الجمهوريـــة الجزائـــريـــة الديمقراطيـــة الشعبيـــة
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليـــــم العالـــي والبحـــث العلمـــي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Nº Ref :……………

Centre Universitaire de Mila

Institut des sciences et de la technologie

Département de Mathématiques et Informatique

Contrôlabilité d'un système évolution

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques

Préparé par : Rekab ahlem
Zerizer Hayat

Encadré par : Labed boudjama

Filière : Mathématiques

Spécialité : Mathématiques fondamentales et appliquées

Année universitaire : 2012/2013

Table des matières

Introduction

Ce texte est un résumé partiel des multiples échanges et groupes de travail entre les années 1995 et 2003 tenus au sein du département de mathématiques de l'université de Franche-Comté. Il a, en partie, fait l'objet d'un cours de DEA donné à l'université de Provence en 2005 par le second auteur. Son but est de présenter le plus simplement possible les concepts de contrôlabilité de systèmes linéaires.

La contrôlabilité des équations aux dérivées partielles est un sujet en plein développement. Son histoire a commencé avec le cas de la dimension finie, avec les systèmes différentiels dont nous ne présenterons que le cas linéaire. Son extension à la dimension infinie a connu plusieurs temps. Le premier a concerné la notion de contrôlabilité approchée, en particulier dans le cas parabolique, qui revient essentiellement à démontrer des résultats d'unicité de type "Holmgren". Les théories de la contrôlabilité exacte et de la contrôlabilité aux trajectoires se sont ensuite développées, dans les années 70, en particulier autour des systèmes hyperboliques conservatifs pour la première et des problèmes paraboliques pour la seconde. Les années 90 sont marquées par deux points forts. D'abord, C.Bardos, G.Lebeau et J.Rauch [3] donnent une condition (quasiment) nécessaire et suffisante d'exacte contrôlabilité de l'équation des ondes contrôlée sur une partie du bord ou du domaine en utilisant des résultats d'analyse microlocale. Puis, la démonstration et l'utilisation d'inégalités globales de Carleman par A.Fursikov et O.Imanuvilov [2] (et également, pour l'équation de la chaleur en particulier, par G.Lebeau et L.Robbiano [9]) pour la contrôlabilité aux trajectoires des équations paraboliques du second ordre.

Ce mémoire est composé de trois chapitres :

Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques notions d'espaces et d'inégalités principaux, nous parlerons aussi de l'opérateur maximal monotone.

Dans le deuxième chapitre on parlerons de la théorie des semi-groupes sa définition et ses propriétés

Dans le troisième chapitre nous présenterons la contrôlabilité d'une système évolution avec ses deux dimensions finies et infinies.

Chapitre 1

Rappels et notions préliminaires

1.1 Quelques espaces et inégalité principaux

1.1.1 Espaces de Hilbert

Definition 1.1.1 *: Soit H un espace vectoriel réel ou complexe. Un produit scalaire est une application : $\langle H \times H \rangle \to C$ si H un espace vectoriel complexe et $\langle H \times H \rangle \to \mathbb{R}$ si H un espace vectoriel réel, vérifiant*

1. $\forall y \in H : x \to \langle x, y \rangle$ *est linéaire (en x)*
2. $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$
3. $\langle x, x \rangle \geq 0$ *et si* $\langle x, x \rangle = 0$ *alors* $x = 0$.

   Par conséquent $y \to \langle y, x \rangle$ est anti-linéaire (en y) si H un espace vectoriel réel ou complexe.

On pose

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Nous montrons plus tard que $\|.\|$ est bien une norme.

Exemple 1.1.2 *: Soit $H = L^2(\Omega)$ où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ borélienne, muni de la mesure de Lebesgue ou la mesure discrète. Si $f, g \in L^2(\Omega)$ alors $f\overline{g} \in L^1(\Omega)$ et*

$$\langle f, g \rangle = \int_\Omega f\overline{g}$$

est bien défini, et $\|f\| = \sqrt{\int |f|^2} = \|f\|_2$.

Lemme 1.1.3 *: Soit H un espace vectoriel réel ou complexe muni du produit scalaire $\langle ., . \rangle$.*

Alors, pour tous $x, y \in H$

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x, y\rangle + \|y\|^2 .$$

Preuve. :

$$\begin{aligned} \langle x+y, x+y\rangle &= \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle \qquad (1.1)\\ &= \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \overline{\langle x,y\rangle} + \langle y,y\rangle \\ &= \|x+y\|^2 \\ &= \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x,y\rangle + \|y\|^2 \end{aligned}$$

Nous vérifions aisément certaine propriétés de la norme pour $\|.\|$:

1. $\|x\| \geq 0$ par définition et si $\|x\| = 0$ c'est que $\langle x, x\rangle = 0$ et donc $x = 0$.
2. pour $\lambda \in C$ nous avons

$$\begin{aligned} \|\lambda x\| &= \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x\rangle} \\ &= \sqrt{\lambda\bar{\lambda}\langle x,x\rangle} \\ &= \sqrt{|\lambda|^2\langle x,x\rangle} \\ &= |\lambda|\sqrt{\langle x,x\rangle} \\ &= |\lambda|\,\|x\| . \end{aligned}$$

■

Proposition 1.1.4 *: (Inégalité Cauchy-Schwarz)*

Soit H un espace vectoriel (réel ou complexe) muni du produit scalaire $\langle .,.\rangle$. Alors pour tout $x, y \in H$

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\| .$$

Corollaire 1.1.5 *: Soit H un espace vectoriel (réel au complexe) muni du produit scalaire $\langle .,.\rangle$. Alors $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$ définit une norme.*

Preuve. : Il ne nous reste plus qu'à vérifier l'inégalité triangulaire. On a d'après l'inégalité de Cauchy Schwarz :

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x,y\rangle + \|y\|^2 \qquad (1.2)\\ &\leq \|x\|^2 + 2|\langle x,y\rangle| + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 \\ &\leq (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

$\blacksquare$

Definition 1.1.6 : *On dit que deux vecteurs x, y d'une espace vectoriel complexe sont orthogonaux pour le produit scalaire $\langle ., . \rangle$ si $\langle x, y \rangle = 0$.*

Definition 1.1.7 : *Un espace de Hilbert est un espace vectoriel réel ou complexe muni d'un produit scalaire et qui est complet pour la norme associée.*

Definition 1.1.8 : *Soit H un espace de Hilbert et H_1 et H_2 deux sous-espaces vectoriels.*

On dit que H est la somme direct orthogonale de H_1 et H_2, notée $H = H_1 \oplus^{\perp} H_2$, si $H = H_1 + H_2$, $H_1 \cap H_2 = \{0\}$ et $\forall x_1 \in H_1, \forall x_2 \in H_2 : \langle x_1, x_2 \rangle = 0$. Le complémentaire orthogonale d'une sous-espace $F \subset H$ est défini par $F^{\perp} := \{x \in H / \forall y \in F : \langle x, y \rangle = 0\}$.

Théorème 1.1.9 : *Soit H un espace de Hilbert et $F \subset H$ un sous espace fermé. Soit $x \in H$. Alors*

i) Il existe un unique $y \in F$ qui satisfait

$$\|x - y\| = d(x, F) := \inf\{\|x - z\| \,; z \in F\}.$$

On note $y = P_{F(x)}$. Ceci définit alors une application

$$P_F : H \to H.$$

ii) $P_{F(x)}$ est l'unique vecteur dans F qui satisfait $x - P_{F(x)} \perp F$.

iii) $\forall x \in H : \|x\|^2 = \left\|P_{F(x)}\right\|^2 + \|P_{F^{\perp}}(x)\|^2$.

iv) l'application $P_F : H \to H$ est linéaire et continue. C'est la projection sur F le long $F^{\perp}$.

v) Le complémentaire orthogonal $F^{\perp}$ est un sous espace fermé de H et $H = F \oplus F^{\perp}$.

Preuve. : Pour $\varepsilon < 0$, prenons $y, z \in F$ et supposons que

$$d(x, y)^2 \leq d(x, F)^2 + \varepsilon \text{ et } d(x, z)^2 \leq d(x, F)^2 + \varepsilon.$$

Posons : $w = \dfrac{y + z}{2}, u = \dfrac{y - z}{2}$, de telle façon que $w \in F$; $y = w + u$, $z = w - u$.

D'après l'identité du parallélogramme :

$$\begin{aligned}
\|(x - w) + u\|^2 + \|(x - w) - u\|^2 &= 2\left(\|x - w\|^2 + \|u\|^2\right) \\
\frac{\|x - z\|^2 + \|x - y\|^2}{2} &= d(x, w)^2 + \frac{1}{4} d(y, z)^2 \\
d(x, F)^2 + \varepsilon &> d(x, F)^2 + \frac{1}{4} d(y, z)^2 \\
d(y, z) &< 2\sqrt{\varepsilon}.
\end{aligned}$$

Soit maintenant $(y_n) \subset F$ une suit telle que $d(x, y_n) \to d(x, F)$. Alors d'après notre calcul c'est une suite de Cauchy qui doit donc converger vers un $y \in F$ (puisque H est complet et F est fermé). Nous obtenons

$$d(x, y) = \lim d(x, y_n) = d(x, F).$$

Pour l'unicité supposons que $z \in F$ vérifier lui aussi $d(x, z) = d(x, F)$.

Alors encore d'après le calcule précédent $d(y, z) < 2\sqrt{\varepsilon}$ pour tout $\varepsilon < 0$, ce qui donne $d(y, z) = 0$ alors $y = z$.

Ceci montre le première point et donc l'existence de l'application P_F.

Pour le deuxième point, supposons que $x - P_F \perp F$.

Il existe donc $z \in F$ tel que $\langle x - P_f(x), z\rangle = s \neq 0$, et quitte à diviser z par $\overline{s}$ nous pouvons supposer que

$$\langle x - P_f(x), z\rangle = 1.$$

Soit encore t une variable réelle. Alors $P_F(x) + tz \in F$

$$\begin{aligned} d(x, P_F(x) + tz)^2 &= \|x - P_F(x) - tz\|^2 \\ &= t^2 \times \left\|z^2\right\| - 2t + \|x - P_F(x)\|^2. \end{aligned}$$

Ce polynôme en t atteint son minimum ailleurs qu'à $t = 0$, donc $d(x, F) \leq d(x, P_F(x))$, une contraduction au choix de $P_F(x)$. Nous avons donc bien

$$x - P_F(x) \perp F.$$

Pour l'unicité, supposons que $x - y \perp F$ et $x - z \perp F$, ou $y, z \in F$ (par exemple, on pourrait avoir $y = P_F(x)$).

Alors

$$y - z \in F,$$

d'ou

$$\langle x - y, y - z\rangle = \langle x - z, y - z\rangle = 0.$$

Une soustraction donne $\langle y - z, y - z\rangle = 0$, d'ou $y - z = 0$ et $y = z$.

Le troisième point découle du deuxième, vu que $x - P_F(x) \perp P_F(x)$.

Pour (iv), on vérifier aisément que

$$(x + \lambda y) + (P_F(x) - \lambda P_F(y)) = (x - P_F(x)) + \lambda\left(y - P_F(y)\right) \in F^{\perp},$$

d'ou

$$P_F(x) - \lambda P_F(y) = P_F(x + \lambda y)$$

d'après (ii), et P_F est linéaire.

D'après (iii) nous avons $\|P_F(x)\| \leq \|x\|$, donc P_F est continu (de norme ≤ 1).

Finalement, pour tout $x \in H$ nous avons $x = (x - P_F(x)) + P_F(x)$, ou $x - P_F(x) \in F^\perp$ et $P'_F(x) \in F$, ce qui donne bien $F \oplus F^\perp = H$. ■

Corollaire 1.1.10 *: Pour tout sous-espace vectoriel fermé $F \subset H$ on a $\left(F^\perp\right)^\perp = F$.*

En particulier l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel non fermé est fermé. En autre F est dense dans H si et seulement si $F^\perp = 0$.

Corollaire 1.1.11 *: **(Théorème de représentation de Riezs).***

Soit $\varphi : H \to C$ une forme linéaire continue. Alors il existe un unique $y \in H$ tel que pour tout x :

$$\varphi(x) = \langle x, y \rangle .$$

En autre, nous avons $\|\varphi\| = \|y\|$ où

$$\|\varphi\| = \sup \{|\varphi(x)| ; |x| \leq 1\} .$$

Definition 1.1.12 *: Un espace de Hilbert H est séparable s'il possède une suite de points qui est dense dans H.*

Definition 1.1.13 *: Soit H un espace de Hilbert séparable. On appelle base orthonormale de H tout sous-ensemble fini ou dénombrable $\{e_n\}_n$ qui vérifie :*

i) $\|e_n\| = 1$ et $\langle e_n, e_m \rangle = 0$ si $n \neq m$.

ii) Le sous-espace vectoriel engendré par $\{e_n\}_n$ (par combinaisons linéaires finies) est dense dans H.

Lemme 1.1.14 *: Soit $(e_i)_{i<n}$ une famille orthonormée et soit F le sous-espaces engendré (donc $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$, mais on ne demande pas que F soit dense). Pour tout x :*

$$P_{\overline{F}(x)} = \sum_{i<n} \langle x, e_i \rangle e_i.$$

Preuve. : IL suffit de prouver que $x - \sum_{i<n} \langle x, e_i \rangle e_i \perp F$ ce qui immédiat. ■

Théorème 1.1.15 *: **(Existence des bases orthonormales)***

Tout espace de Hilbert séparable posséde une base orthonormale.

Théorème 1.1.16 *: Soient H un espace de Hilbert et $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une base orthonormale :*

i) pour toute $(\lambda_n)_n \in l^2(\mathbb{N})$ la série $\sum_{n\geq 0}\lambda_n e_n$ converge dans H et sa somme

$x = \sum_{n\geq 0}\lambda_n e_n$ vérifie

$$\langle x, e_n\rangle = \lambda_n, \quad \|x\|^2 = \sum_{n\geq 0}|\lambda|^2 .$$

ii) pour tout $x \in H$ la série $\sum_{n\geq 0}|\langle x, e_n\rangle|^2$ converge et

$$x = \sum_{n\geq 0}\langle x, e_n\rangle e_n, \quad \|x\|^2 = \sum_{n\geq 0}|\langle x, e_n\rangle|^2 .$$

Definition 1.1.17 *: Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert. Une isométrie entre H_1 et H_2 est une application linéaire $U : H_1 \to H_2$ qui satisfait $\forall x \in H_1 : \|U(x)\| = \|x\|$.*

H_1 et H_2 est une isomorphes s'il existe une isométrie bijective entre eux.

Proposition 1.1.18 *: Soient X_1 et X_2 deux espaces de Banach. Soit $E \subset X_1$ un sous espace vectoriel dense (donc, non nécessairement complet).*

Soit $u : E \to X_2$ une application linéaire, et supposons en autre qu'elle est continue (ce qui revient à l'existence d'une constante C telle que pour tout $x \in E$: $\|u(x)\| \leq C\|x\|$).

Alors u admet un unique prolongement en une application linéaire continue

$$\widetilde{u} : X_1 \to X_2.$$

1.1.2 Espaces de Lebesgue $L^p, 1 \leq p \leq \infty$.

On considère Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Les fonction f seront considérées de Ω dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Definition 1.1.19 *: Pour $1 \leq p < \infty$, on appelle norme L^p et on note $\|.\|_p$ l'application définie par $\|f\|_p = \left(\int_{\Omega.}|f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.*

Definition 1.1.20 *: On appelle espace supessentiel et on note*

$$\|F\|_{L^\infty} = \inf\{C \geq 0 \text{ tel que } |f(x)| \leq C \text{ pp sur } \Omega\} .$$

Definition 1.1.21 *: On dit que p et p' sont deux exposant conjugués pour tout $p, p' \in [1;\infty]$ ssi $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. On notera dans toute la suite p' le conjugué de p.*

Corollaire 1.1.22 *: (**Inégalité de Minkowsi**)*

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p .$$

Théorème 1.1.23 *: L^p est un espace vectoriel et $\forall p \in [1;\infty]$, $\|.\|_p$ est une norme.*

Théorème 1.1.24 *: (**de convergence dominée de Lebesgue pour les espaces** L^p).*

On suppose $p \neq \infty$. Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables telle que $f_n(x) \to f(x)$ p.p.si $\exists g \in L^p \diagup \forall (x,n) \, |f_n(x)| \leq g(x)$. Alors $f \in L^p$ et $f_n \to f$ en norme L^p.

Exemple 1.1.25 *: Pour $p=\infty$, la suite de fonctions $f_n = X_{[n,\infty[}$, montre que le théorème précédent ne fonctionne pas pour L^p.*

Théorème 1.1.26 *: (**Fischer-Riesz**)*

$$\forall p \in [1;\infty] \, , L^p \text{est un espace de Banach.}$$

Théorème 1.1.27 *: Les fonctions en escaliers forment un sous-espace vectoriel dense de L^p pour $p \in [1,\infty[$.*

Théorème 1.1.28 *: (**de densité**).*

L'espace $C_c(\Omega)$ des fonctions continues à support compact est dence dans $L^p(\Omega)$ pour $1 \leq p < \infty$.

Théorème 1.1.29 *: L'espace $C_c^\infty(\Omega)$ des fonctions infiniment dérivables à support compact est dence dans $L^p(\Omega)$ pour $1 \leq p < \infty$.*

Proposition 1.1.30 *: L'espace $C_c^\infty(\Omega)$ est dence dans le sous espace de L^∞ des fonctions bornées qui tendent vers 0 à l'infini.*

Definition 1.1.31 *: Un espace est séparable s'il contient une partie dénombrable dense.*

Théorème 1.1.32 *: (**Espaces séparables**).*

$L^p(\Omega)$ est séparable pour $1 \leq p < \infty$.

Proposition 1.1.33 *: $L^\infty(\Omega)$ n'est pas séparable.*

Théorème 1.1.34 *: (**Représentation de Riesz**).*

Soit $1 \leq p < \infty$ et soit $\phi \in (L^p)'$. Alors $\exists! u \in L^{p'}$ tel que $<\phi, f> = \int uf, \forall f \in L^p$. De plus on a $\|u\|_{L^{p'}} = \|\phi\|_{(L^p)'}$. Ce théorème permet d'identifier le dual de L^p à $L^{p'}$.

Théorème 1.1.35 *: Le dual de L^∞contient strictement L^1 et s'identifier à l'espace des mesures de Radon.*

Exemple 1.1.36 *: **(d'élément de L^∞ qui n'est pas dans L^1)***

Supposons que $0 \in \Omega$. Soit $\phi_0 : C_c(\Omega) \to \mathbb{R}$ définie par $\phi_0(f) = f(0)$. Soit ϕ la fonction qui prolonge cette fonction en une forme linéaire et continue sur L^∞. Alors, il n'existe pas de fonction $u \in L^1$telle que

$$< \phi, f >= \int uf, \forall f \in L^\infty.$$

Definition 1.1.37 *: Soit $J : E \to E^u$ tel que $J(x) = f \to < f, x >$ un espace E est dit réflexif si J est bijective de E dans E^u .*

Théorème 1.1.38 *: L^p est réfléxif pour $1 < p < \infty$.*

Proposition 1.1.39 *: L^1 et L^∞ ne sont pas réflexifs.*

Exemple 1.1.40 *: **(de la non réflexivité de L^1).***

Considérons $0 \in \Omega$ et la suite

$$f_n = \alpha_n (1)_{B\left(0,\frac{1}{n}\right)},$$

avec n assez grand pour que $B(0,n) \subset \Omega$ et α_n tel que $\|f\|_{L^1} = 1$. Si L^1 etait réflexif, on pourrait avoir à la fois f

(limite faible d'une sous suite de f_n) égale a 0 presque partout et $\int f = 1$, ce qui serait absurde.

Théorème 1.1.41 *: **(Réciproque du théorème de Lebesgue)***

Soit (f_n) une suite de L^P et $f \in L^P$ telle que $\|f_n - f\|_p \to 0$. Alors il existe une sous suite extraite (f_{n_k}) telle que :

1- $f_{n_k}(x) \to f(x)$ p.p sur Ω.

2- $\forall k \in \mathbb{N}, |f_{n_k}(x)| \leq h(x)$ p.p. sur Ω, avec $h \in L^P$.

Remarque 1.1.42 *: On peut souvent utiliser une convergence faible pour démontrer une convergence forte.*

Exemple 1.1.43 *: Soit $p > 1$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans L^p qui converge faiblement vers $f \in L^p$ et telle que $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$. Alors f_n converge fortement vers f pour la norme L^p.*

Proposition 1.1.44 *: Le produit de deux fonctions de L^2 est intégrable.*

Definition 1.1.45 *: On peut définir un produit scalaire euclidien sur* L^2 *par*

$$(f,g) \to \langle f \mid g \rangle = \int fg dx.$$

On peut définir un produit scalaire hermitien sur $L^2(\mathbb{C})$ *par*

$$(f,g) \to \langle f \mid g \rangle = \int \overline{fg} dx.$$

Théorème 1.1.46 *: Muni de son produit scalaire,* L^2 *est un espace de Hilbert.*

Remarque 1.1.47 *: Les propriétés de cet espace ont énormément d'application aux séries de Fourier.*

Exemple 1.1.48 *:* ***(Théorème de Plancherel).***

A chaque fonction f *de* L^2*, on peut associer une fonction* $\widehat{f}$ *de* L^2 *de sorte que les propriétés suivantes soient satisfaites :*

1. Lorsque $f \in L^1 \cap L^2$, $\widehat{f}$ *est la transformiez de Fourier de* f.

2. $\forall f \in L^2$, *on a* $\left\|\widehat{f}\right\|_2 = \|f\|_2$.

3. L'application $f \to \widehat{f}$ *est un isomorphisme d'espace de Hilbert de* L^2 *sur* L^2.

4. Entre f *et* $\widehat{f}$ *existent les relations symétriques suivantes : en posant*

$$\phi_A(t) = \int_{-A}^{A} f(x) e^{-ixt} dx,$$

et

$$\psi_A(x) = \int_{-A}^{A} \widehat{f}(x) e^{ixt} dx,$$

on a

$$\lim_{A\to\infty} \|\phi_A - f\|_2 = 0,$$

et

$$\lim_{A\to\infty} \left\|\psi_A - \widehat{f}\right\|_2 = 0.$$

1.1.3 Espaces de sobolev :$\left(W^{m,p}(\Omega), m \in \mathbb{N}, p \in [1,+\infty]\right)$

Definition 1.1.49 *:* $(W^{m,p}(\Omega))$.

Soient $(m,p) \in \mathbb{N} \times [1,+\infty]$. *On définit* $W^{m,p}(\Omega)$ *par :*

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ \begin{array}{c} f \in L^p(\Omega) \;\; tq \; \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \; avec \; |\alpha| \le m, \exists £_\alpha \in L^p(\Omega) \;\; vérifait : \\ \int\limits_\Omega f(x) D^\alpha \varphi(x) = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega £_\alpha(x) \varphi(x) dx, \; \forall \varphi \in D(\Omega) \end{array} \right\}.$$

On pose : $D^{\alpha} f = \mathcal{L}_{\alpha}$.
On définit sur $W^{m,p}(\Omega)$ *la norme*

$$\|f\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|\mathcal{L}_{\alpha}\|_{L^p(\Omega)} .$$

Cas particuliare :
1- $W^{0,1}(\Omega) = L^p(\Omega)$.
2- $p = 2$ *:* $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$.

Proposition 1.1.50 *:* $H^m(\Omega)$ *est un espace de Hilbert la produit scalaire est donnée par :*

$$\forall f, g \in H^m(\Omega) : \langle f, g \rangle = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^{\alpha} f(x) \, D^{\alpha} g(x) \, dx = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle D^{\alpha} f, D^{\alpha} g \rangle_{L^2(\Omega)} .$$

Remarque 1.1.51 *:* $C^m(\Omega) \subset H^m(\Omega)$ *mais l'inverse n'est pas vrai.*

Proposition 1.1.52 *:* $D(\mathbb{R}^n)$ *est dense dans* $H^1(\mathbb{R}^n)$.

Remarque 1.1.53 *: En générale* $D(\Omega)$ *n'est pas dense dans* $H^1(\Omega)$.

Definition 1.1.54 *:* $(H_0^m(\Omega))$.
On définit $H_0^m(\Omega) = \overline{D(\Omega)}$ *(par rapport a la norme de* $H^m(\Omega)$*).*
C'est-à-dire :

$$H_0^m(\Omega) = \left\{ f \in H^m(\Omega) \setminus \exists (\varphi_k) \in D(\Omega) \text{ vérifiant : } \|\varphi_k - f\|_{H^m(\Omega)} \to 0 \text{ tend } k \to +\infty \right\} .$$

Le même $W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{D(\Omega)}$ *par rapport a la norme de* $W^{m,p}(\Omega)$.

Definition 1.1.55 ***: (Dérivée normal).***
On définit la dérivée normale d'une fonction f*, notée par* $\frac{\partial f}{\partial v}$ *comme étant* $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} v_i(x)$.
On pose

$$\begin{array}{rccc} \gamma : & D(\overline{\Omega}) & \to & L^2(\Gamma) \\ & \varphi & \to & \gamma(\varphi) = \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} / r \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \gamma_0 : & D(\overline{\Omega}) & \to & L^2(\Gamma) \\ & \varphi & \to & \gamma_0(\varphi) = \varphi / r \end{array}$$

se prolonge par continuité à $H^1(\Omega)$

$$\begin{array}{rccc} \gamma_0 : & H^1(\Omega) & \to & L^2(\Gamma) \\ & f & \to & \gamma_0(f) = \lim \varphi_n / r \end{array}$$

(dit γ_0 est l'application de trace).

Théorème 1.1.56 *: Si Γ est de classe C^2 alors γ se prolonge sur $H^2(\Omega)$:*

$$\begin{array}{rccc} \gamma_0 : & H^2(\Omega) & \to & L^2(\Gamma) \\ & f & \to & \gamma(f) = \dfrac{\partial f}{\partial v}/r \end{array}.$$

Definition 1.1.57 *: $(H_0^1(\Omega))$.*

$$H_0^2(\Omega) = \overline{D(\Omega)}\ (\textit{par rapport la norme de } H^2(\Omega)).$$

Proposition 1.1.58 *: Si Γ est de classe C^2, alors $H_0^2(\Omega) = \ker\gamma_0 \cap \ker\gamma$ (ie : $f \in H^2(\Omega)$ tq $f = 0$ pp sur Γ et $\dfrac{\partial f}{\partial v} = 0$ pp sur Γ).*

1.1.4 Inégalité d'interpolation :

Soit $m \in \mathbb{N}/\{0,1\}$ et $p_1, p_2, \ldots, p_m \in [1, +\infty]$ tq $\dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{p_2} + \cdots + \dfrac{1}{p_m} \geq 1$ on pose : $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{p_2} + \cdots + \dfrac{1}{p_m}$ on a $\forall f_i \in L^{p_i}(\Omega)$, $i = 1 \cdots m$ alors $f = f_1.f_2.......f_m \in L^p(\Omega)$ et on a :

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq \prod_{i=1}^{m} \|f_i\|_{L^{p_i}(\Omega)}.$$

1.1.5 Inégalité de Holder :

Soit $p, q \in [1, +\infty]$ tq $1 = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$ alors : $\forall f \in L^p(\Omega)$, $\forall g \in L^q(\Omega)$: $f, g \in L^1(\Omega)$ on a :

$$\begin{array}{rcl} \|f, g\|_{L^1(\Omega)} & \leq & \|f\|_{L^p(\Omega)} \cdot \|g\|_{L^q(\Omega)} \\ & & (\text{i.e} \quad : \displaystyle\int_\Omega |f(x)g(x)|\, dx \leq \left(\int_\Omega |f(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} . \left(\int_\Omega |g(x)|^q\, dx\right)^{\frac{1}{q}}). \end{array}$$

1.1.6 Inégalité de Green :

Soit $f, g \in H^1(\Omega)$ (où $\Omega \in \mathbb{R}^n$ un ouvert) de frontière Γ bornée et de classe C^1 alors :

$$\int_\Omega \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} g(x) dx = -\int_\Omega f(x) \frac{\partial g(x)}{\partial x_i} dx + \int_\Gamma f(x) g(x) v_i(x) dx.$$

1.1.7 Inégalité de Poincaré

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné, il existe une constant $c > 0$ vérifiant :

$$\|f\|_{H^1(\Omega)} \leq c\,\|\nabla f\|_{L^2(\Omega)}\,,$$

où $\nabla f = (\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n})$ c'est-à-dire :

$$\int_\Omega \left[f^2(x) + \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|^2 \right] dx \leq c \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|^2 dx.$$

1.2 Opérateur maximal monotone

Soit H un espace de Hilbert et $A : D(A) \to H$ un opérateur donnée où $D(A)$ est son domaine ($D(A) \subset H$).

Definition 1.2.1 *: On dit que A est monotone si :*

$$\langle Au - Av, u - v \rangle_H \geq 0, \forall u, v \in D\,(A)\,.$$

Remarque 1.2.2 *: Si A linéaire on a : $\langle Au, u \rangle_H \geq 0$, $\forall u \in D(A)$.*

Definition 1.2.3 *: On dit que A est maximal si seulement si $I_d + A : D(A) \to H$ est un surjectif c'est-à-dire*

$$\forall f \in H, \exists u \in D(A) \ tq : u + Au = f.$$

Proposition 1.2.4 *: Soit H un espace de Hilbert (réel). Sont équivalents :*

1- A est maximal monotone dans H.

2- $(I + \lambda A)^{-1}$ est une contraction par tout définie de H pour tout $\lambda \geq 0$.

3- A est monotone et il existe λ positif tel que $(I + \lambda A)$ est Surjectif.

Théorème 1.2.5 *: Supposons que A est maximal monotone alors :*

1. pour tout $u_0 \in D\,(A)$ on a le système

$$\begin{cases} u\acute{}(t) + Au\,(t) = 0, \ \forall t \geq 0 \\ u\,(0) = u_0 \end{cases}$$

admet un solution unique $u \in C\,(\mathbb{R}_+, H)$ (C'est-à-dire $\forall t_0 \in \mathbb{R}_+ : \|u\,(t) - u\,(t_0)\|_H \to 0$ tend $t \to t_0$)
La solution u est dit faible.

2. Si $u_0 \in D(A)$ alors $u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}_+, H) \cap W^{0,\infty}(\mathbb{R}_+, D(A))$ où sur $D(A)$ on considère la norme du graphe

$$\|u\|_{D(A)} = \sqrt{\|u\|_H^2 + \|Au\|_H^2}, \forall u \in D(A).$$

La solution u dite forte (la régularité de u signifie

$$\sup_{t \geq 0} \|u(t)\|_H < \infty, \sup_{t \geq 0} \|u(t)\|_{D(A)} < \infty$$

et u est dérivable au sens des distributions).

3. Si A est linéaire et $u_0 \in D(A)$ alors $u \in C(\mathbb{R}_+, D(A)) \cap C^1(\mathbb{R}_+, H)$. La solution u est dite classique.

Chapitre 2

Semi groupes

2.1 Semi-groupes

2.1.1 Définition

Definition 2.1.1 *: Soit X un espace de Banach, on dit que la famille d'opérateur linéaire $(S(t))_{t\geq 0}$ est un semi-groupe (fortement continu) si :*

i) $\forall t > 0$, $S(t) \in L(X)$.

ii) $S(0) = Id_{L(X)}$.

iii) $\forall (s,t) \geq 0$, $S(s+t) = S(s)S(t)$.

iv) $\forall x \in X$; $\lim\limits_{t\to 0^+} S(t)x = x$.

La condition (iv) est équivalente à ce que $\forall x \in X$, $t \to S(t)x \in C^0(\mathbb{R}^+, X)$.

Si on remplace (iv) par (iv)* : $\lim\limits_{t\to 0} \|S(t) - Id\|_{L(X)} = 0$ on dit $(S(t))_{t\geq 0}$ est uniformément continu.

On trouve le générateur infinitésimal $(A, D(A))$ d'un semi groupe fortement continu $(S(t))_{t\geq 0}$ comme l'opérateur non bornée $A : D(A) \to X$ où

$$\begin{aligned} D(A) &= \left\{ x \in X, \lim_{t\to 0} \frac{S(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\} \\ \forall x &\in D(A),\ Ax = \lim_{t\to 0} \frac{S(t)x - x}{t}. \end{aligned}$$

Dans le cas où $D(A) = X$ et $A \in L(X)$ la famille d'opérateurs $\left(e^{tA}\right)_{t\geq 0}$ (définie classiquement par ca série) est un semi-groupe fortement continu de générateur infinitésimal A.

On dit que le semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ est de contraction si $\forall t \geq 0, \|S(t)\|_{L(x)} \leq 1$.

2.1.2 Propriété des semi-groupes de contraction

Théorème 2.1.2 *: Soit X un espace de Banach, $(S(t))_{t\geq 0}$ un semi-groupe de contraction sur X et $(A, D(A))$ son générateur infinitésimal Alors :*

i) $\forall x \in X$ le flot $t \to S(t)x \in C^0(\mathbb{R}^+, X)$.

ii) $\forall x \in A$ $\forall t \geq 0$ on a $S(t)x \in D(A)$, le flot $t \to S(t)x \in C^1(\mathbb{R}^+, X)$ est vérifié $x^{'}(t) = Ax(t)$.

iii) $(A, D(A))$ est fermée de domaine dense.

2.2 Opérateur dissipatifs

2.2.1 Définition

Definition 2.2.1 *: Un opérateur $(A, D(A))$ est dissipatif si*

$$\forall x \in D(A) \text{ et } \forall \lambda > 0, \|x - \lambda Ax\| \geq \|x\|.$$

Dans le cas où $X = H$ est Hilbertien on montre que A est dissipatif si et seulement si

$$\forall x \in D(A) \operatorname{Re}(\langle Ax, x \rangle_H) \leq 0.$$

Si $(A, D(A))$ est un opérateur dissipatif alors $\forall \lambda > 0$ l'opérateur $(Id - \lambda A)$ est injectif car

$$(Id - \lambda A) > 0 \Longrightarrow 0 \leq \|x\| \leq \|(Id - \lambda A)x\| = 0 \Longrightarrow x = 0.$$

Si de plus $\forall \lambda > 0$, $(Id - \lambda A)$ est surjectif on dit que $(A, D(A))$ est maximal-dissipatif (ou m-dissipatif). On peut montrer que $\forall \lambda > 0$, $Id - \lambda A$ est surjectif $\Longrightarrow \exists \lambda_0 > 0$ tq $Id - \lambda_0 A$ est surjectif.

En pratique pour montrer qu'un opérateur est m-dissipatif on montre d'abord à la main qu'il est dissipatif et on résout ensuite un problème variationnel pour une valeur λ_0 bien choisie.

Dans ce cas l'opérateur $(Id - \lambda A)$ est un isomorphisme (a priori non continu) de (A, X) et on note $J_\lambda = (Id - \lambda A)^{-1}$.

De plus, comme $\|J_\lambda y\|_X \leq \|(Id - \lambda A)[J_\lambda y]\|_X \leq \|y\|_X$, $J_\lambda \in ((X, \|.\|_X), (D(A), \|.\|_X))$.

Nous allons voir que cette propriété de continuité peut être améliorée (on va rendre moins fine la topologie sur $(D(A), \|.\|_X)$ en munissant $D(A)$ d'une norme $\|.\|_{D(A)}$).

2.2.2 Propriété des opérateur m-dissipatif

Proposition 2.2.2 *: Si $(A, D(A))$ est m-dissipatif alors c'est un opérateur fermé.*

Corollaire 2.2.3 *: Pour $x \in D(A)$ on pose $\|x\|_{D(A)} = \|x\|_X + \|Ax\|_X$. Alors $\|.\|_{D(A)}$ est une norme pour laquelle $D(A)$ est un espace de Banach et $A \in ((D(A), \|.\|_A), (X, \|.\|_X))$.*

Proposition 2.2.4 *: Si H est un espace Hilbertien et $A \in D(A) \subset H \to H$ est m-dissipatif alors il est à domaine dense.*

Proposition 2.2.5 *: Réciproquement si $A \in D(A) \subset H \to H$ est de domaine dense, dissipatif, fermé et tel que son adjoint $(A^*, D^*(A))$ est dissipatif alors $(A, D(A))$ est m-dissipatif.*

Corollaire 2.2.6 *: Toujours dans le cadre Hilbertien :*

i) Si $(A, D(A))$ est dissipatif auto-adjoint à domaine dense alors il est m-dissipatif.

ii) Si $(A, D(A))$ est anti-adjoint à domaine dense alors il est m-dissipatif.

Remarque 2.2.7 *: Dans (ii) la condition de dissipativité n'est pas nécessaire car $(A, D(A))$ anti-adjoint entraîne que $< Ax, x >_H = 0$ donc la dissipativité.*

2.3 Théorème de Hille-Yosida

2.4 Enoncé

Théorème 2.4.1 *: **(Hille-Yosida)***

Soit X un espace de Banach et $A \in D(A) \subset X \to X$ un opérateur non borné. On a l'équivalence :

i) $(A, D(A))$ est m-dissipatif à domaines dense.

ii) $(A, D(A))$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contraction.

Le point (i) du théorème précédent peut être récrit en termes de résolvante : (i)́ $(A, D(A))$, l'opérateur fermé à domaine dense, vérifié $(0, +\infty) \subset \rho(A)$ et

$$\|R_\lambda\|_{L(X)} \leq \frac{1}{\lambda}$$

pour tout $\lambda > 0$.

Ainsi sous ces hypothèses et d'après le théorème 2.1.3 pour toute condition initiale $x_0 \in D$ il existe une unique solution forte $t \to x(t)$ dans

$$C^0\left(\mathbb{R}^+, \left(D(A), \|.\|_{D(A)}\right)\right) \cap C^1\left(\mathbb{R}^+, (X, \|.\|_X)\right).$$

Lorsque la condition initiale est prise quelconque dans X on a une solution faible

$$t \to x(t) = S(t)x$$

de classe $C^1(\mathbb{R}^+, (X, \|.\|_X))$ *(et on montre que toute solution faible est limite dans* X *de solutions fortes).*

2.4.1 Régularité des solutions

On constate que la régularité de la solution est étroitement liée au choix de la condition initiale en fonction du domaine de A : il est donc naturel de penser qu'en imposant plus de "régularité" à x_0 on obtienne plus de régularité sur les solutions. Plus précisément on pose pou $k \geq 2$, $D(A^k) = \left\{x \in D(A^{k-1}), Ax \in D(A^{k-1})\right\}$. Alors on a le

Théorème 2.4.2 *: On peut munir les* $D(A^k)$ *des normes* $\|x\|_{D(A^k)} = \sum_{i=0}^{k} \|A^i x\|$ *pour lesquels ce sont des espaces de Banach.*

De plus si la condition initiale $x_0 \in D(A^k)$ *alors la solution est de classe* $C^k(\mathbb{R}^+, X)$ *et* $C^{k-i}(\mathbb{R}^+, D(A^i))$ *pour* $i = 1 \ldots k$ *et au sens des topologies précédentes.*

2.5 Problèmes d'évolution non homogènes

Soit $(A, D(A))$ le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $(S(t))_{t>0}$ sur un espace de Hilbert H. On veut résoudre

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + f(t), t \in (0, T) \\ y(0) = x \end{cases} \tag{2.1}$$

où $f : [0, T] \to H$.

Definition 2.5.1 *: Soit* $f \in L^1(0, T, U)$ *et* $x \in H$*.*

On appalle ***solution faible*** *de 2.1 la fonction* $y \in C([0, T], H)$ *donnée par*

$$y(t) = S(t)x + \int_0^t S(t-s) f(s)\, ds, t \in [0, T]. \tag{2.2}$$

On appelle ***solution classique*** *de 2.1 toute fonction* $y \in C([0, T], H) \cap C^1((0, T), H)$ *telle que* $y(t) \in D(A)$ *pour tout* $t \in (0, T)$ *et vérifiant 2.1 dans* $[0, T]$*.*

Remarque 2.5.2 *: Par définition, le problème 2.1 admet toujours une unique solution faible.*

Remarque 2.5.3 *:*

La différence entre ces deux notions de solution est que la première ne vérifie pas (forcément) l'équation 2.1 ponctuellement alors que la régularité en temps imposée à la *solution classique est précisément celle qu'il faut pour pouvoir écrire l'équation 2.1 au sens classique.*

On peut cependant dire que toute solution classique (s'il en existe) est une solution faible et qu'il ne peut pas exister plus d'une solution classique si x et f sont donnée respectivement dans H et $L^1(0, T, U)$. C'est l'objet du prochain résultat.

Théorème 2.5.4 *: Soit $f \in L^1([0, T], H)$ et $x \in H$. Le problème 2.1 admet au plus une solution classique et s'il en existe une alors elle est donnée par la formule 2.2.*

Théorème 2.5.5 *: Si $f \in C^1((0, T), H)$ alors pour tout $x \in D(A)$, le problème 2.1 admet une solution classique.*

Definition 2.5.6 *: Une fonction $y \in W^{1,1}([0, T], H)$ est* ***solution forte*** *de 2.1 si elle vérifie $y(0) = x$ et l'équation presque par tout dans $(0, T)$.*

2.6 Exemples

2.6.1 L'équation de la Chaleur

On se donne Ω un ouvert de classe C^2 de $\mathbb{R}^n$ et on cherche à résoudre l'équation de la chaleur

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) - \triangle u(x,t) = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

sur $(x, t) \in \Omega \times [0, +\infty[$ pour une condition initial donnée.

On peut récrire cette EDP sous la fourme d'une EDO $y^{'}(t) = Ay(t)$ posant

$$X = H = L^2(\Omega) y(t) = u(.,t) \in H$$

et en définissant $(A, D(A))$ par

$$D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$$

et

$$Ax = \triangle x$$

pour tout $x \in D(A)$. Nous sommes dans le bon cadre pour utiliser la théorie des semi-groupes et le théorème de Hille-Yosida, reste à montrer que l'opérateur A est m-dissipatif.

Il est bien connu que le Laplacien est un opérateur auto-adjoint (on a

$$\langle Au, v \rangle_H = \int_\Omega (\triangle u) v = - \int_\Omega \nabla u . \nabla v = \int_\Omega u (\triangle v) = \langle u, Av \rangle_H$$

par double intégration par parties) et que $D(A)$ est dense dans $L^2(\Omega)$, il suffit donc de montrer qu'il est dissipatif ou de façon équivalente que $\mathrm{Re}(\langle Ax, x\rangle_H) \leq 0$.

Or tout $x \in D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ est de trace nulle, donc en intégrant par parties $\mathrm{Re}(\langle Ax, x\rangle_H) = -\int_\Omega \|\nabla x\|_{\mathbb{R}^n}^2 \leq 0$.

Le corollaire et le théorème de Hille-Yosida permettent enfin de conclure quant à l'existence-unicité et la régularité des solutions.

Remarquer que

$$\frac{d}{dt}(\|y(t)\|_H^2) = 2\left\langle y^{'}(t), y(t)\right\rangle_H = 2\left\langle Ay(t), y(t)\right\rangle_H \leq 0$$

on retrouve bien sur le côté dissipatif et irréversible de l'équation de la chaleur.

2.6.2 L'équation des ondes

L'équation des ondes homogène se formule dans un domaine Ω suffisamment régulier (c'est-à-dire C^2 en pratique) et sur un intervalle en temps $[0, T)$ (avec $T > 0$) selon

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) - \triangle u(t,x) = 0, \ \text{sur } (0,T) \times \Omega \\ u(0,x) = f(x), \ \text{sur } \Omega \\ u_t(0,x) = g(x), \ \text{sur } \Omega \end{cases}$$

On se place dans la théorie des semi-groupes en mettant l'équation précédente au premier ordre en temps. On pose alors

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \triangle & 0 \end{pmatrix}, \ y = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

avec

$$(v = u^{'}) \text{ et n} y_0 = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix},$$

et l'équation devient alors

$$\begin{cases} y^{'}(t) = Ay \\ y(0) = y_0 \end{cases}.$$

Le domaine du Laplacien étant

$$D(\triangle) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega),$$

celui de A est

$$D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$$

sur

$$H = H_0^1(\Omega) \cap L^2(\Omega).$$

Les conditions initiales seront alors prises dans H. Le produit scalaire dans H est défini pour tout couple (u, v) dans

$$H(u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2))$$

par

$$(u, v)_H = (\nabla u_1, \nabla v_1)_{L^2(\Omega)} + (u_2, v_2)_{L^2(\Omega)}.$$

Reste à vérifier que nous sommes bien dans les conditions d'application du théorème de Hille-Yosida :

1- $D(A)$ est dense dans H.

2- A est fermé.

3- A est dissipatif. Ce point mérite une preuve.

Chapitre 3

Contrôlabilité d'un système évolution

3.1 Contrôlabilité en dimension finie

3.1.1 Définitions

Soit $T > 0$ considérons un systéme différeniel linéaire défini sur $[0, T]$:

$$\begin{cases} y^{'} = A(t)\, y + B(t)\, u(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{3.1}$$

où l'état $y(t)$ et la condition initiale y_0 sont dans $H = \mathbb{R}^n, A \in C_m^0([0,T], \mathcal{L}(\mathbb{R}^n))$ et $B \in C_m^0([0,T], \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n))$, la fonction $u \in L^2(0, T, U)$ avec $U := \mathbb{R}^m$ est appelée contrôle, stratégie ou entrée du systéme 3.1. La solution du systéme différentiel dépend de la donnée initiale et du second membre et peut s'exprimer par la formule :

$$y(t, y_0, u) = S(t, 0)\, y_0 + \int_0^t S(t, s)\, B(s)\, u(s)\, ds, t \in [0, T],$$

où S est la materice résolevante du systéme

$$\begin{cases} \dfrac{ds}{dt}(t, s) = A(t)\, S(t, s) \\ S(s, s) = I = \text{materice unité} \end{cases}$$

Definition 3.1.1 *: On dira que le contrôle u transfére un état a à un état b au temps $T > 0$ si*

$$y(T, a, u) = b.$$

On dit aussi que l'état b est atteignable à partir de a au temps T.

Definition 3.1.2 *: On dira que le systéme 3.1 est contrôlable au temps $T > 0$ si pour tout $a \in H$ et tout $b \in H$, il existe une fonction de contrôle $u \in L^2([0,T], U)$ telle que :*

$$y(T, a, u) = b.$$

On dit aussi que la paire (A, B) est contrôlable au temps $T > 0$.

Considérons sur $(0, T)$ le systéme différentiel suivant

$$\begin{cases} y' = A(t)\,y + Bu(t) \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{3.2}$$

La solution peut s'écrire pour tout $t \in [0, T]$:

$$y(t, u) = L_t u,$$

où L_t est l'opérateur linéaire borné défini par :

$$L_t : \begin{cases} L^2([0,T], U) & \rightarrow & H \\ u & \rightarrow & \int_0^t S(t,s)\,B(s)\,u(s)\,ds \end{cases} \tag{3.3}$$

Proposition 3.1.3 *: Le systéme 3.1 est contrôlable au temps $T > 0$ si et seulement si l'opérateur L_T est surjectif.*

Preuve. : Soit $a, b \in H$ deux états quelconques. L'equation en u :

$$y(T, a, u) = b, \tag{3.4}$$

a une solution dans $L^2([0,T], U)$ si est seulement si l'equation

$$L_T u = b - S(T, 0)\,a, \tag{3.5}$$

a une solution dans $L^2([0,T], U)$.

L'équivalence des équations 3.4 et 3.5 entraine la proposition. ■

3.1.2 Le Gramien de contrôlabilité

1- L'opérateur adjoint de L_T

L'opérateur L_T est défini de l'espace de Hilbert $L^2([0,T], U)$ dans l'espace de Hilbert H. C'est un opérateur borné. On a

$$L_T^* : \begin{cases} H \to L^2([0,T], U) \\ x \to L_T^* = v \end{cases}$$

où v est définie par :

$$\langle L_T^* x, u \rangle = \langle x, L_T u \rangle, \forall u \in L^2([0,T], U), \forall x \in H,$$

où $\langle . \rangle$ désigne le produit scalaire dans $L^2([0,T], U)$ et $(.)$ désigne le produit scalaire dans H.

Or

$$\begin{aligned} (x, L_T u) &= \left(x, \int_0^t S(T,s) B(s) u(s) \, ds \right) \\ &= \int_0^T (x, S(T,s) B(s) u(s)) \, ds \\ &= \int_0^T (B^*(s) S^*(T,s) x, u(s)) \, ds \\ &= \langle B^*(.) S^*(T,.) x, u \rangle, \end{aligned}$$

où $B^*(t)$ (resp $S^*(t,s)$) est la materice adjoint de $B(t)$ (resp $S(t,s)$).

Donc

$$L_T^* = B^*(.) S^*(T,.).$$

Précisons le mode de calcul de $L_T^* x, x \in H$, que cette formule induit. D'abord on calcule $S^*(T,s) x = \omega(s)$ qui est par définition de S^*. La solution du système différentiel

$$\begin{cases} \omega' = -A^*(s) \omega, \ s \in (0,T) \\ \omega(T) = x \end{cases}$$

Ainsi :

$$v = L_T^* x \Leftrightarrow \begin{cases} v = B^*(.) \omega \\ \begin{cases} \omega' = -A^*(s) \omega, \ s \in (0,T) \\ \omega(T) = x \end{cases} \end{cases} \tag{3.6}$$

2- CNS de contrôlabilité

L'opérateur L_T sera surjectif si est seulement si son adjoint est injectif (puisque : $\dim H < +\infty \Longrightarrow \ker L_T^* = R(L_T)^{\perp}$). Donc

Proposition 3.1.4 *: La paire* (A, B) *est contrôlable au temps* $T > 0$ *si et seulement si*

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega' = -A^*(t)\,\omega, \;\; t \in (0, T) \\ B^*(t)\,\omega(t) = 0, \;\; \forall t \in [0, T] \end{array} \right. \Longrightarrow \omega = 0 \;\; dans \;\; (0, T)\,.$$

Preuve. : Il suffit de remarquer que L_T^* est surjectif si est seulement si

$$\left\{ \begin{array}{c} B^*\omega = 0, \text{ dans } (0, T) \\ \omega' = -A^*\omega, \text{ dans } (0, T) \Longrightarrow y = 0. \\ \omega(T) = y \end{array} \right. .$$

■

3- Matrice de contrôlabilité-Gramien de contrôlabilité

Posons

$$Q_T := L_T L_T^* = \int_0^T S(T, s)\, B(s)\, B^*(s)\, S^*(T, s)\, ds, \quad T > 0. \tag{3.7}$$

L'opérateur Q_T est dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ et

$$(Q_T x, x) = \int_0^T |B^*(s)\, S^*(T, s)\, x|^2\, ds = \|L_T^* x\|^2 \geq 0. \; \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Definition 3.1.5 *:* $Q_T := L_T L_T^*$ *s'appelle* ***matrice de contrôlabilité*** *ou* ***Gramien de contrôlabilité.***

L'application f_T *qui à* $\left(x, x'\right)$ *associé* $\left(Q_T x, x'\right)$ *définit une forme bilinéaire symétrique positive et on a le résultat :*

Théorème 3.1.6 *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *La paire* (A, B) *est contrôlable au temps* $T > 0$.
2. *L'opérateur* L_T *est surjectif.*
3. *L'opérateur* L_T^* *est injectif.*
4. *L'opérateur* Q_T *est invisible.*
5. *La forme bilinéaire* f_T *est un produit scalaire sur* $H = \mathbb{R}^n$.

3- Caractérisation d'un contrôle optimal

Dans le cas où la paire (A, B) est contrôlable, il existe une infinité de contrôles. Il est intéressant de pouvoir en construire un qui "consome le moins d'énergie".

La fonctionnelle d'énergie que l'on choisit ici est

$$J(u) = \int_0^T \|u(s)\|_U^2 \, ds, \ u \in U. \tag{3.8}$$

On notera

$$U_{ad}(a,b) = \{u \in U, y(T,a,u) = b\}.$$

Le théorème suivant établit l'existence d'un $u \in U_{ad}(a,b)$ qui minimise la fonctionnelle J sur $U_{ad}(a,b)$.

Théorème 3.1.7 *: Si la paire (A,B) est contrôlable, l'application P_T qui à $(a,b) \in H^2$ associe*

$$P_T(a,b) = -L_T^* Q_T^{-1}(S(T,0)a - b).$$

vérifie

$$y(T,a,P_T(a,b)) = b.$$

De plus,

$$\begin{aligned} \int_0^T \|P_T(a,b)(s)\|_U^2 \, ds &= \min_{u \in U_{ad}(a,b)} J(u) \\ &= \left\| Q_T^{-\frac{1}{2}} (S(T,0)a - b) \right\|^2. \end{aligned}$$

Preuve. :
i) Montrons que $P_T(a,b) \in U_{ad}(a,b)$.
Calculons $y(T,a,P_T(a,b))$.

$$\begin{aligned} y(T,a,P_T(a,b)) &= S(T,0)a - L_T L_T^* \left(Q_T^{-1}(S(T,0)a - b)\right) \\ &= S(T,0)a - Q_T Q_T^{-1}(S(T,0)a - b) \\ &= b. \end{aligned}$$

ii) Par ailleurs

$$\begin{aligned} \int_0^T \|P_T(a,b)(s)\|_U^2 \, ds &= \int_0^T \left\langle L_T^* Q_T^{-1}(S(T,0)a - b), L_T^* Q_T^{-1}(S(T,0)a - b)\right\rangle_U ds \\ &= \left(Q_T^{-1}(S(T,0)a - b), Q_T Q_T^{-1}(S(T,0)a - b)\right) \\ &= \left\| Q_T^{-\frac{1}{2}} (S(T,0)a - b) \right\|^2. \end{aligned}$$

iii) Montrons maintenant l'optimalité. Soit u un autre contrôle.

Alors $b = S(T,0)a + L_T u$

$$\begin{aligned}
\int_0^T \langle P_T(a,b)(s), u(s)\rangle_U \, ds &= -\left\langle L_T^* Q_T^{-1}(S(T,0)a-b)(s), u(s)\right\rangle_U ds \\
&= -\left(Q_T^{-1}(S(T,0)a-b), L_T u\right) \\
&= \left(Q_T^{-1}(S(T,0)a-b), S(T,0)a-b\right) \\
&= \left\| Q_T^{-\frac{1}{2}}(S(T,0)a-b)\right\|^2 \\
&= \int_0^T \|P_T(a,b)(s)\|_U^2 \, ds.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\int_0^T \|u(s)\|_U^2 \, ds &= \int_0^T \|P_T(a,b)(s)\|_U^2 \, ds + \int_0^T \|u(s) - P_T(a,b)(s)\|_U^2 \, ds \\
&\geq \int_0^T \|P_T(a,b)(s)\|_U^2 \, ds.
\end{aligned}$$

L'inégalité étant stricte si $u \neq P_T(a,b)$. Ceci achève la démonstration du théorème.

■

3.1.3 Systémès linéaires à coefficients constants

1- Le critère de Kalman

le théorème 3.1.6 n'est pas toujours commode à appliquer. Dans ce paraghraphe, on démontre un critère de contrôlabilité complètement algébrique, et en générale, facilement applicable. On suppose que $A(t) = A$ et $B(t) = B$ sont des materices constantes sur $(0,T)$ et on note $[A \mid B] := [B, AB, \ldots, A^{n-1}B] \in M_{n,nm}(\mathbb{R})$ la matrice dont les colonnes sont constituées par celles de $B, \ldots, A^{n-1}B$.

Théorème 3.1.8 *: (Critère de Kalman)*
Le paire (A,B) est contrôlable si et seulement si

$$rg\,[A \mid B] = n. \tag{3.9}$$

Théorème 3.1.9 *: Si $rgB = j$ alors 3.9 peut être remplacée, dans l'énoncé du théorème par*

$$rg\left[B, AB, \ldots, A^{n-1}B\right] = n.$$

Preuve. : Une remarque préliminaire : $p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n - \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \lambda^i$, d'après le théorème de Cayley- Hamilton, on a $p(A) = 0$. D'où

$$A^n = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \lambda^i,$$

On en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}, A^{n+k}$ est une combinaison linéaire des matrices $(A^i)_{i\in\{0,\ldots,n-1\}}$. Donc pour tout vecteur $v \in H$, $A^i v$ appartient à l'espace engendré par $\{A^i v, i < n\}$. D'ou

$$Vect\left\{A^i v, i \in \mathbb{N}\right\} = Vect\left\{A^i v, i < n\right\}.$$

Appliquant cette propriété aux vecteurs colonnes de la materice B, on en déduit que la condition $rg[A \mid B] = n$ tombe en défaut si et seulement s'il existe un vecteur ligne $\rho \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $\rho A^i B = 0, \forall i \geq 0$. Rappelons que dans ce cas $S(t,s) = e^{(t-s)A}$. On a alors :

<u>La condition est suffisante</u> : Soit $x \in \ker(L_T^*)$. Alors on a

$$\left\{\begin{array}{c} \left\{\begin{array}{c} \omega' = -A^*\omega, \text{ sur } [0,T] \\ \omega(T) = x \end{array}\right. \\ B^*\omega = 0, \text{ sur } [0,T] \end{array}\right. \tag{3.10}$$

En posant $v(t) = \omega(T-t)$ pour tout $t \in [0,T]$, on a donc

$$\left\{\begin{array}{c} B^* v = 0, \text{ sur } [0,T] \\ \left\{\begin{array}{c} v' = A^* v, \text{ sur } [0,T] \\ v(0) = x \end{array}\right. \end{array}\right.$$

En Faisant tendre $t = 0$, on obtient $B^* x = 0$. En dérivant $n-1$ fois en t et en faisant tendre à chaque étape t vers 0, on obtient

$$B^*(A^*)^i x = 0, i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Compte tenu de la remarque préliminaire de cette démonstration, on en déduit que $x = 0$ et $\ker L_T^* = \{0\}$.

<u>La condition est nécessaire</u> : Si $rg[A \mid B] < n$, d'après la remarque préliminaire, il existe $x^* \in (\mathbb{R}^n) \diagdown \{0\}$ tel que

$$x^*.A^i B = 0, \forall i \in \mathbb{N}.$$

Soit

$$B^* (A^*)^i x^* = 0,$$

d'où

$$B^{v'} e^{-tA^*} x^* = 0.$$

Donc le système 3.10 admet une solution non triviale avec la donnée finale x. ■

Exemple 3.1.10 *: **Commandabilité "du four électrique".***

Le critère de Kalman donne

$$rg \begin{pmatrix} c_1^{-1} & -\frac{a_1 r_1 + a_2 r_2}{c_1^2} \\ 0 & r_1 \frac{a_1}{c_2 c_1} \end{pmatrix} = 2 \Leftrightarrow r_1 a_1 \neq 0.$$

Donc le système est contrôlable si et seulement si $r_1 a_1 \neq 0$.

3.2 Contrôlabilité en dimension infinie

3.2.1 Quelques définition et résultats utiles

1- Racine carrée d'un opérateur borné

Proposition 3.2.1 *: Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur positif auto-adjoint. Il existe un unique opérateur positif $B \in \mathcal{L}(H)$ tel que $B^2 = A$. On note $B = \sqrt{A}$.*

Lemme 3.2.2 *On a :*

1. une formule explicite pour $\sqrt{A}$

$$\sqrt{A} = \|A\|^{\frac{1}{2}} \sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha_k \left(I_d - \frac{A}{\|A\|} \right)^k,$$

où la suite $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est définie par $\sqrt{1-z} = \sum\limits_{k \in \mathbb{N}} \alpha_k z^k, z \in C, |z| \leq 1$.

2. $\sqrt{A}$ commute avec tout opérateur borné qui commute avec A.

Preuve. :

<u>Existences de B</u> : Soit $z \in \mathbb{C}$. Désignons par $\phi(z) = \sqrt{1-z}$ la démonstration de $(1-z)^{\frac{1}{2}}$ analytique dans l'ouvert $|z| < 1$ et définie en $z = 0$ par $\sqrt{I} = I$.

Cette fonction est développable en série entière dans le disque ouvert $D(0, R)$ de centre o et de rayon de convergence $R = 1$.

Cette série est absolument convergente pour $|z| = 1$, d'où :

$$\sqrt{1-z} = \sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha_k z^k, |z| < 1.$$

On a $\phi(0) = a_0 = 1$ et puisque $\phi^{(k)}(0) < 0$ pour tout $k \geq 1$. La convergence de la série en $z = 1$ donne

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha_k = -1. \tag{3.11}$$

Soit $A \geq 0$ posons

$$\begin{aligned} C &= I_d - \frac{A}{\|A\|}, \\ \phi(C) &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha_k C^k. \end{aligned}$$

Montrons que l'opérateur $\phi(C)$ est bien défini.

On a d'abord $\langle Ax, x \rangle \geq 0, \forall x \in H$. Donc $0 \leq \langle x, Ax \rangle \leq \|A\|$ pour tout $\|x\| \leq 1$ et s'ensuit que :

$$\begin{aligned} \langle x, Cx \rangle &= \left\langle x, \left(I_d - \frac{A}{\|A\|} \right) x \right\rangle \geq 0. \\ |\langle x, (A - \|A\| I_d) x \rangle| &\leq \|A\| - \langle x - Ax \rangle \leq \|A\|. \end{aligned}$$

Par conséconquent :

$$\|A - \|A\| I_d\| \leq \|A\|.$$

On en déduit que

$$\|C\| \leq 1.$$

et la série de temps général $a_k C_k$ converge en norme dans H. Si $S = \phi(C)$, la série produit S^2 converge absolument et on voit aisément que

$$S^2 = I_d - C = \frac{A}{\|A\|}.$$

Posons

$$B = \|A\|^{\frac{1}{2}} S,$$

alors $B^2 = A$.

On vait que B est positif on a :

$$\langle x, Sx \rangle = \|x\|^2 + \sum_{k \geq 1} a_k \left\langle x, C^k x \right\rangle.$$

Comme C est positif, toutes ses puissances le sont. De plus $\left| \left\langle x, C^k x \right\rangle \right| \leq \|x\|^2$.

On déduit de la propriété 3.2.1 que $\langle x, Sx \rangle \geq 0$. Donc $B \geq 0$. $\sqrt{A}$ commute avec les opérateurs qui commutent avec A car la série S converge en norme.

<u>Unicité</u> : Soit D un opérateur positif dont le carré est égal à A.

$$D^2 = A = B^2 \Longrightarrow D^3 = DA = AD.$$

Il s'ensuit que D commute avec A et que B et D commutent. On peut donc écrire

$$(B - D)(B + D) = B^2 - D^2 = 0 \Longrightarrow (B - D)^2 (B + D) = 0.$$

$(B - D)^2 B$ et $(B - D)^2 D$ sont positifs et leur somme est nulle. Donc leur différence l'est également : $(B - D)^3 = 0$. Mais si L est un opérateur auto-adjoint qui vérifie $L^n = 0$, alors $L = 0$. Donc $B = D$. ■

Remarque 3.2.3 *: Pour ce cours, on utilise le résultat suivant : si l'opérateur A, auto-adjoint positif, s'écrit :*

$$Ax = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k (x, \phi_k) \phi_k,$$

où (ϕ_k) est une base orthonormée de H, alors

$$\sqrt{A}x = \sum_{k \in \mathbb{N}} \sqrt{a_k} (x, \phi_k) \phi_k.$$

2- Opérateurs surjectifs

Voici à présent un résultat qui est la base de la notion de contrôlabilité en dimension infinie.

Théorème 3.2.4 *: Soient X, Y, Z trois espaces de Hilbert.*

Soient $F \in \mathcal{L}(X, Z)$ et $G \in \mathcal{L}(X, Z)$. On a

$$R(F) \subset R(G) \Leftrightarrow \exists c > 0, \|F^* z\| \leq c \|G^* z\|, \forall z \in Z,$$

où $R(F)$ et $R(G)$ désignent les images de F et G.

Preuve. :

Première étape :

Sopposons que $R(F) \subset R(G)$. Soit $N(G)$ le noyau de G. On pose $Y_0 = N(G)^{\perp}$ et $\widetilde{G} = G_{|Y_0}$: c'est une application bijective de Y_0 dans $R(G)$ et $\widetilde{G}^{-1}$ est un opérateur non borné de $\overline{R(G)} := Z_1$ dans Y_0, de domaine $D\left(\widetilde{G}^{-1}\right) = R(G)$.

Noter que, comme Y_0 et Z_1 sont fermés, ce sont tous les deux des espaces de Hilbert pour les produits scalaires induits.

Par le théorème du graphe fermé, $\widetilde{G}^{-1} \circ F \in \mathcal{L}(X, Y_0)$.

En effet, $\widetilde{G}^{-1} \circ F$ est une application fermée car si $(x_n) \subset X$ est une suite telle $x_n \to x$ et $\widetilde{G}^{-1} \circ F(x_n) \to y \in Y_0$, alors puisque $\widetilde{G} \in \mathcal{L}(Y_0, Z)$ on en déduit que $F(x_n) \to \widetilde{G}(y)$.

Comme, par ailleurs, $F \in \mathcal{L}(X, Y)$, on a $F(x_n) \to F(x)$.

Donc $F(x) = \widetilde{G}(y)$ et il s'ensuit que $\widetilde{G}^{-1} \circ F(x) = y$.

On peut donc dire qu'il existe $c > 0$ tel que :

$$\left\|\widetilde{G}^{-1} \circ F(x)\right\| \leq c, \ \forall x \in B_X(0,1) = \{x \in X; \|x\| \leq 1\}.$$

De cette inégalité, on déduit immédiatement que :

$$F(B_X(0,1)) \subset \widetilde{G}(B_Y(0,c)) = G(B_Y(0,c)).$$

Réciproquement, si il existe $c > 0$ tel que $F(B_X(0,1)) \subset G(B_Y(0,c))$ alors

$$R(F) \subset R(G).$$

En effet, pour tout $x \neq 0, F\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \in G(B_Y(0,c))$. Il existe donc $y \in B_Y(0,c)$ tel que $F(x) = \|x\| G(y) \in R(G)$.

On vient donc d'établir que

$$R(F) \subset R(G) \Leftrightarrow \exists c > 0, F(B_X(0,1)) \subset G(B_Y(0,c)). \tag{3.12}$$

Deuxième étape :

$G(B_Y(0,c))$ est fermé. En effet, soit $(z_n) \in G(B_Y(0,c))$ telle que $z_n \to z$.

Il existe $(y_n) \in B_Y(0,c)$ tel que $z_n = G(y_n)$.

Comme $B_Y(0,c)$ est faiblement compacte, il existe $y \in B_Y(0,c)$ et $\phi : N \to N$ strictement croissante telle que $y_{\phi(n)}$ converge faiblement vers y.

Comme G est linéaire, elle est faiblement continue et donc $G\left(y_{\phi(n)}\right)$ converge faiblement vers $G(y)$.

Par suite, $z_{\phi(n)}$ converge faibelement vers $z = G(y) \in G(B_Y(0,c))$.

Troisième étape :
Supposons que $\exists c > 0, F(B_X(0,c)) \subset G(B_Y(0,c))$, alors pour tout $z \in Z$, on a

$$\begin{aligned}
\|F^*(z)\| &= \sup_{\|x\|\leq 1} |\langle F^*(z), x\rangle_X| \\
&= \sup_{\|x\|\leq 1} |\langle z, F(x)\rangle_Z| \\
&= c \sup_{\|y\|\leq 1} |\langle z, G(x)\rangle_Z| \\
&= c\|G^*(z)\|.
\end{aligned}$$

Réciproquement, supposons qu'il existe $c > 0$ tel que $\|F^*(z)\| \leq c\|G^*(z)\|, \forall z \in Z$.

S'il existe $x_0 \in B_X(0,c)$ tel que $F(x_0) \notin G(B_Y(0,c))$, alors puisque $\{F(x_0)\}$ est compact et $G(B_Y(0,c))$ est un convexe fermé, d'après le théorème de Hanh-Banach il existe $z_0 \in Z$ tel que

$$\langle z_0, G(y)\rangle_Z < 1 < \langle z_0, F(x_0)\rangle_Z, \ \forall y \in B_Y(0,c).$$

Donc

$$\left.\begin{array}{c}
(z_0, F(x_0)) = (F^* z_0, x_0) > 1 \Longrightarrow \|F^* z_0\| > 1 \\
\sup\limits_{\|y\|\leq c} (z_0, G(x_0)) \leq 1 \Longrightarrow \|G^* z_0\| \leq \dfrac{1}{c}
\end{array}\right\} \Longrightarrow \|F^* z_0\| > c\|G^* z_0\|.$$

Ce qui est absurde. Ainsi, on a démontré :

$$\exists c > 0, \|F^* z\| \leq c\|G^* z\|, \forall z \in Z \Leftrightarrow \exists c > 0, F(B_X(0,c)) \subset G(B_Y(0,c)). \tag{3.13}$$

De 3.12 et 3.13 découle la conclusion du théorème. ■

Remarque 3.2.5 *: Ce résultat reste vrai si on suppose que X, Y, Z sont trois espaces de Banach, Y étant de plus réflexif.*

3- L'opérateur de contrôlabilité L_T

Soit H un espace de Hilbert et $(A, D(A))$ le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ dans H. Soit U un espace de Hilbert et $B \in \mathcal{L}(U,H)$. Pour chaque $u \in L^2([0,T], U)$, le problème d'évolution :

$$\left\{\begin{array}{c}
y_t = Ay + Bu \\
y(0) = x
\end{array}\right. \tag{3.14}$$

admet pour tout $x \in H$ une unique solution $y \in L^2([0,T], H)$.

De plus $y \in C([0,T], H)$ est donnée par :

$$y(t) = S(t)x + \int_0^t S(t-s)Bu(s)\,ds.$$

On peut donc, comme en dimension finie, introduire l'opérateur

$$L_t : \begin{cases} L^2([0,T], U) \to H \\ u \to \int_0^t S(t-s)Bu(s)\,ds. \end{cases}$$

On remarquera que L_t peut aussi être défini comme $L_t u = y(t, 0, u)$, c'est-à-dire comme la solution, à l'instant t, du problème correspondant à la donnée initiale 0 et au second membre (contrôle) Bu.

Proposition 3.2.6 *: $L_T \in \mathcal{L}(L^2([0,T], U), H)$ et*

$$\|L_T\| \leq \sqrt{T}\, \|S\|_{C([0,T],H)} \|B\|_{L(U,H)}.$$

Definition 3.2.7 *: On définit comme en dimension finie $R_T(a)$, l'ensemble des états atteignables au temps T à partir de a :*

$$R_T(a) = S(T)a + R(L_T).$$

L'étude de la contrôlabilité au temps T revient à l'étude de $\underset{a \in H}{\cup} R_T(a) = R_T(H)$. Du fait de la dimension infinie, on peut avoir

$$R_T(H) \neq \overline{R_T(H)} \text{ et } S(T)H \neq H.$$

On introduit l'opérateur de contrôlabilité :

$$Q_T x = \int_0^T S(r)BB^* S^*(r)\,dr, x \in E, T > 0.$$

C'est un opérateur borné, donc il existe $c > 0$ tel que

$$|Q_T x| \leq c\,|x|, x \in E.$$

Q_T est aussi auto-adjoint et positif.

Proposition 3.2.8 *:*

$$R(L_T) = R\left(Q_T^{\frac{1}{2}}\right).$$

Preuve. : Soit $x \in E$ et $u \in U$. Alors

$$\begin{aligned}\langle\langle u, L_T^* x\rangle\rangle &= \langle L_T u, x\rangle = \int_0^T \langle S(T-r) Bu(r), x\rangle \, dr \\ &= \int_0^T \langle u(r), B^* S^* (T-r) x\rangle \, dr\end{aligned}$$

et donc, par la définition du produit scalaire dans U

$$L_T^* x = B^* S^* (T-r) x, pp.r \in (0,T).$$

Donc

$$\begin{aligned}\|L_T^* x\|^2 &= \int_0^T |B^* S^* (T-r) x|^2 \, dr \\ &= \langle Q_T x, x\rangle = \left|Q_T^{\frac{1}{2}} x\right|^2, x \in E.\end{aligned}$$

Du théorème 3.2.4, on déduit que $R(L_T) = R\left(Q_T^{\frac{1}{2}}\right)$. ■

3.2.2 Contrôlabilités

1- Contrôlabilité Exacte

1.1- Définition et caractérisation

Definition 3.2.9 *: On dira que le système 3.14 est exactement contrôlable au temps $T > 0$ si pour tout $a, b \in H$ il existe $u \in L^2([0,T], U)$ tel que*

$$y(T, a, u) = b,$$

où, de manière équivalente, si un état arbitraire $b \in H$ peut être attient au temps T, à partir de n'importe quel état $a \in H$.

De façon équivalente, le système 3.14 est exactement contrôlable au temps $T > 0$ si pour tout $a \in H$

$$R_T(a) = H.$$

Théorème 3.2.10 *: Les conditions suivantes sont équivalentes*

1. *Le système 3.14 est exactement contrôlable au temps $T > 0$.*
2. *Il existe $c > 0$ tel que pour tout $x \in H$*

$$\int_0^T |B^* S^* (t) x| \, dt \geq c |x|^2.$$

3. $R\left(Q_T^{\frac{1}{2}}x\right) = H.$

4. $x \to \left|\sqrt{Q_T}x\right|$ *définit sur* H *une norme équivalente à la norme de* $H.$

Preuve. : 1⇔2 : Si le système est contrôlable à partir de n'importe quel $a \in H$, il est contrôlable à partir de $a = 0$. Mais la contrôlabilité à partir de $a = 0$ revient à

$$\forall b \in H, \exists u \in L^2\left([0,T], U\right) : b = L_T u \Leftrightarrow R\left(L_T\right) = H.$$

On démontre cette équivalence en appliquant le théorème 3.2.4 aux opérateurs
$G = L_T \in \mathcal{L}\left(L^2\left((0,T), U\right), H\right)$ et $F = I_d \in \mathcal{L}\left(H\right).$
1⇔3 : Résulte de $R\left(Q_T^{\frac{1}{2}}x\right) = R\left(L_T\right).$

2⇔4 : Comme Q_T est un opérateur borné sur H, sa racine est aussi un opérateur borné sur H et donc $\left|\sqrt{Q_T}\right|$ définit sur H une norme équivalente à la norme de H si est seulement si il existe $c > 0$, tel que

$$c\left|x\right|^2 \leq \left|\sqrt{Q_T}x\right|^2, \forall x \in H. \tag{3.15}$$

Or on a vu que $\left|\sqrt{Q_T}x\right|^2 = \left\|L_T^* x\right\|^2$. D'où l'équivalence. ■

Exemple 3.2.11 *: **Un système non exactement contrôlable***

On considère sur $H = L^2\left(\Omega\right)$ *L'équation de la chaleur*

$$\begin{cases} y_t - \triangle y = u\left(\xi, t\right) \text{ ; sur } \Omega \times (0,T) \\ y\left(\xi, t\right) = 0 \text{ ; sur } \Gamma \times (0,T) \\ y\left(\xi, 0\right) = 0 \text{ ; sur } \Omega \end{cases} \tag{3.16}$$

$u \in L^2\left(\Omega \times (0,T)\right)$. *Pour se remener au cadre abstrait, il suffit de poser*

$$D\left(A\right) = H^2\left(\Omega\right) \cap H_0^1\left(\Omega\right), A = \triangle, U = L^2\left(\Omega\right),$$

et $B = I_d$ *(identité de* $L^2\left(\Omega\right)$*).*

Théorème 3.2.12 *: Pour tout* $T > 0$*, le système 3.16 n'est pas exactement contrôlable.*

Preuve. : Ce sera une conséquence du résultat suivant :

Lemme 3.2.13 *: Pour tout* $t, T > 0$*,* $R\left(L_t\right) = R\left(L_T\right) = H_0^1\left(\Omega\right) \subset L^2\left(\Omega\right).$

Preuve. : Du lemme

Comme $R\left(L_t\right) = R\left(\sqrt{Q_T}\right)$, calculons $R\left(\sqrt{Q_T}\right)$.

On a :

$$Q_t = \int_0^t S(s)\, BB^* S^*(s)\, ds.$$

Mais $B = B^* = I_d$ et comme $A = A^*, S(t) = S^*(t)$.
Donc

$$\begin{aligned} Q_{tx} &= \int_0^t S(2s)\, ds = \int_0^t \sum_{k\in\mathbb{N}} e^{-2\lambda_k t} (x, \phi_k)\, \phi_k ds \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\int_0^t e^{-2\lambda_k t} ds \right) (x, \phi_k)\, \phi_k \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{e^{-2\lambda_k t} - 1}{-2\lambda_k} (x, \phi_k)\, \phi_k. \end{aligned}$$

Donc

$$\sqrt{Q_T} x = \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\frac{e^{-2\lambda_k t} - 1}{-2\lambda_k} \right)^{\frac{1}{2}} (x, \phi_k)\, \phi_k$$

Il s'ensuit que $b \in R\left(\sqrt{Q_t}\right)$ si et seulement si il existe $x \in L^2(\Omega)$ tel que

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} (b, \phi_k)\, \phi_k = \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\frac{e^{-2\lambda_k t} - 1}{-2\lambda_k} \right)^{\frac{1}{2}} (x, \phi_k)\, \phi_k.$$

Ce qui est équivalent à pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$(b, \phi_k) = \left(\frac{e^{-2\lambda_k t} - 1}{-2\lambda_k} \right)^{\frac{1}{2}} (x, \phi_k)$$

ou bien

$$(x, \phi_k) = \left(\frac{e^{-2\lambda_k t} - 1}{-2\lambda_k} \right)^{\frac{1}{2}} (b, \phi_k).$$

Comme $x \in L^2(\Omega), \sum_{n\in\mathbb{N}} |(x, \phi_k)|^2 < +\infty$, et $b \in R\left(\sqrt{Q_t}\right)$ si et seulement si :

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\frac{-2\lambda_k}{e^{-2\lambda_k t} - 1} \right) |(b, \phi_k)|^2 < +\infty.$$

Mais

$$\lim_{k\to+\infty} \left(\frac{1}{e^{-2\lambda_k t} - 1} \right) = -1.$$

Donc, $b \in R\left(\sqrt{Q_t}\right)$ si et seulement si

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \left|\lambda_k \left|(b,\phi_k)\right|^2\right| < +\infty.$$

Et ceci est équivalent à $b \in H_0^1(\Omega)$. ■ ■

1.2- Contrôlabilité exacte de l'équation des ondes

a- Contrôle interne : Soit Ω un ouvert borné et régulier (de frontière $\partial\Omega$ lipchitzienne) de $\mathbb{R}^n$ et $\omega \subset \Omega$ un deuxième ouvert. On considère le problème de contrôle

$$\left\{\begin{array}{c} y_{tt} = \triangle y + 1_\omega u, \text{ sur } (0,T)\times\Omega = \Psi \\ y = 0, \text{ sur } (0,T)\times\partial\Omega = \Sigma_T \\ y(0,.) = y_0, y_t(0,.) = y_1 \end{array}\right. \tag{3.17}$$

On étudie la contrôlabilité exacte du système 3.17. Soit $T > 0$, on cherche $u \in L^2(\Psi)$ tel que pour toute donnée initiale $(y_0, y_1) \in H = H_0^1 \times L^2(\Omega)$ il existe une unique solution y de 3.17 vérifiant $y(T,.) = 0$ dans Ω.

Dans toute cette section on fait l'identification $H' = H$.

Pour se ramener au cadre abstrait, on définit sur H l'opérateur $(A, D(A))$ et

$$\begin{array}{cccc} B & : & U = L^2(\Omega) & \rightarrow & H \\ & & u & \rightarrow & Bu = \binom{0}{1_\omega} u \end{array}$$

Le systéme 3.17 s'écrit alors dans H :

$$\left\{\begin{array}{l} Y_t = AY + Bu \\ Y(0) = Y^0 \in H \end{array}\right.$$

On sait que A est générateur d'un semi-groupe de contractions $(S(t))_{t\geq 0}$ sur H et il est clair que $B \in \mathcal{L}(U,H)$.

D'après le théorème 3.2.10 il faut trouver des conditions sur T et ω pour qu'il existe $c > 0$ tel que pour tout $Z^0 \in H$

$$\int_0^T \left|B^* S^*(t) Z^0\right|^2 dt \geq c\left|Z^0\right|^2. \tag{3.18}$$

Mais $Z(t) = S^*(t)x$ est la solution du problème

$$\left\{\begin{array}{c} Z_t = A^* Z \\ Z(0) = Z^0 \in H \end{array}\right.$$

Or, un calcul simple montre que A est anti-adjoint : $A^* = -A$.
Il est alors clair que si $Z = (z_1, z_2)$ et $Z^0 = (z_1^0, z_2^0)$, l'inégalité 3.18 s'écrit

$$\int_0^T \int_\omega |z_2|^2 \, dxdt \geq c \int_\Omega \left(\left| z_1^0 \right|^2 + \left| z_2^0 \right|^2 \right) dx.$$

On peut par ailleurs vérifier directement que puisque $z_2 = -z_{1t}$ et $z_{2t} = - \triangle z_1$, il s'ensuit que $z_{1tt} = \triangle z_1$ et que, en posant $z = z_1$, il s'ait que

$$\int_0^T \int_\omega |z_t|^2 \, dxdt \geq c \int_\Omega \left(\left| z_1^0 \right|^2 + \left| z_2^0 \right|^2 \right) dx \tag{3.19}$$

pour z solution de l'équation des ondes

$$\left\{ \begin{array}{c} z_{tt} = \triangle z, \text{ sur } (0,T) \times \Omega = \Psi \\ z = 0, \text{ sur } (0,T) \times \partial\Omega = \Sigma_T \\ z\,(0,.) = z_1^0, z_t\,(0,.) = z_2^0. \end{array} \right. \tag{3.20}$$

1. **Le cas** $\omega = \Omega$.

   Théorème 3.2.14 *: Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière $\partial\Omega$ lipchitzienne. Pour tout $T > 0$ et pour toute donnée initiale $(z_1^0, z_2^0) \in H$, on a*

   $$\int_0^T \int_\omega |z_t|^2 \, dxdt \geq c \int_\Omega \left(\left| \nabla z_1^0 \right|^2 + \left| z_2^0 \right|^2 \right) dx$$

   pour toute solution z de 3.20.

   Remarque 3.2.15 *: Ce théorème implique bien entendu, d'après les développements précédents, la contrôlabilité exacte 3.17 pour tout $T > 0$.*

2. **Le cas** $\omega \subsetneq \Omega$.

   L'inégalité d'observabilité 3.19 n'est en général pas vraie pour un ouvert ω quelconque comme nous le verrons sur un exemple, à cause du caractère hyperbolique de l'équation des ondes, il faudera d'une part un temps minimal de contrôle et, d'autre part des conditions géométriques sur ω.

   Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $q\,(x) = x - x_0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. On note v la normale unitaire extérieure à $\partial\Omega$ que l'on suppose de classe C^2.

   On définit :

   $$\begin{array}{rcl} \Gamma_0 & = & \{x \in \partial\Omega; q\,(x)\,.v\,(x) > 0\}\,; \Gamma_1 = \Gamma \smallsetminus \Gamma_0 \\ \Sigma_i & = & \Gamma_i \times (0,T)\,, i = 0, 1. \end{array}$$

Pour $\varepsilon > 0$ arbitrairement fixé, on considère O_ε, voisinage ouvert d'ordre ε dans $\mathbb{R}^n$ de Γ_0 et on prend $\omega = \Omega \cap O_\varepsilon$.
Le résultat qui sera démontré dans ce paragraphe est le suivant :

Théorème 3.2.16 *: Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière $\partial\Omega$ de classe C^2 et $\omega \subset \Omega$ l'ouvert défini dans les lignes précédentes.*
Il existe $T_0 > 0$ tel que $\forall T > T_0, \exists c = c_T > 0$ vérifiant :

$$\int_\Omega \left(\left|\nabla z_1^0\right|^2 + \left|z_2^0\right|^2 \right) dx \leq c \int_0^T \int_\omega |z_t|^2 \, dxdt \tag{3.21}$$

pour toute solution z de 3.20 correspondant à des données initiales $(z_1^0, z_2^0) \in H$.

Lemme 3.2.17 *: Soit $h \in \left(C^1\left(\overline{\Psi}\right)\right)^n$. Pour toute solution (faible) z de 3.20, on a l'identité :*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_{\Sigma_T} h.v \left|\frac{\partial z}{\partial v}\right|^2 d\Sigma_T &= \left[\int_\Omega z_t.h.\nabla z\right]_0^T + \int_\Psi \frac{1}{2} (\nabla.h) \left(z_t^2 + |\nabla z|^2\right) dxdt \quad (3.22) \\ &+ \int_\Psi \{-(h_t.\nabla z)\, z_t + (D_x h \nabla z).\nabla z\}\, dxdt \end{aligned}$$

où $D_x h$ désigne la diffférentielle de h.

Preuve. : On multiplie l'équation 3.20 par $h.\nabla z$ et on intègre sur Ψ. On a d'abord, en intégrant par parties et en tenant compte de le condition au bord sur z :

$$\begin{aligned} \int_\Psi z_{tt} h.\nabla z dxdt &= \left[\int_\Omega z_t.h.\nabla z\right]_0^T - \int_\Psi z_t \left(h.\nabla z_t + h_t.\nabla z\right) dxdt \\ &= \left[\int_\Omega z_t.h.\nabla z\right]_0^T - \int_\Psi \left(\frac{1}{2} h.\nabla\left(z_t^2\right) + z_t h_t.\nabla z\right) dxdt \\ &= \left[\int_\Omega z_t.h.\nabla z\right]_0^T + \int_\Psi \left\{\frac{1}{2}(\nabla.h)\, z_t^2 - z_t h_t.\nabla z\right\} dxdt. \end{aligned}$$

En suite, en désignant par D^2z la différentielle seconde par rapport à x de z :

$$\begin{aligned}
\int_\Psi \triangle z h.\nabla z &= \int_{\Sigma_T} h.\nabla z \frac{\partial z}{\partial n} d\Sigma_T - \int_\Psi \nabla z.\nabla\left(h.\nabla z\right) dxdt \\
&= \int_{\Sigma_T} h.\nabla z \frac{\partial z}{\partial n} d\Sigma_T - \int_\Psi \nabla z.\left(D_x h.\nabla z + h.D_x^2 z\right) dxdt \\
&= \int_{\Sigma_T} h.\nabla z \frac{\partial z}{\partial n} d\Sigma_T - \int_\Psi \left(\Gamma_x h.\nabla z\right).\nabla z + \frac{1}{2} h.\nabla\left(|\nabla z|^2\right) dxdt \\
&= \int_{\Sigma_T} \left(h.\nabla z \frac{\partial z}{\partial n} - \frac{1}{2} h.n \left|\nabla z\right|^2\right) d\Sigma_T \\
&\quad - \int_\Psi \left\{\left(D_x h.\nabla z\right).\nabla z - \frac{1}{2}\left(\nabla.h\right)\left|\nabla z\right|^2\right\} dxdt.
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
0 &= \left[\int_\Omega z_t.h.\nabla z\right]_0^T + \frac{1}{2}\int_\Psi \left\{\left(\nabla.h\right)\left(z_t^2 - |\nabla z|^2\right) - \left(h_{tt}.\nabla z\right) z_t\right\} dxdt \\
&+ \int_\Psi \left(D_x h.\nabla z\right).\nabla z dxdt - \int_{\Sigma_T}\left(h.\nabla z \frac{\partial z}{\partial n} - \frac{1}{2} h.v \left|\nabla z\right|^2\right) d\Sigma_T.
\end{aligned}$$

Comme $z = 0$ sur Σ_T, on en déduit que $\nabla z = \left(\nabla z.n\right) n$. ■

Lemme 3.2.18 *: Soit $T_0 = 2\max_{x\in\overline{\Omega}}\left|x - x_0\right|$. Pour tout $T > T_0$ et toute solution (faible) z de 3.20, on a :*

$$\int_\Omega \left(\left|\nabla z_1^0\right|^2 + \left|z_2^0\right|^2\right) dx \leq \frac{T_0}{2\left(T - T_0\right)} \int_{\Sigma_v} \left|\frac{\partial z}{\partial v}\right|^2 d\Sigma_T. \tag{3.23}$$

Proposition 3.2.19 *: Il existe $m \in \left(C^1\left(\overline{\Omega}\right)\right)^n$ tel que*

$$m.v = 1 \quad sur\ \Gamma_0\ ,\ m.v \geq 0\ sur\ \partial\Omega;\ \ \sup\left(m\right) \subset \omega. \tag{3.24}$$

Lemme 3.2.20 *: Pour tout $T > 0$, pour tout $\sigma \in \left(0, \dfrac{T}{2}\right)$ et toute solution (faible) z de 3.20, on a :*

$$\int_0^{T-\sigma}\int_{\Gamma_0}\left|\frac{\partial z}{\partial v}\right|^2 d\Sigma_T \leq C\int_0^T\int_\omega \left\{z_t^2 + z^2\right\} dxdt. \tag{3.25}$$

Lemme 3.2.21 *: Soit $T > T_0$. L'application $L : H \to L^2\left(\Psi\right)$ définie par $LZ^0 = 1_\omega z_t$ (z étant la solution de 3.20 associée à la donnée initiale $Z^0 = \left(z_1^0, z_2^0\right)$) est une application linéaire continue injective.*

Lemme 3.2.22 *: Soit X, Y, Z trois espaces de Banach, $L \in \mathcal{L}(X, Y)$ une application injective et $K : X \to Z$ une application linéaire compacte. On suppose qu'il existe $C > 0$ telle que*

$$\|x\|_X \leq C\left(\|Lx\|_Y + \|Kx\|_Z\right), \forall x \in X.$$

Alors il existe une constante encore notée $C > 0$ telle que

$$\|x\|_X \leq C\,\|Lx\|_Y\,, \forall x \in X. \tag{3.26}$$

Preuve. : Si 3.26 est fausse, alors il existe une suite $(x_n) \subset X$ telle que $\|x_n\|_X = 1$ pour tout n et $\lim\limits_{n\to\infty} Lx_n = 0$.

Comme K est compacte et (x_n) bornée, il existe une sous-suite encore notée (x_n) telle que (Kx_n) soit convergente dans Z.

On en déduit que la suite (x_n) de Cauchy dans X.

En effet par hypothèse :

$$\|x_n - x_m\|_X \leq C\left(\|L(x_n - x_m)\|_Y + \|K(x_n - x_m)\|_Z\right) \underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Soit $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Alors $\|x\|_X = 1$ et $Lx = 0$. Ce qui est impossible. Ceci achève la démonstration du lemme. ■

Preuve. : Du théorème 3.2.14. Si $T > T_0$, on se donne $\sigma > 0$ tel que $T - 2\sigma > T_0$. D'après le lemme 3.2.18, on a :

$$\int_\Omega \left(\left|\nabla z_1^0\right|^2 + \left|z_2^0\right|^2\right) dx \leq \frac{T_0}{2\left(T - 2\sigma - T_0\right)} \int_0^{T-\sigma} \int_{\Gamma_0} \left|\frac{\partial z}{\partial v}\right|^2 d\Sigma_T$$

et, grace au lemme 3.2.20, on arrive à l'estimation :

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left(\left|\nabla z_1^0\right|^2 + \left|z_2^0\right|^2\right) dx &\leq C \int_0^T \int_\omega \left\{z_t^2 + z^2\right\} dxdt \\
&\leq C\left(\int_0^T \int_\omega z_t^2 dxdt + \int_\Psi z^2 dxdt\right).
\end{aligned}$$

Par le lemme 3.2.22 appliqué à L défini dans le lemme 3.2.21 avec

$$X = H, Y = Z = L^2(\Psi),$$

et K définie par $KZ^0 = z$, on obtient 3.21 et ceci achève la démonstration du théorème. ■

Pour achever cette section, voici un résultat de la démonstration du quel on peut facilement déduire celle de la proposition 3.2.19 :

Lemme 3.2.23 *: Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière de classe C^2. Alors il existe un champ de vecteurs $h = (h_k) \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)^n$ qui vérifie $h(x) = v(x)$ pour tout $x \in \partial\Omega$.*

Preuve. : Comme $\partial\Omega$ est de classe C^2, pour tout $x \in \partial\Omega$ il existe un voisinage V_x et une fonction $\sigma_x \in C^2(V_x, R)$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{c} \nabla\sigma_x(z) \neq 0, \forall z \in V_x, \\ \sigma_x = 0 \Leftrightarrow x \in V_x \cap \partial\Omega, \\ n(z) = \frac{\nabla\sigma_x(z)}{\|\nabla\sigma_x(z)\|}, \forall z \in V_x \cap \partial\Omega. \end{array} \right.$$

Comme $\partial\Omega$ est compact, il existe un recouvrement de $\partial\Omega$ par un nomber fini de V_x :

$$\partial\Omega \subset \bigcup_{i=1}^{i=p_0} V_{x_i} := \bigcup_{i=1}^{i=p_0} V_i.$$

Posons alors $V_0 \subset \Omega$ tel que $\overline{V_0} \subset \Omega$ et $\overline{\Omega} \subset \bigcup_{i=1}^{i=n} V_i$. On considère alors une partition de l'unité $(\phi_i)_{i=0,\dots,n}$ subordonnée au recouvrement $(V_i)_{i=0,\dots,n}$:

$$e_i \in D(V_i), 0 \leq e_i \leq 1 \text{ et } \sum_{i=0}^{i=n} e_i = 1 \text{ dans } \overline{\Omega}.$$

On a en particulier

$$\sum_{i=0}^{i=n} e_i = 1 \text{ dans } \partial\Omega.$$

On définit alors le champ de vecteur h par

$$h(x) = \sum_{i=0}^{i=n} e_i(x) \|\nabla\sigma_i(x)\|^{-1} \nabla\sigma_i(x), \forall x \in \overline{\Omega}.$$

h est le champ de vecteurs cherché. ■

b- Contrôle par le bord Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, de classe C^2.

Soit $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_0$ avec $\Gamma_1 \cap \Gamma_0 = \Phi$, et soit $T > 0$. On veut déterminer, quand cela est possible, $u \in L^2((0,T) \times \Gamma_0) = L^2(\Sigma_0)$ tel que pour toute donnée initiale (y_0, y_1) dans un espace H à déterminer, il existe une unique "solution" y de

$$\left\{\begin{array}{c} y_{tt}=\triangle y,\ \text{sur}\ (0,T)\times\Omega=\Psi \\ y=0,\ \text{sur}\ (0,T)\times\Gamma_1 \\ y(0,.)=y_0, y_t(0,.)=y_1 \end{array}\right. \tag{3.27}$$

telle que $y(T,.)=y_t(T,.)=0$.

Il s'agit bien d'un problème de contrôlabilité exacte mais qui ne s'insère pas directement dans le cadre abstrait car les donnée au bord ne sont pas homogènes.

L'opérateur de "contrôle" est l'opérateur "trace sur Γ_0" et il est non borné de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$. La théorie précédente a donc besoin d'être généralisée.

Dans un premier temps, on va définir l'espace H et l'opérateur de contrôle L_T.

Il s'agit de pouvoir assurer l'existence d'une notion de solution du systéme 3.27.

Definition 3.2.24 *: y est solution au sens de la transposition du système 3.27 si y vérifie sur* Ψ :

$$\int_\Psi yf dxdt=-\int_\Omega y_0\theta_t(0)\,dx+\langle y_1,\theta(0)\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}-\int_{\Sigma_0}\frac{\partial\theta}{\partial v}ud\Sigma_T, \tag{3.28}$$

Pour tout $f\in D(\Psi)$, *où* $\theta(f):=\theta$ *est solution de*

$$\left\{\begin{array}{c} \theta_{tt}-\triangle\theta=f, sur\ (0,T)\times\Omega=\Psi \\ \theta=0,\ sur\ (0,T)\times\partial\Omega=\Sigma_T \\ \theta(T,.)=\theta_t(T,.)=0. \end{array}\right. \tag{3.29}$$

Théorème 3.2.25 *: Soit* $T>0$. *Pour toutes données initiales* $(y_0,y_1)\in H=L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)$ *et tout* $u\in L^2(\Sigma_0)$, *il existe une solution unique y (au sens de la tansposition) du système 3.27 telle que*

$$y\in C\left([0,T],L^2(\Omega)\right)\cap C^1\left([0,T],H^{-1}(\Omega)\right).$$

De plus, il existe $c_T>0$ *tel que y vérifie pour tout* $t\in[0,T]$

$$\|y(t,.)\|_{L^2(\Omega)}+\|y_t(t,.)\|_{H^{-1}(\Omega)}\leq c_T\left(\|y_0\|_{L^2(\Omega)}+\|y_1\|_{H^{-1}(\Omega)}+\|u\|_{L^2(\Sigma_0)}\right).$$

Remarque 3.2.26 *: Pour* $u=0$, *on définit une application* S_1 *de* $\mathbb{R}$ *dans* $L(H)$ *pour tout* $(y_0,y_1)\in H$

$$S_1(t)(y_0,y_1)=((y(t),y_t(t))).$$

Cette application définit un groupe fortement continu de $\mathbb{R}$ dans $L(H)$

$$\begin{aligned} S_1(t+s)x &= S_1(t)S_1(s)x, \forall t,s \in \mathbb{R}, \forall x \in H \\ \lim_{t\to 0} S_1(t)x &= x, \forall x \in H. \end{aligned}$$

Et donc pour tout $t \in \mathbb{R}, S_1(t)H = H$.

Preuve. : Du théorème :

Montrons qu'il existe $y \in L^\infty((0,T),L^2(\Omega))$ solution de 3.28. Pour cela, onva montrer que pour tout $f \in D(\Psi)$, pour tout $(y_0,y_1) \in H = L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega), u \in L^2(\Sigma_0)$, l'application L

$$f \in D(\Psi) \xrightarrow{L} -\int_\Omega y_0\theta_t(0)\,dx + \langle y_1, \theta(0)\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} - \int_{\Sigma_0} \frac{\partial\theta}{\partial v} u d\Sigma$$

définit une forme linéaire continue sur $L^1((0,T),L^2(\Omega))$. Le théorème de Riesz permettra de déduire l'existence de $y \in (L^1((0,T),L^2(\Omega)))' = L^\infty((0,T),L^2(\Omega))$ tel que pour tout $f \in L^1((0,T),L^2(\Omega))$ on ait

$$\int_\Psi y(t,x)f(t,x)\,dxdt = -\int_\Omega y_0\theta_t(0)\,dx + \langle y_1,\theta(0)\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} - \int_{\Sigma_0}\frac{\partial\theta}{\partial v}ud\sigma$$

On a

$$\left|\int_\Omega y_0\theta_t(0)\,dx\right| \le |y_0|\,|\theta_t(0)| \tag{3.30}$$

$$\left|\langle y_1,\theta(0)\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}\right| \le \|y_1\|_{H^{-1}(\Omega)}\,\|\theta(0)\|_{H_0^1(\Omega).} \tag{3.31}$$

Il reste à estimer le terme $\int_{\Sigma_0}\frac{\partial\theta}{\partial v}ud\sigma$. Pour cela, nous allons démontrer un "résultat de régularité cachée" : **La solution θ qui n'appartient qu'à $C((0,T),H_0^1(\Omega))$ admet une trace normale dans $L^2(\Sigma)$ et que l'application qui à f associe cette dérivée normale est continue.** ■

Lemme 3.2.27 *: (Inégalité directe)*

Pour tout $T>0$, il existe $C>0$, tel que pour tout $(\phi_0,\phi_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ et tout $f \in L^1((0,T),L^2(\Omega))$ la solution ϕ de

$$\begin{cases} \phi_{tt} - \triangle\phi = f, \text{ sur } (0,T)\times\Omega = \Psi \\ \phi = 0, \text{ sur } (0.T)\times\partial\Omega = \Sigma_T \\ \phi(0,.) = \phi_0, \phi_t(0,.) = \phi_1 \end{cases} \tag{3.32}$$

vérifie

$$\int_{\Sigma}\left|\frac{\partial\phi}{\partial v}\right|^{2}d\sigma\leq C\left(T+1\right)\left[\left\|\phi_{0}\right\|_{H_{0}^{1}(\Omega)}^{2}+\left|\phi_{1}\right|^{2}+\left\|f\right\|_{L^{1}((0,T),L^{2}(\Omega))}^{2}\right].$$

On peut donc définir un opérateur L_T de $L^2(\Sigma_T)$ dans H, par

$$L_T u=\left(y\left(T\right),y_t\left(T\right)\right),$$

où y est solution au sens de transposition de 3.27 avec $(y_0, y_1) = (0,0)$. Du théorème précédent, on peut déduire que :

$$\left\|L_T u\right\|_H\leq c\left\|u\right\|_{L^2(\Sigma_T)}.$$

D'où le :

Théorème 3.2.28 *:* $L_T \in \mathcal{L}\left(L^2\left(\Sigma_0\right), H\right).$

Il reste à calculer son adjoint. Comme $H = L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)$*, le dual de* H *sera* $H' = L^2(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$ *(en identifiant* $L^2(\Omega)$ *à son dual). Le calcul de l'adjoint de* L_T *se fait de la manière suivante.*

On a d'abord :

$$\left\langle L_T u,(z_0,z_1)\right\rangle_{H,H'}=\int_{\Omega}y\left(T\right)z_0dx+\left\langle y_t\left(T\right),z_1\right\rangle_{H^{-1},H_0^1(\Omega)}.$$

Soit ψ *une solution quelconque de*

$$\begin{cases}\psi_{tt}-\triangle\psi=0,\ \textit{sur}\ (0,T)\times\Omega=\Psi\\ \psi=0,\ \textit{sur}\ (0,T)\times\partial\Omega=\Sigma_T.\end{cases}\tag{3.33}$$

Comme précédemment, du fait que $y(0,.) = y_t(0,.) = 0$*, on a :*

$$\begin{aligned}0&=\int_{\Psi}y\left(\psi_{tt}-\triangle\psi\right)dxdt\\&=\int_{\Omega}y\left(T\right)\psi_t\left(T\right)dx-\left\langle y_t\left(T\right),\psi\left(T\right)\right\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}-\int_{\Sigma_0}\frac{\partial\psi}{\partial v}ud\Sigma_T.\end{aligned}$$

En choisissant l'unique solution ψ *de 3.33 qui vérifie*

$$\psi\left(T\right)=-z_1,\psi_t\left(T\right)=z_0,$$

on obtient :

$$\begin{aligned}\langle L_T u, (z_0, z_1)\rangle_{H,H'} &= \int_{\Sigma_0} \frac{\partial\psi}{\partial v} u d\Sigma_T \\ &= \int_{\Sigma_0} L_T^* (z_0, z_1)\, u d\Sigma_T.\end{aligned}$$

Et donc, en résumé $L_T^* : L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to L^2(\Sigma_0)$ *est défini par*

$$L_T^*(z_0, z_1) = \frac{\partial\psi}{\partial v} |_{\Sigma_0} .$$

où ψ *est l'unique solution du problème :*

$$\begin{cases} \psi_{tt} - \triangle\psi = 0, \ sur \ (0,T) \times \Omega = \Psi \\ \psi = 0, \ sur \ (0,T) \times \partial\Omega = \Sigma_T \\ \psi(T) = -z_1, \psi_t(T) = z_0. \end{cases}$$

Remarque 3.2.29 *: On a donc, en faisant le changement de variable* $z(t,x) = \psi(T-t,x)$

$$L_T^*(z_0, z_1) = -\frac{\partial}{\partial v} S(.)(z_0, z_1),$$

où $S(t)$ *est le semi-groupe des ondes dans* $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ *.*

Nous avions déjà calculé L_T^* *dans le cadre général de systèmes de la forme* $y_t = Ay + Bu$ *et nous avons trouvé* $L_T^* = B^* S^*(T,.)$*.*

On pourrait (en travaillant un peu) montrer qu'on peut écrire notre problème de contrôle sous la forme $y_t = Ay + Bu$ *où* A *est un opérateur non borné dans* $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ *.*

Le calcul de A^* *dans cette dualité conduit à*

$$A^*(f,g) = (\triangle g, f).$$

Donc

$$A^* = -\begin{pmatrix} 0 & \triangle \\ I_d & 0 \end{pmatrix} = -A^t.$$

On " retrouve" que $S^*(t)(z_0, z_1) = -S(t)(z_0, z_1)$*, et on peut (au moins formellement) montrer que* B *est l'opérateur trace sur* Γ_0*, son adjoint est l'opérateur "trace normale" sur* Γ_0*.*

On reprend les notations du paragheraphe : soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $q(x) = x - x_0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. On note v la normale unitaire extérieure à $\partial\Omega$ que l'on suppose de classe C^2. On définit :

$$\begin{aligned}
\Gamma_0 &= \{x \in \partial\Omega, q(x), v(x) > 0\}, \Gamma_1 = \Gamma \smallsetminus \Gamma_0 \\
\Sigma_i &= \Gamma_i \times (0,T), i = 0, 1.
\end{aligned}$$

Pour $\varepsilon > 0$ arbitrairement fixé, on considère O_ε, voisinage ouvert d'ordre ε dans $\mathbb{R}^n$ de Γ_0, et on prend $\omega = \Omega \cap O_{\varepsilon}.$.

Le résultat qui sera démontré dans ce paragraphe est le suivant :

Théorème 3.2.30 *:*

Pour tout $T > T_0 = \max_{x\in\overline{\Omega}} |x - x_0|$, *pour tout* $(y_0, y_1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, *il existe* $u \in L^2((0,T), L^2((0,T) \times \Gamma(x_0)))$ *pour lequel l'unique solution au sens de la transposition* y *de 3.27 vérifie* $y(T,.) = y_t(T,.) = 0$.

Preuve. : On peut commencer par vérifier que $(y, y_t) = Y$, solution au sens de la transposition de 3.27 peut s'écrire

$$Y(t) = S_1(t)(y_0, y_1) + L_t u,$$

où $S_1(t)(y_0, y_1) = (z(t), z_1(t))$ est l'unique solution, au sens de la transposition de

$$\begin{cases} z_{tt} = \triangle z, \text{ sur } (0,T) \times \Omega = \Psi \\ z = 0, \text{ sur } (0,T) \times \partial\Omega = \Sigma_T \\ z(0,.) = y_0, z_t(0,.) = y_1. \end{cases}$$

La condition au temps T revient à prouver que pour tout
$(y_0, y_1), (b_0, b_1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ il existe $u \in L^2(\Sigma_0)$ tel que

$$Y(t) = S_1(T)(y_0, y_1) + L_T u = (b_0, b_1).$$

Ceci revient à

$$R(L_T) = -S_1(T) H + H.$$

Mais, $S_1(T) H = H$ et donc

$$R(L_T) = -S_1(T) H + H \Leftrightarrow R(L_T) = H \Leftrightarrow R(L_T) = S_1(T) H.$$

Ainsi la contrôlabilité au temps T revient à amener au temps T toute donnée initiale à $(0,0)$ ou de manière équivalente à amener $(0,0)$ à n'importe quel état $(b_0, b_1) \in H$. On a montré que

$$R(L_T) = H \Leftrightarrow \exists c_T > 0, \left\|Z^0\right\|_{H'} \leq c_T \left\|L_T^* Z^0\right\|_{L^2((0,T),U)}, \forall Z^0 \in H'.$$

Ainsi, la contrôlabilité au temps T de ce système sera prouvée des lors qu'on aura montré l'existence de $c_T > 0$ tel que, pour tout $(z_0, z_1) \in L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, la solution $Z = (z, z_t)$ de 3.20 correspondant à la donnée initiale $Z^0 = (z_0, z_1)$ vérifie

$$|z_0|^2 + |\nabla z_1|^2 \leq c_T \int_{\Sigma(x_0)} \left|\frac{\partial z}{\partial v}\right|^2 d\Sigma_T.$$

Or, cette inégalité est précisément la formule 3.23 du lemme 3.2.18. ■

2- Contrôlabilité approchée (faible)

2.1- Définition et caractérisation

Definition 3.2.31 *: La paire (A, B) est approximativement contrôlable au temps $T > 0$ si*

$$\overline{R(L_T)} = H$$

Théorème 3.2.32 *: **Caractérisation***

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) (A, B) est approximativement contrôlable au temps $T > 0$.

2) $\ker(L_T^*) = \{0\}$.

3) $B^* S^*(t) x = 0, p.p.t \in (0, T) \Longrightarrow x = 0.$

4) $\sqrt{(Q_T x, x)}$ est une norme sur H.

Preuve. : On sait que $(\ker L_T^*)^{\perp} = \overline{R(L_T)} = H$ donc (1)⇔(2).

D'autre part $\sqrt{(Q_T x, x)} = |L_T^* x|$, donc (2)⇔(4). Enfin $(Q_T x, x) = \int_0^T \|B^* S^*(t) x\|^2 dt$, donc (3)⇔(4).

On retiendra que la contrôlabilité approché revient au résultat d'unicité suivant pour le problème adjoint :

$$\left\{\begin{array}{c} y_t = A^* y \\ B^* y(t) = 0, p.p.t \in (0, T) \end{array}\right\} \Leftrightarrow y = 0.$$

■

Exemple 3.2.33 *: Un exemple de temps minimal de contrôle approché*

$$\begin{cases} y_t = \dfrac{\partial}{\partial x} y + 1_\omega u, \ \ dans \ (0,1) \times \mathbb{R}_+^* \\ y(1,t) = 0, t > 0 \\ y(x,0) = y_0(x) \end{cases}$$

où $\omega =]a, 1[$.

L'étude de le contrôlabilité approchée au temps $T > 0$ *revient à l'étude de l'unicité du problème adjoint :*

$$\begin{cases} y_t = -\dfrac{\partial}{\partial x} y, \ \ sur \ (0,1) * \mathbb{R}_+^* \\ y(0,t) = 0 \\ y(x,t) = 0, p.p.x \in]a, 1[\times (0,T) \end{cases}$$

Les solutions de

$$\begin{cases} y_t = -\dfrac{\partial}{\partial x} y, \ \ sur \ (0,1) \times \mathbb{R}_+^* \\ y(0,t) = 0 \\ y(x,t) = y_0(x) \end{cases}$$

et donnée par

$$y(x,t) = \begin{cases} y_0(x-t) \ \ si \ 0 < x - t < 1, \\ 0 \ sinon \end{cases}$$

Donc $y(x,t) = 0$ *pour* $(x,t) \in (a,1) \times (0,T)$ *revient à*

$$y_0(x-t) = 0 \ pour \ 0 < x - t < 1, x \in (a,1).$$

Pour en déduire que $y_0 \equiv 0$, *il faut que* $\bigcup\limits_{t \in (0,T)} (a-t, 1-t) = (0,1)$.

Donc il faut et il suffit que $T > a$.

2.2- Contrôlabilité approchée de la chaleur Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière de classe C^2. On veut étudier la contrôlabilité approchée de

$$\begin{cases} y_t - \triangle y = 1_\omega u, \text{ sur } \Omega \times (0,T) = \Psi \\ y = 0, \text{ sur } \partial\Omega \times (0,T) = \Sigma_T \\ y(.,0) = y_0, \ \Omega \end{cases} \tag{3.34}$$

où $\omega \subset \Omega$ est un ouvert.

Théorème 3.2.34 *: Pour tout* $T > 0$, *tout* $y_0, y_1 \in L^2(\Omega)$ *et tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $u \in L^2(\omega \times (0,T))$ *tel que la solution de 3.34 vérifie* $\|y(T) - y_1\| \leq \varepsilon$.

Preuve. : Il suffit de prouver que

$$\left\{\begin{array}{c} y_t - \triangle y = 1_\omega u, \text{ sur } \Omega \times (0,T) = \Psi \\ y = 0, \text{ sur } \partial\Omega \times (0,T) = \Sigma_T \\ y(.,0) = y_0, \, \Omega \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow y = 0.$$

Soit $(\lambda_k, \phi_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ la suite de valeurs propres et fonction propres de l'opérateur positif, auto-adjoint, d'invrse compact

$$A = -\triangle, D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega).$$

Les (λ_k) fortement une suite croissante de $\mathbb{R}_+^*$ qui tend vers $+\infty$ avec k et $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ forme une base orthonormée de $L^2(\Omega)$.

La solution de la chaleur avec conditions de Dirichlet homogènes s'écrit :

$$y(x,t) = \sum_{k=1}^{k=+\infty} e^{-\lambda_k t} (y_0, \phi_k) \phi_k(x),$$

où $(y_0, \phi_k) = \int_\Omega y_0(x) \phi_k(x) \, dx$.

Supposons que

$$\sum_{k=1}^{k=+\infty} e^{-\lambda_k t} (y_0, \phi_k) \phi_k(x) = 0, (x,t) \in \omega \times (0,T).$$

Comme, pour tout $x \in \Omega$, l'application qui à $t \in \mathbb{R}_+^*$ associe $\sum_{k=1}^{k=+\infty} e^{-\lambda_k t} (y_0, \phi_k) \phi_k(x)$ est analytique, si elle est nulle sur $]0,T[$, elle est identiquement nulle sur $\mathbb{R}_+^*$.

Donc

$$\sum_{k=1}^{k=+\infty} e^{-\lambda_k t} (y_0, \phi_k) \phi_k(x) = 0, \quad (x,t) \in \omega * \mathbb{R}_+^*.$$

En multipliant par $e^{\lambda_1 t}$, on obtient, puisque la première valeur propre du Laplacien est simple

$$(y_0, \phi_1) \phi_1(x) + \sum_{k=1}^{k=+\infty} e^{-(\lambda_k - \lambda_1)t} (y_0, \phi_k) \phi_k(x) = 0, \text{ pour } (x,t) \in \omega * \mathbb{R}_+.$$

En faisant tendre t vers $+\infty$, on en déduit

$$(y_0, \phi_1) \phi_1(x) = 0, \forall x \in \omega.$$

Mais les ϕ_k sont analytique, donc :

$$(y_0, \phi_1) = 0.$$

Par récurrence, on en déduit en procédant de la même manière :

$$(y_0, \phi_1) = 0, \forall k \geq 1.$$

Donc $y_0 \equiv 0$ et $y(x,t) = 0, \forall (x,t) \in \Omega \times (0,T)$. ■

Remarque 3.2.35 *:*
Si $\omega = \Omega$, nous avions déjà calculé $R(L_T)$ et obtenu : $R(L_T) = H_0^1(\Omega)$ qui est bien dense dans $L^2(\Omega)$ (cf Lemme 3.2.13).

3- Contrôlabilité aux trajectoires

3.1- Définition et caractérisation

Definition 3.2.36 *: (A, B) est dit contrôlable à zéro au temps $T > 0$ si tout état $a \in H$ peut être transféré à 0 au temps T :*

$$\forall a \in H, \exists u \in L^2((0,T);U); S(T)a + L_T u = 0.$$

Remarque 3.2.37 *: La contrôlabilité exacte revient à pouvoir résoudre en u, $S(T)a + L_T u = b$.*
Si $S(.)$ est un groupe, alors

$$\begin{aligned} S(T)a + L_T u = b &\Leftrightarrow S(T)a + L_T u = S(T)S(-T)b \\ &\Leftrightarrow S(T)(a - S(-T)b) + L_T u = 0. \end{aligned}$$

et donc la contrôlabilité exacte est dans ce cas équivalente à la contrôlabilité à 0.

Definition 3.2.38 *:*
Soit b une "trajectoire" au temps $T > 0$: il existe $c \in H, v \in L^2((0,T);U)$ tel que

$$y(T,c,v) = b = S(T)c + L_T v.$$

Le système est dit contrôlable au temps $T > 0$ aux trajectoires si pour tout $a, c \in H, v \in L^2((0,T);U)$, il existe $u \in L^2((0,T);U)$ tel que

$$S(T)a + L_T u = S(T)c + L_T u.$$

Proposition 3.2.39 *: La contrôlabilité aux trajectoires est équivalent à la contrôlabilité à zéro.*

Théorème 3.2.40 *: Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) La paire (A, B) *est contrôlable à zéro au temps* $T > 0$.

ii) Il existe $c_T > 0$, *tel que pour tout* $x \in H$

$$\|S^*(T)x\|^2 \leq c_T \int_0^T \|B^* S^*(t)x\|^2 dt$$

iii) $R(S(T)) \subset R(L_T)$.

3.2- contrôlabilité à zéro de l'équation de la chaleur Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière de classe C^2 et $\omega \subset \Omega$ un ouvert. On étudie la contrôlabilité à 0 de 3.34.

Proposition 3.2.41 *: Si* $\omega = \Omega$, *alors* $\forall T > 0, \forall y_0 \in L^2(\Omega), \exists u \in L^2(\Omega \times (0,T))$ *tel que* $y(T, y_0, u) = 0$.

Preuve. : D'après le théorème 3.2.40, il suffit de montrer qu'il existe $c_T > 0$ telle que les solutions du problème adjoint

$$\begin{cases} y_t = \Delta y, \text{ sur } \Psi \\ y = 0, \text{ sur } \Sigma_T \\ y(0,.) = y_0 \in L^2(\Omega) \end{cases}$$

vérifient

$$\|y(T)\|^2 \leq c_T \int_0^T \|y(t)\|^2 dt. \tag{3.35}$$

on a

$$\begin{aligned} \|Ty(T)\|^2 &= \int_0^T \frac{d}{dt} \int_\Omega ty^2(x,t)\,dxdt \\ &= \|y\|^2_{L^2(\Psi)} + 2\int_\Psi tyy_t(x,t)\,dxdt \\ &= \|y\|^2_{L^2(\Psi)} + 2\int_\Psi ty\Delta(x,t)\,dxdt \\ &= \|y\|^2_{L^2(\Psi)} - 2\int_\Psi t|\nabla y|^2 \leq \|y\|^2_{L^2(\Psi)}. \end{aligned}$$

D'ou 3.35 avec $c_T = \dfrac{1}{T}$. ■

3.2.3 Comparaison des différentes notions

Théorème 3.2.42 *:*

1. *La contrôlabilité exacte* ***implique*** *la contrôlabilité approché mais la réciproque est* ***fausse.***
2. *La contrôlabilité exacte* ***implique*** *la contrôlabilité aux trajectoires mais la réciproque est* ***fausse.***
3. *Il n'ya aucune relation entre la contrôlabilité approché et la contrôlabilité aux trajectoires.*

Preuve. :

1) L'implication directe est évidente. On a montré que l'équation de la chaleur avec un contrôle interne n'était pas exactement contrôlable mais approximativement contrôlable. Ceci prouve que la réciproque est fausse.

2) La contrôlabilité exacte permet d'atteindre n'importe quel l'état, et donc 0. D'où l'implication directe. On a montré que l'équation de la chaleur avec un contrôle interne est nulle contrôlable mais n'est pas exactement contrôlable.

3) On reprend le problème

$$\begin{cases} y_t = y_x + 1_{(0,x_0)}u, \text{ sur } (0,1) \times (0,T) \\ y(1,.) = 0, \ t > 0 \\ y(.,0) = y_0, \text{ sur } (0,1). \end{cases}$$

La contrôlabilité approchée de ce système est équivalente à la propriété d'unicité du problème adjoint

$$\begin{cases} z_t = -z_x, \text{ sur } (0,1) \times (0,T) \\ z(0,.) = 0, \ t > 0 \\ z = 0, \text{ sur } (0,x_0) \times (0,T) \end{cases} \Longrightarrow z = 0, \ (0,1) \times (0,T).$$

Mais on sait que :

$$z(x,t) = \begin{cases} z_0(x-t,0), \text{ si } t < x < 1 \\ 0, \qquad \text{sinon} \end{cases}.$$

1. Et donc

$$z(x,t) = 0 \text{ sur } (0,x_0) \times (0,T) \Leftrightarrow \{z_0(x-t,0) = 0 \text{ si } x \in (t,1) \cap (0,x_0)\}.$$

Ainsi si

$$z_0(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } 0 < x < x_0 \\ 1 \text{ si } x_0 < x < 1 \end{cases},$$

alors

$$z(x,t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t < x < 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases},$$

est une solution non nulle du problème adjoint pour tout $T > 0$ bien qu'elle vérifie $z = 0$ dans $(0, x_0) \times (0, T)$. Le système de départ n'est approximativement contrôlable pour aucun $T > 0$.

Par contre, si $T > 1$, le système est contrôlable à 0 et il suffit de choisir $u = 0$. On a donc montré que la contrôlabilité approchée.

Pour montrer que l'implication inverse est aussi fausse, nous allons montrer que l'équation des ondes avec un contrôle interne localisé sur un domaine $\omega \subset \Omega$ qui ne satisfait pas l'hypothèse de contrôle géométrique est approximativement contrôlable à 0.

Pour montrer qu'elle n'est pas nulle contrôlable, nous allons montrer qu'elle n'est pas exactement contrôlable puisque dans le cas d'un groupe il y a équivalence entre contrôlabilité exacte et contrôlable à 0. ■

Bibliographie

[1] A. Pazy ; Semi Groupe of linear operator and application to partial differential equation. Springer (1983) .

[2] A. Fursikov and O. Yu. Imanuvilov ; Controllability of Evolution Equations, Lecture Notes Series # 34, Seoul National University, Korea, (1996) .

[3] C. Bardos, G. Lebeau, and J. Rauch ; Sharp sufficient conditions for the observation, control, and stabilization of Waves from the boundary, SIAM J. Control Optim, 30, no. 5, $1024 - 1065$, (1992) .

[4] F. Ammar Khodja, A. Benabdallah, M.G. Burgos and C.Dupaix ; A generalization of the Kalman rank condition, (en cours de redaction).

[5] H. Brézis ; Analyse fonctionnelle. Théorie et application. Masson, Paris, (1983).

[6] H. Brézise et T. Cazenave ; Linear semi-groups of contractions : the Hille-Yosida theory and some applications. Publications du laboratoire d'Analyse Numérique. Université Pierre et Marie Curie, Paris (1992) .

[7] J. Lions ; contrôlabilité exacte Perture bâtions singulières et stabilisation des systèmes distribués, RMA8, Masson, (1988).

[8] J. L. Lions ; contrôl optimal de système gouvernés, Dunad Garthier villars Paris. (1966) .

[9] G. Lebeau and L. Robbiano ; Contrôle exact de l'équation de la chaleur, Comm. P. D. E, 20, 335-356, (1996).

[10] M. G. Naso ; Extension of the controllability concept from the infinite dimension : exact, approximate, nulle controlability, D.E.A Mathématiques et application, UFR des sciences et des techenique, Université de franche-Comté, Besançon, France, (2000).

[11] P. Matrinez ; A new methode to abtain decay rate estimations for dissipative systems. ESAIM. Control Optim. calcul varia (1999) .

[12] V. Komornik ; Exact controlability and stabilization. The multiplier methode. Masson John Willey. Paris. (2003) .

Résumé

Dans ce mémoire nous donnons les principes généraux qui concernent l'analyse des systèmes distribues que nous introduiront par le biais de quelques espèces d'inégalités principaux, de la théorie des semi-groupes, de la contrôlabilité d'un système évolution, dans son évolution en dimension finie et infinie.

Abstract

In this work we give the general principles relating to the analysis of distributed systems we introduce through some major inequalities species, semi-group theory, the controllability of evolution in its evolution in finite and infinite dimension.

ملخص

في هذه المذكرة نقدم المبادئ العامة المتعلقة بتحليل النظم الموزعة، و نحن نقدم من خلال بعض الانواع الرئيسية لعدم المساواة و نظرية شبه المجموعات من المراقبة في نظام تغيري ذو البعد المحدود والغير محدود.