ydy = du(x,y)$$

avèc

$$X(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}, Y(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Mais alors le vecteur

$$F = Xi + Yj = \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j$$

est le gradient de la fonction $u(x,y)$; la fonction $u(x,y)$, dont le gradient est le vecteur $Xi + Yj$, est appelée le potentiel de vecteur.

Montrons que, dans ce cas, l'intégrale curviligne

$$I = \int_{(M)}^{(N)} Xdx + Ydy$$

sur une courbe arbitraire L réunissant les points M et N est égale à la différence des valeurs de la fonction u en ces points :

$$\int_{(M)}^{(N)} Xdx + Ydy = \int_{(M)}^{(N)} du(x,y) = u(N) - u(M).$$

Preuve. Si $Xdx + Ydy$ est la différentielle totale de la fonction $u(x,y)$, on a $X = \frac{\partial u}{\partial x}, Y = \frac{\partial u}{\partial y}$ et l'intégrale curviligne s'écrit

$$I = \int_{(M)}^{(N)} \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy.$$

Pour calculer cette intégrale, écrivons les équations paramétriques de la courbe L réunissant M et N :

$$x = \varphi(t), y = \psi(t).$$

Nous admettrons qu'il correspond à la valeur $t = t_0$ du paramètre le point M et à la valeur $t = T$ le point N. L'intégrale curviligne se ramène alors à l'intégrale définie

$$I = \int_{t_0}^{T} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} \right] dt.$$

L'expression entre crochets est une fonction de t qui exprime la dérivée totale de la fonction $u[\varphi(t), \psi(t)]$ par rapport à t. Par conséquent,

$$\begin{aligned} I &= \int_{t_0}^{T} \frac{du}{dt} dt = u[\varphi(t), \psi(t)]|_{t_0}^{T} \\ &= u[\varphi(t), \psi(t)] - u[\varphi(t_0), \psi(t_0)] = u(N) - u(M). \end{aligned}$$

On voit que l'intégrale curviligne d'une différentielle totale ne dépend pas du chemin d'intégration. L'intégrale curviligne étendue à une courbe gauche jouit de la même propriété.

■

Remarque 5 *On a parfois à intégrer l'intégrale curviligne d'une fonction $X(x, y)$ par rapport à l'arc de la courbe d'intégration L :*

$$\int_{L} X(x, y) ds = \lim_{\triangle s_{i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} X(x_i, y_i) \triangle s_i, \tag{1.22}$$

ds étant la différentielle de l'arc. On calcule ces intégrales comme les intégrales curvilignes considérées ci-dessus. Supposons la courbe L donnée par ses équations paramétriques $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ $\varphi(t), \psi(t), \varphi'(t), \psi'(t)$ étant des fonctions continues de t. Soient

α et β les valeurs du paramétre t correspondant aux extrémités de l'arc L. comme

$$ds = \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2\, dt},$$

on obtient la formule suivante pour calculer l'intégrale (1.22) :

$$\int_L X(x,y)\, ds = \int_\alpha^\beta X[\varphi(t), \psi(t)] \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2} dt.$$

on peut considérer l'intégrale curviligne par rapport à un arc de la courbe gauche $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$:

$$\begin{aligned} \int_L X(x,y,z)\, ds &= \int_\alpha^\beta X[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)] * \\ & * \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)\, 2 dt}. \end{aligned}$$

A l'aide des intégrales curvilignes avec pour élément différentiel l'arc ds, on peut déterminer, par exemple, les centres de gravité de courbes pesantes.

On obtient les formules suivantes pour le calcul des coordonnées du centre de gravité d'une courbe gauche

$$x_c = \frac{\int_L x ds}{\int_L ds},\ y_c = \frac{\int_L y ds}{\int_L ds},\ z_c = \frac{\int_L z ds}{\int_L ds}. \tag{1.23}$$

Exemple 4 *.Trouver les coordonnées du centre de gravité d'une spire de l'hélice*

$$x = a\cos t,\ y = \sin t,\ z = bt\,(0 \le t < 2\pi),$$

sachant que sa densité linéaire est constante.

Solution 4 *.On trouve en appliquant la formule* (1.23) :

$$x_c = \frac{\int_0^{2\pi} a\cos t\sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2}dt}{\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2}dt}$$

$$= \frac{\int_0^{2\pi} a\cos t\sqrt{a^2 + b^2}dt}{\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + b^2}dt} = \frac{a}{2\pi} = 0.$$

D'une maniére analogue $y_c = 0$,

$$z_c = \frac{\int_0^{2\pi} bt\sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2}dt}{2\pi\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{b.4\pi^2}{2\pi.2} = \pi b.$$

On a donc pour les coordonnées du centre de gravité d'une spire de l'hélice

$$x_c = 0,\ y_c = 0,\ z_c = \pi b.$$

Chapitre 2

Intégrale de surface

2.1 Intégrale de surface

Soit donné en coordonnées rectangulaires Oxyz un domaine V.

Dans V est donnée une surface σ limitée par une courbe λ.

Quant à la surface σ, nous supposerons qu'on a défini en chaque point P un sens positif en indiquant la normale unitaire $n(P)$, dont les cosinus directeurs sont des fonctions continues des coordonnées des points de la surface.

Donnons-nous en chaque point de la surface un vecteur

$$F = X(x, y, z)\, i + Y(x, y, z)\, j + Z(x, y, z)\, k,$$

X, Y, Z étant des fonctions continues des coordonnées.

Découpons arbitraire la surface en aires élémentaires $\Delta\sigma_i$.

Prenons un point arbitraire P_i dans chaque élément et considérons la somme

$$\sum_i \left(F(P_i)\ \ n\ \ (P_i)\right)\ \Delta\sigma_i\ , \tag{2.1}$$

$F(P_i)$ étant la valeur du vecteur F au point P_i de $\Delta\sigma_i$, $n(P_i)$ le vecteur unitaire de la normale en ce point, Fn le produit scalaire de ces vecteurs.

La limite de la somme (2.1) relative à toutes les aires $\Delta\sigma_i$ lorsque le plus grand diamètre de ces aires tend vers zéro est, par définition, une intégrale de surface que l'on désigne par le symbole

$$\iint_{\sigma} Fn\ d\sigma.$$

On a donc, par définition,

$$\lim_{diam\ \Delta\sigma_i \to 0} \sum F_i n_i \Delta\sigma_i = \iint_{\sigma} Fn\ d\sigma. \tag{2.2}$$

Chaque terme de la somme (2.1)

$$F_i n_i \Delta\sigma_i = F_i \Delta\sigma_i\ \cos(n_i, F_i) \tag{2.3}$$

admet l'interprétation suivant : ce produit est égal au volume d'un cylindre élémentaire de base $\Delta\sigma_i$ et de hauteur $F_i \cos(n_i, F_i)$. Si F est la vitesse d'un fluide traversant la surface σ, produit (2.3) égal à la quantité de fluide traversant $\Delta\sigma_i$ en l'unité de temps dans la direction du vecteur n_i.

L'expression $\iint_{\sigma} Fn\ d\sigma$ donne la quantité totale traversant en l'unité de temps la surface σ dans le sens positif, F étant le vecteur vitesse du fluide au point donné. C'est pourquoi l'intégrale de surface (2.2) est encore appelée flux du champ vectoriel F à travers la surface σ.

Il résulte de la définition de l'intégrale de surface que si l'on découpe la surface σ en morceaux $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_k$, on aura

$$\iint_{\sigma} Fn\ d\sigma = \iint_{\sigma_1} Fn\ d\sigma. + \iint_{\sigma_2} Fn\ d\sigma + ... + \iint_{\sigma_k} Fn\ d\sigma.$$

Le vecteur unitaire n s'écrit :

$$n = \cos(n, x)\, i + \cos(n, y)\, j + \cos(n, z)\, k.$$

Substituant dans l'intégrale (2.2) les expressions des vecteur F et n en fonction de leurs composantes, on obtient :

$$\iint_{\sigma} Fn\ d\sigma = \iint_{\sigma} [X \cos(n, x) + Y \cos(n, y) + Z \cos(n, z)]\, d\sigma. \tag{2.4}$$

Le produit $\Delta\sigma \cos(n, z)$ est la projection de l'aire $\Delta\sigma$ sur le plan Oxy ; on a également pour les autres produits :

$$\begin{aligned} \Delta\sigma \cos(n, x) &= \Delta\sigma_{yz}, \\ \Delta\sigma \cos(n, y) &= \Delta\sigma_{xz}, \\ \Delta\sigma \cos(n, z) &= \Delta\sigma_{xy}, \end{aligned} \tag{2.5}$$

où $\Delta\sigma_{yz},\ \Delta\sigma_{xz},\ \Delta\sigma_{xy}$ sont les projections de l'aire $\Delta\sigma$ sur les plans de coordonnées correspondants.

Ceci étant, on écrit encore l'intégrale (2.4) sous la forme

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} Fn\ d\sigma &= \iint_{\sigma} [X \cos(n, x) + Y \cos(n, y) + Z \cos(n, z)]\, d\sigma \\ &= \iint_{\sigma} X\ dy\ dz + Y\ dz\ dx + Z\ dx\ dy. \end{aligned} \tag{2.6}$$

2.2 Calcul des Intégrales de surface

Le calcul d'une intégrale sur une surface gauche se ramène au calcul d'une intégrale double sur un domaine plan.

Indiquons un procédé de calcul de l'intégrale

$$\iint_\sigma Z\cos(n,z)\,d\sigma.$$

Supposons la surface σ telle que toute parallèle à l'axe Oz la coupe en un seul point. l'équation de la surface peut être mise alors sous la forme

$$z = f(x,y).$$

Désignons par D la projection de la surface σ sur le plan Oxy, on a (en vertu de la définition des intégrales de surface) :

$$\iint_\sigma Z(x,y,z)\cos(n,z)\,d\sigma = \lim_{diam\ \Delta\sigma_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} Z(x_i,y_i,z_i)\cos(n,z)\,\Delta\sigma_i.$$

Prenant ensuite en considération la dernière formule (2.5) on obtient :

$$\begin{aligned}\iint_\sigma Z\cos(n,y,z)\,d\sigma &= \lim_{diam\ \Delta\sigma_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} Z(x_i,y_i,f(x_i,y_i))\,(\Delta\sigma_{xy})\,i \\ &= \pm\lim_{diam\ \Delta\sigma_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} Z(x_i,y_i,f(x_i,y_i))\,|\Delta\sigma_{xy}|\,i,\end{aligned}$$

la dernière expression étant une somme intégrale pour l'intégrale double de la fonction $Z(x,y,\ f(x,y))$ dans le domaine D. Par conséquent,

$$\iint_\sigma Z\cos(n,y,z)\,d\sigma = \pm\iint_D Z(x,y,f(x,y))\,dx\ dy.$$

le signe plus correspond à $\cos(n,z)\geq 0$ et le signe moins à $\cos(n,z)\leq 0$.

Si la surface σ ne satisfait par à la condition indiquée au début de ce paragraphe, on la déoupe en morceaux satisfaisant à cette condition et on calcule l'intégrale séparément sur chaque morceaux.

On calcule d'une manière analogue les intégrales

$$\iint_{\sigma} X \cos(n, x)\, d\sigma; \iint_{\sigma} Y \cos(n, y)\, d\sigma.$$

Ainsi se trouve justifiée l'expression d'une intégrale de surface sous la forme (2.6).

On pourra considérer alors que le second membre de l'égalité (2.6) est une somme d'intégrales doubles sur les projections correspondantes du domaine σ, les signes de ces intégrales doubles (ou, comme on dit encore, les signes des produits $(dy\ dz,\ dx\ dz,\ dx\ dy)$ étant pris conformément à la règle indiquée.

Exemple 5 *.Une charge électrique positive e placée à l'origine des coordonnées crée un champ vectoriel dont la distribution du vecteur F est donnée en chaque point par loi de coulomb :*

$$F = k\frac{e}{r^2}r.$$

r étant la distance du point considéré à l'origine et r le vecteur unitaire du rayon vecteur dirigé vers le point considéré ; k est un facteur constant. Calcule le flux du champ de vecteurs à travers une sphère de rayon R centrée à l'origine.

Solution 5 *.Considérant que $r = R = const$, on a.*

$$\iint_{\sigma} k\frac{e}{r^2}rn\ d\sigma = \frac{ke}{R^2}\iint rn\ d\sigma.$$

Mais la dernière intégrale est égale à l'aire σ de la sphère. En effet, le produit scalaire rn est constamment égal à il reste

$$\iint_{\sigma} rn\ d\sigma = \lim_{\Delta\sigma_{k\to 0}} \sum r_k n_k \Delta\sigma_k = \lim_{\Delta\sigma_{k\to 0}} \sum \Delta\sigma_k = \sigma.$$

Par conséquent, le flux cherché est

$$\frac{ke}{R^2}\sigma = \frac{ke}{R^2}\cdot 4\pi R^2 = 4\pi ke.$$

2.3 Formule de stokes

Soit donnée une surface σ telle que toute parallèle à Oz la coupe en un seul point. Désignons par λ sa frontière. La normale positive à la surface n sera celle format avec Oz un angle aigu.

Soit $z = f(x, y)$ l'équation de la surface. Les cosinus directeurs de la normale à la surface ont pour expression :

$$\begin{aligned}
\cos(n, x) &= \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}; \\
\cos(n, y) &= \frac{-\frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}; \\
\cos(n, z) &= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Nous supposerons que la surface σ se trouve tout entière dans un domaine spatial V une fonction continue $X(x, y, z)$ avec ses dérivées partielles du premier ordre. Considérons l'intégrale curviligne prise le long du contour λ

$$\int_{\lambda} X(x, y, z)\, dx.$$

On a le long de $\lambda z = f(x, y)\,, x, y$ étant les coordonnée des points de la courbe L, projection de λ sur le plan Oxy. On peut écrire, par conséquent,

$$\int_{\lambda} X(x, y, z) = \int_{L} X(x, y, f(x, y))\, dx. \tag{2.8}$$

Cette dernière intégrale est une intégrale curviligne prise le long de L. Transformons-la en appliquant la formule de Green, en posant

$$X\left(x,\ y,\ f\left(x,y\right)\right)=\bar{X}\left(x,y\right),\ 0=\bar{Y}\left(x,y\right).$$

Remplaçant dans la formule de Green $\bar{X}$ et $\bar{Y}$ par leurs expressions, on obtient :

$$-\iint\limits_{D}\frac{\partial X\left(x,y,f\left(x,y\right)\right)}{\partial y}dxdy=\int\limits_{L}X\left(x,y,f\left(x,y\right)\right)dx, \tag{2.9}$$

le domaine D étant limité par L. Dérivons la fonction composée $X\left(x,\ y,\ f\left(x,y\right)\right)$ par rapport à y :

$$\frac{\partial X\left(x,y,f\left(x,y\right)\right)}{\partial y}=\frac{\partial X\left(x,y,z\right)}{\partial y}+\frac{\partial X\left(x,y,z\right)}{\partial z}\frac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial y}. \tag{2.10}$$

On obtient en substituant l'expression (2.10) dans le premier membre de (2.9) :

$$-\iint\limits_{D}\left[\frac{\partial X\left(x,y,z\right)}{\partial y}+\frac{\partial X\left(x,y,z\right)}{\partial z}\frac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial y}\right]dxdy=\int\limits_{L}X\left(x,y,f\left(x,y\right)\right)dx.$$

Compte tenu de (2.8), cette dernière égalité s'écrit :

$$\int\limits_{\lambda}X\left(x,y,z\right)dx=-\iint\limits_{D}\frac{\partial X}{\partial Y}dxdy-\iint\limits_{D}\frac{\partial X}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}dxdy. \tag{2.11}$$

Les deux dernières intégrales se transforment en intégrales de surface.

En effet, il résulte de la formule (2.6) qu'on pour toute fonction $A\left(x,y,z\right)$ l'égalité

$$\iint\limits_{\sigma}A\left(x,y,z\right)\cos\left(n,z\right)d\sigma=\iint\limits_{D}Adxdy.$$

Ceci étant, les intégrales du second membre de (2.11) se transforment comme suit :

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{\partial X}{\partial y} dxdy &= \iint_\sigma \frac{\partial X}{\partial y} \cos(n,z)\, d\sigma, \qquad (2.12)\\ \iint_D \frac{\partial X}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y} dxdy &= \iint_D \frac{\partial X}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y} \cos(n,z)\, d\sigma.\end{aligned}$$

Transformons la derniére intégrale en appliquant les formules (2.7) du présent paragraphe : on trouve en faisant le quotient de la seconde égalité (2.7) par la troisième :

$$\frac{\cos(n,y)}{\cos(n,z)} = -\frac{\partial f}{\partial y},$$

ou

$$\frac{\partial f}{\partial y}\cos(n,z) = -\cos(n,y).$$

Par conséquent,

$$\iint_D \frac{\partial X}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y} dxdy = \iint_D \frac{\partial X}{\partial z} \cos(n,y)\, d\sigma. \qquad (2.13)$$

On obtient en substituant les expression (2.12) et (2.13) dans (2.11) :

$$\begin{aligned}\int_\lambda X(x,y,z)\, dx &= -\iint_\sigma \frac{\partial X}{\partial y}\cos(n,z)\, d\sigma + \qquad (2.14)\\ &+\iint_\sigma \frac{\partial X}{\partial z}\cos(n,y)\, d\sigma.\end{aligned}$$

Le sens de parcours de λ doit être tel qu'un observateur traversé des pieds à la tête par la normale n verrait le contour parcouru dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

La formule (2.14) est vraie pour toute surface pouvant être découpée en deux parties d'équations de la forme $z = f(x,y)$.

On obtient d'une façon analogue les formules

$$\int_{\lambda} X\,(x,y,z)\,dy = \iint_{\sigma} \left[-\frac{\partial Y}{\partial z}\cos(n,x) + \frac{\partial Y}{\partial x}\cos(n,z)\right] d\sigma, \qquad (2.15)$$

$$\int_{\lambda} Z\,(x,y,z)\,dy = \iint_{\sigma} \left[-\frac{\partial Z}{\partial x}\cos(n,y) + \frac{\partial Z}{\partial y}\cos(n,x)\right] d\sigma. \qquad (2.16)$$

Ajoutons membre à membre les égalités (2.14) (2.15) (2.16) ; on obtient la formules

$$\begin{aligned}\int_{\lambda} Xdx + Ydy + Zdz \quad = \quad & \iint_{\sigma} [\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)\cos(n,z) + \qquad (2.17)\\ & \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right)\cos(n,z) + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)\cos(n,y)]d\sigma.\end{aligned}$$

C'est la formule de Stokes. Elle permet de transformer une intégrale de surface σ en une intégrale curviligne prise sur la frontière λ de cette surface, le sens de parcours de la frontière étant celui spécifié plus haut.

le vecteur B de composantes

$$B_x = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z};\ B_y = \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x};\ B_Z = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}$$

est appelé le vecteur tourbillon ou rotationnel de la fonction vectorielle

$F = X_i + Y_j + Z_k$ et on l'écrit symboliquement rot F. Par conséquent, on peut recopier la formule (2.17) sous la forme vectorielle

$$\int_{\lambda} Fds = \iint_{\sigma} n\ rot\ Fd\sigma, \qquad (2.18)$$

et le théorème de Stokes s'énonce :

La circulation d'un vecteur le long d'un contour fermé limitant une surface est égale au fluxe de son rotationnel à travers cette surface.

Remarque 6 *Si la surface σ est un morceau de plan parallèle à Oxy, on a $\Delta z = 0$ et* *on retrouve la formule de Green comme cas particulier de la formule de Stokes. Il résulte de la formule* (2.17) *que si*

$$\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial Y} = 0, \; \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} = 0, \; \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} = 0, \tag{2.19}$$

l'intégrale curviligne est nul sur toute courbe gauche fermée λ :

$$\int_{\lambda} Xdx + Ydy + Zdz = 0. \tag{2.20}$$

L'intégrale curviligne ne dépend donc par de la forme de la courbe d'intégration. Comme dans le cas d'une courbe plane, on montre que les conditions mentionnées (2.19) *sont non seulement suffisantes mais aussi nécessaires pour avoir l'égalité*(2.20)*. Ces conditions étant satisfaites, l'expression sous le signe somme est la différentielle totale d'une certaine fonction* $u(x, y, z)$:

$$Xdx + Ydy + Zdz = du(x, y, z)$$

et, par conséquent,

$$\int_{(M)}^{(N)} Xdx + Ydy + Zdz = \int_{(M)}^{(N)} du = u(N) - u(M).$$

On le démontre comme pour la formule correspondante dans le cas d'une fonction de deux variables.

2.4 Formule d'Ostrogradsky

Soit un domaine régulier V de l'espace à trois dimensions, limité par une surface fermée σ et ayant pour projection sur le plan Oxy un domaine régulier D à deux dimension. Nous supposerons que l'on peut partager la surface σ en trois parties $\sigma_1, \; \sigma_2, \; \sigma_3$ de sorte que les équations des deux premières s'écrivent

$$z = f_1(x, y) \;\; et \;\; z = f_2(x, y)$$

$f_1(x, y)$ et $f_2(x, y)$ étant continues dans le domaine D, et la troisième partie σ_3 étant une surface cylindrique de génératrices parallèles à l'axe Oz. Considérons l'intègrale

$$I = \iiint\limits_V \frac{\partial z(x, y, z)}{\partial z} dxdydz.$$

Intégrons d'abord sur les z :

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_D \left(\int\limits_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} \frac{\partial z}{\partial z} dz \right) dxdy = \qquad (2.21) \\ &= \iint\limits_D Z(x, y, f_2(x, y))\, dxdy - \iint\limits_D Z(x, y, f_1(x, y))\, dxdy. \end{aligned}$$

Définissons sur la surface σ normale positive, dirigée vers l'extérieur. Alors $\cos(n, z)$ sera positif sur la surface σ_2 et négatif sur la surface σ_1 : il est nul sur la surface σ_3. Les intégrale doubles du second membre de l'égalité (2.21) sont égales aux intégrales de surface correspondantes

$$\iint\limits_D Z(x, y, f_2(x, y))\, dxdy = \iint\limits_{\sigma_2} Z(x, y, z) \cos(n, z)\, d\sigma, \qquad (2.22)$$

$$\iint\limits_D Z(x, y, f_2(x, y))\, dxdy = \iint\limits_{\sigma_1} Z(x, y, z) (-\cos(n, z))\, d\sigma.$$

Nous avons écrit dans la dernière intégrale $(-\cos(n, z))$ parce que l'élément d'aire $\triangle\sigma_1$ de σ_1 est lié à l'élément d'aire $\triangle s$ du domaine D par la relation $\triangle s = \triangle\sigma_1 [-\cos(n, z)]$, étant donné que l'angle (n, z) est obtus Ainsi,

$$\iint_D Z\left(x, y, f_2\left(x, y\right)\right) dxdy = \tag{2.23}$$

$$= -\iint_{\sigma_1} Z\left(x, y, f_1\left(x, y\right)\right) \cos\left(n, z\right) d\sigma. \tag{2.24}$$

Substituant (2.22) et (2.23) dans (2.21), on obtient :

$$\begin{aligned}\iiint_V \frac{\partial Z\left(x, y, z\right)}{\partial z} dxdydz &= \\ &= \iint_{\sigma_2} Z\left(x, y, z\right) \cos\left(n, z\right) d\sigma + \iint_{\sigma 1} Z\left(x, y, z\right) \cos\left(n, z\right) d\sigma.\end{aligned}$$

Pour la commodité des calculs suivre, recopions cette dernière égalité en lui ajoutant la quantité $\iint_{\sigma_3} Z\left(x, y, z\right) \cos\left(n, z\right) d\sigma = 0$ (on a $\cos\left(n, z\right) = 0$ surσ_3) :

$$\begin{aligned}\iiint_V \frac{\partial Z\left(x, y, z\right)}{\partial z} dxdydz &= \\ &= \iint_{\sigma 2} Z \cos\left(n, z\right) d\sigma + \iint_{\sigma 1} Z \cos\left(n, z\right) d\sigma + \iint_{\sigma 3} Z \cos\left(n, z\right) d\sigma.\end{aligned}$$

Or, la somme des intégrales du second membre est égale à l'intégrale sur toute la surface σ fermée ; par conséquent,

$$\iiint_V \frac{\partial Z\left(x, y, z\right)}{\partial z} dxdydz = \iint_{\sigma} Z\left(x, y, z\right) \cos\left(n, z\right) d\sigma.$$

On obtient d'une manière analogue les relations :

$$\begin{aligned}\iiint\limits_V \frac{\partial Y(x,y,z)}{\partial y} dxdydz &= \iint\limits_\sigma Y(x,y,z)\cos(n,z)\,d\sigma.\\ \iiint\limits_V \frac{\partial X(x,y,z)}{\partial x} dxdydz &= \iint\limits_\sigma X(x,y,z)\cos(n,x)\,d\sigma.\end{aligned}$$

Ajoutant membre à membre ces trois dernières égalités, on obtient la formule d'Ostrogradsky :

$$\begin{aligned}\iiint\limits_V \left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right) dxdydz &= \\ &= \iint\limits_\sigma X\cos(n,x)+Y\cos(n,y)+Z\cos(n,z)\,d\sigma.\end{aligned} \tag{2.25}$$

L'expression $\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}$ est appelée la divergence du vecteur $F = Xi + Yj + Zk$ et on l'écrite $divF$:

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}.$$

Indiquons que cette formule est vraie pour tout domaine pouvant être partagé en domaine partiels satisfaisant aux conditions mentionnées au début de ce paragraphe. Donnons une interprétation hydrodynamique de la formule établie. Supposons que

$F = Xi + Yj + Zk$ soit le vecteur vitesse d'un fluide traversant le domaine V. L'intégrale de surface dans (2.25) est alors l'intégrale de la projection de F sur la normale extérieure n ; elle donne la quantité de fluide sorti du volume V à travers la surface σ pendant l'unité de temps (ou qui y est entré, si l'intégrale est négative). Cette quantité s'exprime au moyen de l'intégrale triple de div F. Si div $F \equiv 0$, l'intégrale double sur toute surface fermée est nulle, la quantité de fluide entré ou sorti est nulle. Plus précisément, la quantité de fluide entré dans le volume donné est égale à la quantité de fluide sorti.

Sous forme vectorielle, la formule d'Ostrogradsky s'écrit

$$\iiint\limits_V \operatorname{div} F \; dv = \iint\limits_\sigma Fn \; ds \tag{2.26}$$

et elle s'énonce : l'intégrale de la divergence d'un champ vectoriel F dans un volume est égale au flux du champ vectoriel à travers la surface limitant ce volume.

2.5 Opérateur hamiltonien et quelques applications

Soit donnée une fonction $u = u\,(x,\ y,\ z)$. En chaque point du domaine où la fonction $u\,(x,\ y,\ z)$ est définie et dérivable, est déterminé le gradient :

$$\operatorname{grad} u = i\frac{\partial u}{\partial x} + j\frac{\partial u}{\partial y} + k\frac{\partial u}{\partial z}. \tag{2.27}$$

Parfois le gradient de la fonction $u\,(x,\ y,\ z)$ est désigné ainsi :

$$\nabla u = i\frac{\partial u}{\partial x} + j\frac{\partial u}{\partial y} + k\frac{\partial u}{\partial z}; \tag{2.28}$$

le signe ∇ se lit «nabla»

1. Il est commode d'écrire sous une forme symbolique l'égalité (2.28) :

$$\nabla u = \left(i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z} \right) u \tag{2.29}$$

et de considérer le symbole

$$\nabla = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z} \tag{2.30}$$

comme un «vecteur symbolique». Ce vecteur symbolique est appelé opérateur hamiltonien ou opérateur nabla (opérateur ∇). Il découle des formules (2.28) et (2.29) que quand on «multiple» l'opérateur symbolique ∇ par une fonction scalaire u, on obtient le gradient de cette fonction :

$$\nabla u = \operatorname{grad} u. \tag{2.31}$$

2. On peut former le produit scalaire du vecteur symbolique ∇ par le vecteur $F = iX + jY + kZ$:

$$\begin{aligned}
F\nabla &= \left(i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}\right)(iX + jY + kZ) = \\
&= \frac{\partial}{\partial x}X + \frac{\partial}{\partial y}Y + \frac{\partial}{\partial z}Z = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \\
&= \operatorname{div} F.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$F\nabla = \operatorname{div} F$$

3. Formons le produit vectoriel du vecteur symbolique ∇ par le vecteur $F = iX+jY+kZ$:

$$\nabla \times F = \left(i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}\right) \times (iX + jY + kZ) =$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Y & Z \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Z \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ X & Y \end{vmatrix} =$$

$$= i\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) - j\left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}\right) + k\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) =$$

$$= i\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) + j\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) + k\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) = rotF.$$

Ainsi,

$$\nabla \times F = rotF.$$

Il découle de ce qui vient d'être dit que l'utilisation du vecteur symbolique ∇ permet d'exprimer sous une forme très succincte les opérations vectorielles. Considérons encore quelques formules.

4.Le champ vectoriel $F(x, y, z) = iX + jY + kZ$ est dit champ vectoriel potentiel si le vecteur F est le gradient d'une certaine fonction scalaire $u(x, y, z)$:

$$F = \operatorname{grad} u$$

ou

$$F = i\frac{\partial u}{\partial x} + j\frac{\partial u}{\partial y} + k\frac{\partial u}{\partial z}.$$

Dans ce cas les projections du vecteur F seront

$$X = \frac{\partial u}{\partial x},\ Y = \frac{\partial u}{\partial y},\ Z = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Il découle de ces égalités

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}, \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y},\ \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x}$$

ou

$$\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = 0, \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} = 0.$$

Par conséquent, pour le vecteur F considéré

$$rotF = 0.$$

Nous obtenons ainsi :

$$rot\,(\operatorname{grad} u) = 0.$$

En appliquant l'opérateur ∇, on peut écrire en vertu des formules (4) et (6) l'égalité (7) sous la forme :

$$\nabla \times \nabla u = 0.$$

Utilisant la propriété que lors de la multiplication d'un produit vectoriel par un scalaire il suffit de multiplier par ce scalaire l'un des facteurs seulement, nous écrirons :

$$\nabla \times \nabla u = 0.$$

L'opérateur ∇ possède de nouveau les propriétés d'un vecteur usuel : le produit vectoriel du vecteur par lui-même est nul. Le champ vectoriel $F(x, y, z)$ pour lequel $rot\ F = 0$ est dit irrotationnel. Il découle de l'égalité (7) que tout champ potentiel est irrotationnel. L'inverse est vrais également ; autrement dit, si un certain champ vectoriel F est irrotationnel, il est potentiel. La validité de cette affirmation découle des raisonnements conduits à la fin du Formule de Stokes.

5. Le champ vectoriel $F(x, y, z)$ pour lequel

$$\operatorname{div} F = 0,$$

c'èst-à-dire le champ vectoriel, ne recèle pas de sources, est appelé solénoïdal ou tubulaire. Démontrons que

$$\operatorname{div}(rot\ F) = 0,$$

autrement dit que le champ rotationnel ne recèle pas de sources.

En effet, si $F = iX + jY + kZ$, alors

$$rotF = i\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) + j\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) + k\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right),$$

et c'est pourquoi

$$\operatorname{div}(rotF) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) = 0.$$

L'égalité (8) s'écrira à l'aide de l'opérateur ∇ :

$$\nabla\left(\nabla\times F\right)=0.$$

La partie gauche de cette égalité peut être considérée comme le produit mixte vectoriel-scalaire des trois vecteurs ∇, ∇, F dont deux sont identiques. Ce produit est évidemment égal à zéro.

6. Soit donné un champ scalaire $u=u\left(x,y,z\right)$. Définissons le champ des gradients :

$$\operatorname{grad} u=i\frac{\partial u}{\partial x}+j\frac{\partial u}{\partial y}+k\frac{\partial u}{\partial z}.$$

Nous trouvons ensuite

$$\operatorname{div}\left(\operatorname{grad} u\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

ou

$$\operatorname{div}\left(\operatorname{grad} u\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial z}.$$

Le second membre de cette égalité est noté

$$\triangle u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

ou symboliquement

$$\triangle u=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)u.$$

Le symbole

$$\triangle u=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

est appelé opérateur de Laplace.

Par conséquent, l'égalité (9) peut s'ècrire :

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}\ u) = \triangle u.$$

A l'aide de l'opérateur ∇ l'égalité (11) s'écrira sous la forme

$$(\nabla\nabla u) = \triangle u, \quad c - \grave{a} - d. \;\; \triangle = \nabla^2.$$

Notons que l'équation

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = 0$$

ou

$$\triangle u = 0$$

est appelée équation de Laplace. Les fonctions vérifiant l'équation de Laplace sont appelées fonctions harmoniques.

Bibliographie

[1] M. Lofficial et D. Tanré : *Intégrales curvilignes et de surfaces.* Ellipses, paris, 2006.

[2] N. Piskounov : *Calcul différentielles et intégrales, tome 2.* 8 éd Mir. Moscou.