République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

N° Ref :...............

Centre Universitaire de Mila

Centre Universitaire de Mila

Institut des sciences et de la technologie **Département de Mathématiques et Informatique**

Optimisation D'un Système Dynamique Linéaire

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques

Préparé par : - Safa Boukouira
- Ismahane Metaai

Filière: Mathématiques **Spécialité**: Mathématiques Fondamentales et Appliquées

Soutenue le 25 Juin 2013 devant le jury composé de :

Encadreur :	M. AZI	C. U. Mila
Président :	M. S. ABDELOUAHAB	C. U. Mila
Examinateur :	CH. E. ARROUD	C. U. Mila

Année universitaire : 2012/2013

REMERCIEMENTS

Nous remercions d'abord et avant tout le bon Dieu qui m'a donné le courage et la patience pour réaliser ce travail.

Nous remercions vivement monsieur M. Azi d'avoir voulu proposes et assurer la direction de ce mémoire sa disponibilité son soutien ses encouragements et ses précieux conseils tout au long de ce travail.

Sans oublier tous les enseignants qui ont contribué a notre formation durant notre vie scolaire surtout les enseignant de l'institut (S-T).

Nous voudrons dire toute notre reconnaissance à nos parents pour leur dévouement sans limite et pour tout ce qu'ils nous ont donné sur tous les plants, et remercier nos familles et nos amis pour leur soutien constant.

Ismahane ***Safa***

Table des matières

Introduction Générale

L'optimisation est une branche importante des mathématiques appliquées, plusieurs domaine d'activité scientifique peut se réduire à un problème de maximisation ou de minimisation. L'importance de l'optimisation dans la résolution des problèmes pratiques en mathématiques appliquées ou dans d'autre activités de recherche est soulignée par de nombreux auteurs [8].

La théorie du contrôle (ou commande) analyse les propriétés des systèmes commandés, c'est-à-dire des systèmes dynamiques sur les quels on peut agir au moyen d'un contrôle. Le but est, alors, d'amener le système d'un état initial donné à un certain état final. Les systèmes abordés sont multiples : systèmes différentielles, systèmes discrets, systèmes avec bruit ect....

Historiquement, la théorie du contrôle optimal est liée d'une part au calcul des variations et d'autre part à la résolution des équations différentielles ordinaires. Pour la première fois, Johann Bernouilli a soumis le problème de brachistochrone correspondant au problème de la trajectoire la plus rapide entre deux points, en 1696, Leibniz, Newton, de l'Hôpital ainsi que son frère Jasques Bernouilli trouvent la solution de ce problème avec la méthode classique du calcul des variations. Cependant, la méthode utilisé par Jean Bernouilli est basée sur une analogie de l'optique. Ceci est considéré comme le résultat pionnier dans le domaine du contrôle optimal. Cette théorie qui est une extension du calcul des variations, traite la façon de trouver une loi de commande pour un système, modélisé par un ensemble d'équation différentielles décrivant les trajectoires d'états, de telle sort qu'un certain critère d'optimalité soit verifie. La résolution du problème de contrôle optimal a pu démarrer avec le célèbre Principe de Minimum de Pontriaguine (PMP) formulé par L. S. Pontriaguine en 1958, qui fournit une condition nécessaire d'optimalité et permet ainsi de calculer les trajectoires optimales, ainsi que la programmation dynamique de Hamilton Jacobi-Bellman (HJB) qui fournit une condition suffisante d'optimalité [8] [19].

Ce mémoire a pour objet l'étude d'optimisation d'un système dynamique linéaire, le contenu se décompose principalement en trois chapitres.

Dans le premier chapitre, nous donnons la solution générale de quelques systèmes d'équations différentielles linéaires, que nous allons utiliser par la suite, comme la solution du système linéaire d'ordre 1 à coefficient constant.

Dans le deuxième chapitre, nous donnons des résultats mathématique nécessaires à la suite de ce travail, dont nous introduisons quelques éléments et concepts de la théorie du calcul des variations, et nous étudions quelque problèmes fondamentales, comme (Problème Isopérimétrique).

Dans le troisième Chapitre, nous nous intéressons au problème de contrôle optimal que l'on ne peut pas resoudre par l'outil classique du calcul des variations, où nous présentons les notions essentielles de la théorie du contrôle. Pour déterminer une trajectoire optimal joignant un ensemble initial à une cible, il faut d'abord savoir si cette cible est atteignable, c'est le problème de contrôlabilité. La théoriede contrôle optimal se base essentielement sur le Principe de Minimum de Pontriaguine qui donne les conditions nécessaires d'optimalités aprés la formulation du Principe de Minimum de Pontriaguine nous étudions dans ce chapitre le problème de contrôle en temps minimum, qui est un problème trés important en contrôle optimal, finalement, ce chapitre s'achève par la présentation de la méthode de Tire qui est une méthode numérique de résolution d'un problème de contrôle optimal.

Chapitre 1

Résolution des systèmes dynamiques linéaires

Introduction

Un système dynamique consiste en un ensemble d'état possible, déterminer, de façon unique, l'état présent du système en fonction de ses états passés. La résolution du système linéaire est un problème connu quand on le résout dans un corps ou dans un anneau euclidien. Dans, ce chapitre on s'intéresse à la résolution des systèmes d' équations linéaires dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1 Système différentielles linéaires d'ordre 1

Définition 1.1 *On appelle système différentielle linéaire du première ordre dans $\mathbb{K}^n$ (désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) l'équation $\frac{dy}{dt}$ telle que :*

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + B(t), \tag{1.1}$$

où :

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ . \\ . \\ . \\ y_n(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

est la fonction inconnue ; $A(t) = \big(a_{ij}(t)\big)$ *telle que,* $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$ *;*

$$B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ . \\ . \\ . \\ b_n(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n,$$

sont des fonctions continues avec :

$$A : I \subset \mathbb{R} \to M_n(K)$$

$$B : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{K}^n.$$

Le système (1.1) *s'écrit sous la forme :*

$$\begin{cases} \frac{dy_1(t)}{dt} = a_{11}(t)y_1(t) + a_{12}y_2(t) + ... + a_{1n}y_n(t) + b_1(t); \\ \frac{dy_2(t)}{dt} = a_{21}(t)y_1(t) + a_{22}y_2(t) + ... + a_{2n}y_n(t) + b_2(t); \\ . \\ . \\ . \\ \frac{dy_n(t)}{dt} = a_{n1}(t)y_1(t) + a_{n2}y_2(t) + ... + a_{nn}y_n(t) + b_n(t). \end{cases}$$

Remarque 1.1 *La fonction* $f(t, y) = A(t)y + B(t)$ *est continue sur* $I \times \mathbb{K}^n$.

Théorème 1.1 *Pour tout point* $(t_0, v_0) \in I \times \mathbb{R}^n$ *il existe une solution unique définie sur* I *avec* $y(t_0) = v_0$.

Proposition 1.1 *Soit le systeme linéaire homogène :*

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y. \tag{1.2}$$

L'ensemble S *des solutions maximales est une espace vectoriel de dimension* n *sur* $\mathbb{K}$.

Proposition 1.2 *Si* y_1 *est un solution particulier du système* (1.1) *alors l'ensemble des solutions maximales de* (1.1) *est donné par :*

$$S + y_1 = \{z + y_1, z \in S\},$$

où S *est l'ensemble des solutions maximales du système homogène* (1.2) *associé à* (1.1).

1.1.1 Système différentielles linéaire d'ordre 1 a coefficients constants

Définition 1.2 *Lorsque la matrice A est indépendente de t, le système* (1.1) *est dit système différentielles linéaire d'ordre* 1 *a coefficients constant i.e.*

$$\frac{dy}{dt} = Ay + B(t). \tag{1.3}$$

Le système homogène

Le système homogène associé à (1.3) est :

$$\frac{dy}{dt} = Ay. \tag{1.4}$$

Cherchons une solution de (1.4) de la forme :

$$z(t) = e^{\lambda t}v,$$

où $\lambda \in \mathbb{K}$ et $v \in \mathbb{K}^n$ sont des constantes, alors :

$$\frac{d(e^{\lambda t}v)}{dt} = A(e^{\lambda t}v) \Leftrightarrow \lambda e^{\lambda t}v = Ae^{\lambda t}v;$$

$$\Leftrightarrow Av = \lambda v.$$

Donc λ est une valeur propre et v est un vecteur propre de la matrice A, en effet le problème revient à trouver les valeurs et les vecteurs propres de la matrice A. Selon A on distingue deux cas :

1) A est diagonalisable :

Si A est diagonalisable, $\mathbb{K}^n$ admet une base des vecteurs propres $(v_i)_{1 \le i \le n}$ pour tout i, désignons par λ_i la valeur propre associée à v_i, on obtient alors n solutions linéairement indépendentes :

$$z_i(t) = e^{\lambda_i t}v_i,$$

qui forment une base de S et la solution générale du système homogène (1.4) s'écrit :

$$z(t) = c_1e^{\lambda_1 t}v_2 + c_2e^{\lambda_2 t}v_2 + ... + c_ne^{\lambda_n t}v_n,\ c_i \in \mathbb{K},$$

telle que $1 \leq i \leq n$.
Exemple 1.1
Soit le système différentiel linéaire :

$$(E) = \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 2y; \\ \frac{dy}{dt} = 3x. \end{cases}$$

Alors la matrice associé au système (E) est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},$$

le polynôme caractéristique associé au système (E) est :

$$p_A(\lambda) = (\lambda + 2)(\lambda - 3),$$

donc les valeurs propres de A sont :

$$\lambda_1 = -2, \ \lambda_2 = 3,$$

on a : $\lambda_1 \neq \lambda_2$, alors, A est diagonalisable.
Les vecteurs propres associé au système (E) sont :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-3}{2} \end{pmatrix} \ et \ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Alors la solution généèale de (E) est :

$$z = c_1 e^{-2t} v_1 + c_2 e^{3t} v_2,$$

plus précisément :

$$\begin{cases} x = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{3t}; \\ y = \frac{-3}{2} c_1 e^{-2t} + c_2 e^{3t}, \end{cases}$$

où $(c_1, c_2) \in R^2$.
2) A n'est pas diagonalisable :
Si A n'est pas diagonalisable on a besoins d'introduire la notion de l'exponentielle d'une matrice.

Définition 1.3 *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice, on définit l'exponentielle de la matrice A comme suit :*

$$e^A = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} A^i.$$

-Proprieté fondamentale :

Si A, $B \in M_n(\mathbb{K})$ se commutent, i.e. $(AB = BA)$, alors :

$$e^{A+B} = e^A e^B.$$

-Méthode générale pour calculer l'exponentielle d'une matrice :

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, si A est diagonale, alors, on aura :

$$e^A = \begin{pmatrix} e^{a_{11}} & 0 & \dots \\ 0 & e^{a_{22}} & \dots \\ \vdots & \vdots & e^{a_{nn}} \end{pmatrix}.$$

Sinon on peut mettre A sous la forme d'une matrice diagonale par blocs (les blocs sont triangulaires) correspent au différents sous espace caractéristiques de A, on aura alors :

$$T_i = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots * \\ 0 & \lambda_2 & \dots * \\ \vdots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}, \; T = \begin{pmatrix} T_1 & 0 & \dots \\ 0 & T_2 & \dots \\ \vdots & 0 & T_n \end{pmatrix},$$

et

$$A = pTp^{-1}.$$

Soit p la matrice de passage dont les vecteur colonnes sont constitués par des vecteurs formant les bases des sous espaces caractéristiques.

On pose :

$$T = p^{-1}Ap \Leftrightarrow A = pTp^{-1},$$

telle que : T est une matrice diagonales par blocs et $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n$ sont les valeurs propres de A.

On a :

$$e^T = \begin{pmatrix} e^{T_1} & 0 & \dots \\ 0 & e_2^{T_2} & \dots \\ \vdots & 0 & e^{T_n} \end{pmatrix},$$

et comme $A = pTp^{-1}$, alors :

$$e^A = pe^Tp^{-1}.$$

Et on se ramène à calculer l'exponentielle des matrices :

$$T_i = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots * \\ 0 & \lambda_2 & \dots * \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_i I + N_i,$$

où :

$$N_i = \begin{pmatrix} 0 & * & \dots * \\ 0 & 0 & \dots * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

avec : $N_i^{\alpha_i} = 0$ telle que α_i est la multiplicité de λ_i, Donc :

$$e^{T_i} = e^{\lambda_i I + N_i}$$

$$= e^{\lambda_i I} e^{N_i},$$

telle que :

$$e^{N_i} = \sum_{j=0}^{\alpha_i} \frac{1}{j!} N_i^j.$$

Théorème 1.2 *La solution générale du système* (1.4) *est donnée par :*

$$y(t) = e^{tA} v. \tag{1.5}$$

Exemple 1.2

Soit le système :

$$\frac{dy}{dt} = Ay,$$

telle que :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

On a :

$$A = pTp^{-1},$$

donc :

$$tA = ptTp^{-1},$$

alors :

$$e^{tA} = pe^{tT} p^{-1},$$

avec :

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; p^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

et

$$tT = \begin{pmatrix} 2t & 0 & 0 \\ 0 & t & 3t \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}.$$

Soit :

$$M = \begin{pmatrix} t & 3t \\ 0 & t \end{pmatrix} = tI + tN,$$

avec :

$$tN = \begin{pmatrix} 0 & 3t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors :

$$\begin{aligned} e^M &= e^{tI} e^{tN} \\ &= \begin{pmatrix} e^t & 3te^{3t} \\ 0 & e^t \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donc :

$$e^{tT} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 3te^{3t} \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}.$$

Ainsi on aura :

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^t + 3te^t & 3te^t & 3te^t \\ e^t - e^{2t} & e^t & e^{2t} - e^t \\ 3te^t - e^{2t} + e^t & 3te^t & e^{2t} - 3te^t \end{pmatrix}.$$

La solution générale est :

$$y(t) = e^{tA} v \quad avec \quad v = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

alors $y(t)$ s'écrit :

$$y(t) = \begin{pmatrix} c_1(e^t + 3te^t) + c_2(3te^t) + c_3(3te^t) \\ c_1(e^t - e^{2t}) + c_2(e^t) + c_3(e^{2t} - e^t) \\ c_1(3te^t - e^{2t} + e^t) + c_2(3te^t) + c_3(e^{2t} - 3te^t) \end{pmatrix}.$$

Le système non homogène

Soit le système linéaire non homogène (1.3) :

$$\frac{dy}{dt} = Ay + B(t).$$

1. Si y_1 est une solution particulière de (1.3) alors la solution générale est donnés par :

$$y(t) = e^{tA}v + y_1(t).$$

2. Si aucune solution évidente n'apparait, on utilise la méthode de variation de la constante, alors on cherche une solution particulière sous la forme :

$$y_1(t) = e^{tA}v(t),$$

avec v dérivable, donc :

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= Ae^{tA}v(t) + e^{tA}v'(t) \\ &= Ay_1(t) + e^{tA}v'(t). \end{aligned}$$

En substituant dans (1.3) on trouve :

$$e^{tA}v'(t) = B(t),$$

alors :

$$v'(t) = e^{-tA}B(t),$$

ainsi on aura :

$$v(t) = \int_{t_0}^{t} e^{-sA}B(s)\,ds.$$

Donc on trouve la solution particulière :

$$y_1(t) = e^{tA}\int_{t_0}^{t} e^{-sA}B(s)\,ds.$$

$$= \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}B(s)\,ds.$$

En effet la solution générale est :

$$y(t) = e^{tA}v + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}B(s)\,ds.$$

Exemple 1.3

Soit le système :

$$E = \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y - t; \\ \frac{dy}{dt} = y - 1. \end{cases}$$

Posons :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; B(t) = \begin{pmatrix} -t \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On cherche une solution particulière sous la forme :

$$y_1(t) = e^{tA} v((t),$$

avec :

$$v(t) = \int_{t_0}^{t} e^{-sA} B(s)\, ds.$$

Ainsi :

$$y_1(t) = \begin{pmatrix} (t-2)e^t + t + 2 \\ 1 - e^t \end{pmatrix}.$$

Donc la solution générale est :

$$\begin{aligned} y(t) &= \begin{pmatrix} e^t & -te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (t-2)e^t + t + 2 \\ 1 - e^t \end{pmatrix}; \\ &= \begin{pmatrix} \big(c_1 + (1-c_2)t - 2\big)e^t + t + 2 \\ (c_2 - 1)e^t + 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

telle que $c_1, \; c_2 \in \mathbb{R}$.

1.1.2 Système différentielles linéaire d'ordre 1 à coefficients variables

On distingue deux cas :

Système homogène

Soit l'équation homogène (1.2) avec :

$$A : I \subset \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R}),$$

est une matrice $(n \times n)$ sur $\mathbb{K}$ a coefficient continues, désignons par S l'ensemble des solutions maximales de (1.2).
Soit

$$\begin{aligned} \phi_{t_0} : S &\to \mathbb{K}^n \\ y &\to y(t_0). \end{aligned}$$

un isomorphisme $\mathbb{K}$-linéaire.
Pour tout $(t, t_0) \in I^2$, on définit l'application :

$$R(t, t_0) = \phi_t o \phi_{t_0}^{-1}.$$

Alors :

$$y(t) = R(t, t_0)v,$$

telle que :

$$v = y(t_0).$$

Comme ϕ_t, ϕ_{t_0} sont des isomorphismes $\mathbb{K}$-linéaire, il sera identifié avec sa matrice dans la base canonique de $M_n(\mathbb{K})$.

Définition 1.4 *L'isomorphisme $R(t, t_0)$ (matrice) s'appelle la résolvante du système linéaire homogène* (1.2).

Cette résolvante a les propriété suivante :
1.$\forall t \in I, R(t_0, t_0) = I_n$(la matrice unité).
2.$\forall t_0, t_1, t_2 \in I, R(t_2, t_1) \, o \, R(t_1, t_0) = R(t_2, t_0)$.
3.$\forall R(t, t_0)$ est la solution dans $M_n(\mathbb{K})$ du système différentielle :

$$\frac{dM}{dt} = A(t)M(t),$$

avec la condition initial $M(t_0) = I_n$.

Définition 1.5 *(Problème de Cauchy)*
On appelle problème de Cauchy ou problème à la valeur initiale le problème qui consiste à trouver une fonction $y(t)$ définie sur l'intervalle $[t_0, t_f]$ telle que :

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + B(t); \quad \forall t \in [t_0, t_f], \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Proposition 1.3 *Si $A(u)A(v) = A(v)A(u)$ pour tout $u, v \in I$ alors :*

$$R(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^{t} A(s)\, ds}.$$

Preuve : Comme la solution du problème de Cauchy :

$$E = \begin{cases} \frac{dM}{dt} = A(t)M(t); \\ M(t_0) = I_n, \end{cases}$$

est unique, et égale $R(t, t_0)$ alors il suffit de montre que :

$$M(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^{t} A(s)\, ds},$$

est solution de ce problème.
On a :

$$M(t_0, t_0) = e^{\int_{t_0}^{t_0} A(s)\, ds} = I_n.$$

D'autre part on a :

$$\begin{aligned} M(t+h, t_0) &= e^{\int_{t_0}^{t+h} A(s)\, ds} \\ &= e^{\int_{t_0}^{t} A(s_1)\, ds_1 + \int_{t}^{t+h} A(s_2)\, ds_2}. \end{aligned}$$

Comme $A(s_1)$ et $A(s_2)$ sont commutent pour tout $s_1,\ s_2 \in I$.
D'apré le théorème de Fubini, les intégrales :

$$\int_{t_0}^{t} A(s_1)\, ds_1, \int_{t}^{t+h} A(s_2)\, ds_2,$$

sont commutent, alors :

$$M(t+h,\, t_0) = e^{\int_{t_0}^{t} A(s_1)\, ds_1} \times e^{\int_{t}^{t+h} A(s_2)\, ds_2}).$$

Donc :

$$M(t+h, t_0) = I_n + hA(t)M(t, t_0) + 0(h).$$

Ainsi, on aura :

$$\begin{aligned} \frac{dM(t, t_0)}{dt} &= \lim_{h \to 0} \frac{M(t+h,\, t_0) - M(t,\, t_0)}{h} \\ &= A(t)M(t,\, t_0) \times e^{\int_{t_0}^{t} A(s)\, ds}. \end{aligned}$$

Donc, $M(t,\, t_0)$ est solution du problème de Cauchy, d'où :

$$R(t,\, t_0) = e^{\int_{t_0}^{t} A(s)\, ds}.$$

Cas particulier :

Si A_1, A_2 sont des matrices constantes qui commutent, telle que $A(t) = f(t)A_1 + g(t)A_2$, pour des fonctions scalaires f et g, on aura

$$R(t,t_0) = e^{\int_{t_0}^{t} A(s)\,ds}$$

$$= e^{\left(\int_{t_0}^{t} f(s_1)\,ds_1\right)A_1 + \left(\int_{t_0}^{t} g(s_2)\,ds_2\right)A_2}$$

$$= e^{\left(\int_{t_0}^{t} f(s_1)\,ds_1\right)A_1} \times e^{\left(\int_{t_0}^{t} g(s_2)\,ds_2\right)A_2}.$$

Exemple 1.4

Calculons la résolvante associée à la matrice $A(t)$ définie comme suit :

$$A(t) = \begin{pmatrix} a(t) & -b(t) \\ b(t) & a(t) \end{pmatrix}.$$

En effet,

$$A(t) = a(t)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b(t)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

on pose :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On remarque que A_1 et A_2 commutent alors :

$$R(t,t_0) = e^{\left(\int_{t_0}^{t} a(s_1)\,ds_1\right)A_1} \times e^{\left(\int_{t_0}^{t} b(s_2)\,ds_2\right)A_2}.$$

Donc :

$$R(t,t_0) = e^{\alpha(t)-\alpha(t_0)} \times \begin{pmatrix} \cos\big(B(t)-B(t_0)\big) & -\sin\big(B(t)-B(t_0)\big) \\ \sin\big(B(t)-B(t_0)\big) & \cos\big(B(t)-B(t_0)\big) \end{pmatrix},$$

avec $\alpha(t)$ et B(t) sont des primitives de a(t) et b(t).

Définition 1.6 *La solution générale de* (1.2) *est :*

$$y(t) = R(t,t_0)v.$$

Système non homogène

Dans ce cas on utilise la méthode de variation de la constante, soit le système différentielle linéaire à coefficients variable (1.1), et $R(t,t_0)$ la résolvante du système homogène associé à (1.2), cherchons une solution particulière de (1.1) sous la forme :

$$y_1(t) = R(t,t_0)v(t).$$

Alors :

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= \frac{dR(t,t_0)}{dt}v(t) + R(t,t_0)v'(t) \\ &= A(t)R(t,t_0)v(t) + R(t,t_0)v'(t) \\ &= A(t)y(t) + R(t,t_0)v'(t). \end{aligned}$$

En identifiant avec (1.1), on trouve :

$$R(t,t_0)v'(t) = B(t) \Longrightarrow v'(t) = R(t,t_0)B(t).$$

Donc on aura :

$$v(t) = \int_t^{t_0} R(s,t_0)B(s)\,ds.$$

Alors la solution particulière est :

$$\begin{aligned} y_1(t) &= R(t,t_0)v(t) \\ &= \int_{t_0}^{t} R(t,t_0)R(t_0,s)B(s)\,ds \\ &= \int_{t_0}^{t} R(t,s)B(s)\,ds. \end{aligned}$$

D'où la solution générale de (1.1) est :

$$y(t) = R(t,t_0)v + \int_{t_0}^{t} R(t,s)B(s)\,ds.$$

1.2 Équation différentielles linéaires d'ordre n à coefficients constants

Soit l'équation différentielle d'ordre n suivante :

$$a_n y^{(n)} + a_{(n-1)} y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y = b(t). \tag{1.6}$$

Où :

$$\begin{aligned} y : \mathbb{R} &\to \mathbb{K} \\ t &\to y(t), \end{aligned}$$

est la fonction inconnue et $a_i \in \mathbb{K}$, $i = 0, ..., n$ sont des constants avec $a_n \neq 0$ et $b : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ est une fonction continue.
L'équation (1.6) s'écrit sous la forme :

$$y^n = (c_1, c_2, ..., c_n) \begin{pmatrix} y \\ y' \\ . \\ . \\ . \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} + \frac{b(t)}{a_n},$$

avec $c_i = \frac{-a_{i-1}}{a_n}$, $i = 1, ..., n$.
On pose :

$$\begin{cases} x_1 = y; \\ x_2 = y' = x_1'; \\ . \\ . \\ . \\ x_n = y^{(n-1)} = x'_{(n-1)}, \end{cases}$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & . & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 1 \\ c_1 & c_2 & . & . & . & . & c_n \end{pmatrix}, \ B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ \frac{b(t)}{a_n} \end{pmatrix} \ et \ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Alors l'équation (1.6) est équivalente au système différentielle linéaire suivant :

$$\begin{cases} x_1' = x_2; \\ x_2' = x_3; \\ . \\ . \\ . \\ x_{(n-1)}' = x_n; \\ x_n' = y^{(n)} = c_1 y + c_2 y' + ... + c_n y^{(n-1)} + \frac{b(t)}{a_n}, \end{cases}$$

qui s'écrit sous la forme matricielle comme suit :

$$x' = Ax + B(t). \tag{1.7}$$

On sait résoudre un tel système et on peut calculer $x_1 = y$ qui est la solution recherchée.

Équation différentielle homogène d'ordre n à coefficients constants

Ici, on s'interèsse à l'équation homogène associée :

$$a_n y^{(n)} + a_{(n-1)} y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y = 0, \tag{1.8}$$

qui est équivalente au système (1.7) avec $B(t) = 0$.

Théorème 1.3 *l'ensemble S des solutions maximales de* (1.8) *est un* $\mathbb{K}$-*espace vectoriel de dimension n.*

Théorème 1.4 *Lorsque le polynôme caractéristique $p(\lambda)$ à des racines complexe $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s$, de multiplicité $m_1, m_2, ..., m_s$, l'ensemble S des solutions est le $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n ayant pour base des fonctions :*

$$t \to t^j e^{\lambda_i t}, \ telle\ que, \ 1 \leq i \leq s, \ 0 \leq j \leq m_{i-1},$$

et la solution générale s'écrit :

$$y(t) = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{m_{i-1}} \alpha_{ij} t^j e^{\lambda_i t}.$$

Exemple 1.5

Soit l'équation différentielle :

$$y'' - 4y = 0.$$

Le polynôme caractéristique est :

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 4,$$

qui admet deux racines distinctes simples $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -2$.
Alors l'espace des solution S admet comme base les fonctions :

$$t \to e^{2t},\, t \to e^{-2t}.$$

Donc la solution générale est :

$$y(t) = \alpha_1 e^{2t} + \alpha_2 e^{-2t}.$$

Équation différentielle non homogène d'ordre n à coefficients constants

Soit l'équation différentielle (1.6), pour résoudre cette équation on commence par résoudre l'équation homogène associée(1.8).
Soit $(v_1, v_2, ..., v_n)$ une base des solutions de (1.8) on cherche, alors, une solution particulière de (1.6).

Il y a un certain nombre de cas où on peut trouver une solution particulière simple :
1. Si b est un polynôme de degré m et $a_0 \neq 0$ l'équation (1.6) admet une solution polynomial de degré m que l'on cherche par identification des coefficients.

Exemple 1.6 :

la solution particulière de l'équation :

$$y'' - 2y' + y = -t + 1,$$

est :

$$y_1(t) = -t - 1.$$

2. Si $b(t) = \alpha e^{\lambda} t$ avec $p(\lambda) \neq 0$, l'équation (1.6) admet pour solution particulière :

$$y_1(t) = \frac{\alpha}{p(\lambda)} e^{\lambda t}.$$

Exemple 1.7

Une solution particulière de l'équation :

$$y''' - y'' + 3y' - y = 5e^{-t},$$

est :

$$y_1(t) = \frac{-5}{2}e^{-t}.$$

3. Dans le cas générale on applique la méthode de variation de constante au système (1.7) associé à l'équation (1.6). On pose :

$$x_1 = y, x_2 = y', ..., x_n = y^{(n-1)}.$$

On obtient le système :

$$\begin{cases} x_1' = x_2; \\ x_2' = x_3; \\ . \\ . \\ . \\ x_{(n-1)}' = x_n; \\ x_n' = \frac{-a_0}{a_n}x_1 - \frac{a_1}{a_n}x_2 - .... - \frac{a_{n-1}}{a_n}x_n + \frac{b(t)}{a_n}; \\ = \frac{-a_0}{a_n}x_1 - \frac{a_1}{a_n}x_2 - .... - \frac{a_{n-1}}{a_n}x_n + \frac{b(t)}{a_n}. \end{cases}$$

Qui s'écrit :

$$x' = Ax + B(t).$$

Le système homogène associé est :

$$x' = Ax, \tag{1.9}$$

ce système admet comme base de solutions les fonctions :

$$V_1 = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_1' \\ . \\ . \\ . \\ v_1^{(n-1)} \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} v_2 \\ v_2' \\ . \\ . \\ . \\ v_2^{(n-1)} \end{pmatrix}, ..., V_n = \begin{pmatrix} v_n \\ v_n' \\ . \\ . \\ . \\ v_n^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

La solution générale du système (1.9) s'écrit :

$$z(t) = \alpha_1 V_1(t) + \alpha_2 V_2(t) + ... + \alpha_n V_n(t),$$

où $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{K}$, on cherche une solution particulière du système (1.7) sous la forme :

$$y_1(t) = \alpha_1(t)V_1(t) + \alpha_2(t)V_2(t) + ... + \alpha_n(t)V_n(t),$$

alors :

$$y_1'(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(t)V_i'(t) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i'(t)V_i(t).$$

Comme $V_i(t)$ est solution de (1.9), donc :

$$V_i'(t) = AV_i(t).$$

En effet :

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= A\sum_{i=1}^{n} \alpha_i V_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i'(t)V_i(t) \\ &= Ay_1(t) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i'(t)V_i(t). \end{aligned}$$

En substituant dans (1.7) on trouve :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i'(t)V_i'(t) = 0.$$

Alors :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i' V_i = 0; \\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i' V_i' = 0; \\ . \\ . \\ . \\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i' V_i^{(n-2)} = 0; \\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i' V_i^{(n-1)} = \frac{b(t)}{a_n}. \end{cases}$$

Comme les vecteurs V_i, $i = 1, ..., n$, sont linéairement indépendants, le déterminant de ce système est non nul et la résolution de ce système nous donne les α_i', $i = 1, ..., n$, en suite on trouve les α_i par intégration.

Exemple 1.8

Soit le système :

$$y'' + 4y = \tan(t),\ t \in]\frac{-\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}[.$$

La base des solutions réelles de l'équation homogène associé à :

$$y'' + 4y = 0,$$

est :

$$t \to \cos(2t),\ t \to \sin(2t).$$

On cherche une solution particulière de l'équation homogène sous la forme :

$$y_1(t) = \alpha_1(t)\cos(2t) + \alpha_2(t)\sin(2t).$$

On a :

$$\begin{cases} \alpha_1' \cos(2t) + \alpha_2' \sin(2t) = 0; \\ -2\alpha_1' \sin(2t) + \alpha_2' \cos(2t) = \tan(t). \end{cases}$$

Le déterminant est :

$$\begin{aligned} \triangle &= \begin{vmatrix} \cos(2t) & \sin(2t) \\ -2\sin(2t) & 2\cos(2t) \end{vmatrix} \\ &= 2(\cos^2(2t) + \sin^2(2t)) \\ &= 2 \neq 0. \end{aligned}$$

Donc, on a :

$$\begin{aligned} \alpha_1'(t) &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin(2t) \\ t\tan(t) & 2\cos(2t) \end{vmatrix}}{2} \\ &= \frac{-1}{2}\big(1 - \cos(2t)\big). \\ \alpha_2'(t) &= \frac{\begin{vmatrix} \cos(2t) & 0 \\ -2\sin(2t) & t\tan(t) \end{vmatrix}}{2} \\ &= \cos(t)\sin(t) - \frac{1}{2}\frac{\sin(t)}{\cos(t)}. \end{aligned}$$

Alors :

$$\alpha_1(t) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{2}\big(1-\cos(2t)\big)$$
$$= -\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin(2t)\,dt.$$
$$\alpha_2(t) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t)\sin(t) - \frac{1}{2}\frac{\sin(t)}{\cos(t)})\,dt$$
$$= \frac{1}{2}\sin^2(t) + t\frac{1}{2}\ln(\cos(t)).$$

Donc la solution particulière est :

$$y_1(t) = (-\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin(2t))\cos 2t + \big(\frac{1}{2}\sin^2(t) + \frac{1}{2}\ln(\cos(t))\big)\sin(2t).$$

En effet, la solution générale est :

$$y(t) = \alpha_1\cos(2t)+\alpha_2\sin(2t)+(-\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin(2t))\cos(2t)+\big(\frac{1}{2}\sin^2(t)+\frac{1}{2}\ln(\cos(t))\big)\sin(2t).$$

Conclusion

Dans ce chapitre nous avons abordés la résolution des systèmes d'équations différentielle linéaire, dont nous avons distingué deux cas important le cas où A est indépendante de t, et le cas où A dépend de t, pour résoudre ce système on fait recours à la résolvante.

Pour résoudre une équation différentielle d'ordre n à coefficient constant on se ramènant généralement, à la résolution des systèmes d'équations différentielle d'ordre 1.

Chapitre 2

Calcul des variations

Introduction

Le calcul des variations est un axe important de l'optimisation. Il a été développé dès le 17^{eme} siecle, par plusieurs mathématiciens notamment les frères Bernoulli, Euler, Gauss, etc. . . . . . Le calcul des variations a été également utilisé pour la résolution des problèmes d'optimisation dont la solution possède une certaine régularité, (par exemple, C^1-continuité). Le calcul des variations dans le sens large concerne l'étude des problèmes d'extremum dont la fonction objectif est générale (fonctionnelles). Il est analogue à la théorie des extremas et l'analyse réelle. La difficulté supplémentaire est que les inconnues ne sont pas des variables mais des fonctions [8].

L'optimisation regroupe les techniques qui permettent de chercher les minima ou maxima de fonctions ou de fonctionnelles ; elle intervient dans presque tous les processus de modélisation actuels.

Dans ce chapitre, nous donnons, au premier lieu, quelque rappelles et notions qui seront nécessaires pour développement de l'analyse mathématique des problèmes calcul des variations, puis nous abordons la théorie correspondante.

2.1 Rappel mathématique

Définition 2.1 *Un espace vectoriel E est appelé espace normé si à tout $y \in E$ correspond un nombre positif $\|y\|$ appelé norme de y tel que les axiomes* *suivants sont vérifiés :*

1. $\|y\| \geq 0$ *pour tout* $y \in E$.

2. $\|y\| = 0$ *si et seulement si* $y = 0$.

3. $\|\lambda y\| = |\lambda|\|y\|$ *pour tout*$\lambda \in \mathbb{K} = \mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{C}$*)*.

4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *pour tout* $x,\ y$ *dans* E.

Définition 2.2 *(Fonction régulière)*
Une fonction régulière c'est une fonction qui est soit constante, croissante ou décroissance sur son intervalle de définition, et tout simplement est une fonction qui est partout dérivable.

Théorème 2.1 *(Théorème de Taylor à une variable)*
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction telle que* $f \in C^n[a, b]$, $f^{(n)}$ *dérivable dans* $]a, b[$ *et soit* $x_0 \in [a, b]$, $x \neq x_0$, *on a :*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{1!} f'(x_0) + ... + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n + 1)!} f^{n+1}(\xi),$$

où ξ *est un point strictement compris entre* x_0 *et* x.

Théorème 2.2 *(Théorème de Taylor à deux variables)*
On suppose que $f(x, y)$ *et toutes ses dérivées d'ordre inférieur à* $n + 1$ *sont continues dans* $D = \{(x, y) \quad a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$ *(c'est-à-dire* $f(x, y) \in C^{n+1}$*), soit* $(x_0, y_0) \in D$, $\forall (x, y) \in D$, *il existe* ξ *compris entre* x *et* x_0, *et* η *compris entre* y, y_0 *avec* $f(x, y) = P_n(x, y) + R_n(x, y)$ *où,*

$$P_n(x, y) = f(x_0, y_0) + (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + ...$$

$$+ .... + \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n} C^j{}_{n+1}(x - x_0)^{n+1-j}(y - y_0)^j \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-j}\partial y^j}(x_0, y_0);$$

$$R_n(x, y) = \frac{1}{n + 1}\sum_{j=0}^{n+1} C^j{}_{n+1}(x - x_0)^{n+1-j}(y - y_0)^j \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-j}\partial y^j}(\xi, \eta).$$

Théorème 2.3 *(Théorème de la moyenne)*

Soient f et g deux applications intégrables de l'intervalle compact $[a, b]$, $a < b$ dans $\mathbb{R}$, l'application g étant positive. On désigne par m (résp. M) la borne inférieure (résp.supérieure) de f sur $[a, b]$. Alors, il existe $k \in \mathbb{R}$ vérifiant :

$$m \leq k \leq M \quad et \quad \int_a^b f(x)g(x)\,dx = k \int_a^b g(x)\,dx.$$

Si f et g sont continues, alors il existe $c \in [a, b]$ vérifiant :

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c) \int_a^b g(x)\,dx.$$

Lemme 2.1 [15]*(Lemme fondamontal)*

Si l'intégrale $\int_a^b f(y)\eta(y)\,dy$ où $f(y)$ est une fonction continue par morceaux dans l'intervalle [a, b], s'annulant pour toute fonction $\eta \in C^1([a, b], \mathbb{R})$ telle que $\eta(a) = \eta(b) = 0$, alors, $f(y)$ est identiquement nul sur $[a, b]$.

2.2 Probleme fondamental du calcul des variations

Le problème fondamental du calcul des variations consiste à comparer les différentes valeurs que peut prendre une intégrale pour plusieurs choix de la fonction $y(t)$. Plus précisément, on cherche les valeurs maximale et minimale de la fonctionnelles représentées par intégrale.

2.2.1 Problème du calcul des variations sans contrainte

Soit $[t_0, t_f]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit E l'ensemble des applications de classe C^1 définies sur $[t_0, t_f]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ($y : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant $[t_0, t_f]$). Le problème consiste à déterminer l'extremum de la fonctionnelle, définie sur E, suivante :

$$J(y) = \int_{t_0}^{t_f} F\big(y(t), y'(t), t\big)\,dt, \tag{2.1}$$

avec $E = C^1([t_0, t_f], \mathbb{R})$.
En outre, si $F\big(y(t), y'(t), t\big)$ est de classe C^2 et $y(t)$ de classe C^1 avec

$$y(t_0) = y_0,\ y(t_f) = y_f; \tag{2.2}$$

on aura ainsi, le problème de calcul des variations suivant :

$$\begin{cases} \text{Minimiser } J(y), \\ \text{tel que } y \in E \text{ et vérifiant les conditions aux limites (2.2).} \end{cases}$$

Définition 2.3 *Soient E un espace vectorielle normé et $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) un corps. On appelle J une fonctionnelle toute application linéaire d'un espace vectorielle normé E dans un corps $\mathbb{K}$.*

Définition 2.4 *(Fonction admissible)*
On appelle fonction admissible toute fonction suffisamment régulière $y(t)$ vérifiant les contraintes.

Définition 2.5 *(Équation d'Euler-Lagrange)*
L'équation d'Euler-Lagrange est une équation fonctionnelle qui implique y, y' et egalement y''. C'est donc en général une équation différentielle du second ordre à coefficients non constants, et s'écrivant sous la forme :

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial F}{\partial y'}\Big) = 0.$$

Définition 2.6 *Minimum (maximum) global*
y^* réalise un maximum pour la fonctionnelle J ou que $J(y^*)$ est une valeur maximale de J si :

$$\forall y \in E : J(y) - J(y^*) \leq 0.$$

y^* réalise un minimum pour la fonctionnelle J si :

$$\forall y \in E : J(y) - J(y^*) \geq 0.$$

Définition 2.7 *Minimum (Maximum) local*
On dit que $y^* \in E$ réalise un minimum local de J si on peut trouver une boule ouverte $B(y^*, \rho)$ de E centrée en y^* telle que :

$$\forall y \in B(y^*, \rho) : J(y^*) \leq J(y).$$

On dit que y^* réalise un maximum local de J si on peut trouver une boule ouverte $B(y^*, \rho)$ de E centrée en y^* telle que :

$$\forall y \in B(y^*, \rho) : J(y^*) \geq J(y).$$

On rappelle qu'une boule ouverte de E de centre y^* et de rayon $\rho \geq 0$ est l'ensemble :

$$B(y^*, \rho) = \{y \in E,\ tel\ que : \|y^* - y\| < \rho\},$$

où $\|.\|$ désigne la norme de E.

Proposition 2.1 *Si y^* réalise un maximum de J, y^* réalise un minimum de $-J$. Plus précisément :*

$$max\{J(y)\} = -min\{-J(y)\}.$$

Définition 2.8 *(Variation d'une fonctionnelle)*

Lorsque J est une fonctionnelle définie sur un ouvert Ω d'un espace vectoriel normé E, on appelle variation de la fonctionnelle J en y dans la direction $z \in E$, la limite, si elle existe, suivante :

$$\delta J(y, z) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{J(y + \varepsilon z) - J(y)}{\varepsilon}.$$

Définition 2.9 *(Accroissement d'une fonctionnelle)*

L'accroissement d'une fonctionnelle, noté $\triangle J$, est définie par :

$$\triangle J = J\big(y(t) + \delta y(t)\big) - J\big(y(t)\big),$$

où $\delta y(t)$ est la variation de la fonction $y(t)$.

Ainsi, l'accroissement $\triangle J\big(y(t), \delta(t)\big)$ de la fonctionnelle dépend de la fonction $y(t)$ et de sa variation $\delta y(t)$.

Définition 2.10 *(la première variation et la deuxième variation d'une fonctionnelle)*

Considérons l'accroissement de la fonctionnelle J :

$$\triangle J = J\big(y(t) + \delta y(t)\big) - J\big(y(t)\big).$$

Nous utilisons la série de Taylor autour de $y(t) + \delta y(t)$, pour $J\big(y(t) + \delta y(t)\big)$, alors :

$$\triangle J = \frac{\partial J}{\partial y} \delta y(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 J}{\partial y^2} \big(\delta y(t)\big)^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \delta J + \delta^2 J + ...,$$

où $\delta J = \frac{\partial J}{\partial y}\delta y(t)$, *et* $\delta^2 J = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 J}{\partial y^2}\big(\delta y(t)\big)^2$ *sont respectivement la première variation et la deuxième variation de* J*.*

Théorème 2.4 [9]*(Théorème fondamental)*

Soit $y^*(t)$ *un extremum, la première variation de* J *doit être nulle en* $y^*(t)$*. i. e.*

$$\delta J\big(y^*(t), \delta y(t)\big) = 0$$

pour toute variation admissible $\delta y(t)$*.*

Condition nécessaire

Nous donnons, ci-dessous, le développement de l'équation d'Euler-Lagrange. On suppose, par exemple, que $y^*(t)$ est la courbe qui rend l'intégrale (2.1) minimale et soit $y(t)$ une autre courbe qui s'écrit sous la forme :

$$y(t) = y^*(t) + \delta y(t),$$

où $\delta y(t)$ est une variation de $y^*(t)$ avec,

$$\delta y(t_0) = \delta y(t_f) = 0,$$

tel que $J\big(y^*(t) + \delta y(t)\big)$ est continuement différentiable sur E.
Donc :

$$\triangle J\big(y^*(t), \delta y(t)\big) = J\Big(\big(y^*(t) + \delta y(t)\big)\Big) - J\big(y^*(t)\big)$$

$$= \int_{t_0}^{t_f} \Big[F\big(y^*(t) + \delta y(t), y'^*(t) + \delta y'(t), t\big) - F\big(y^*(t), y'^*(t), t\big)\Big]. \qquad (2.3)$$

Pour déterminer la première variation de J, on utilise le développement de Taylor autour de $y^*(t)$ et $y'^*(t)$ pour le premier terme de l'intégrale (2.3) et en gardant tout simplement les termes linéaires en δy et $\delta y'$, pour obtenir,

$$\triangle J = \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\partial F\Big(y^*(t), y'^*(t), t\Big)}{\partial y^*(t)}\delta y(t) + \frac{\partial F\Big(y^*(t), y'^*(t), t\Big)}{\partial y'^*(t)}\delta y'(t)\right] dt. \qquad (2.4)$$

Une intégration par parties du deuxième terme de (2.4) donne :

$$\int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)^* \delta y' dt = \left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)^* \delta y\Big|_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)^* \delta y\, dt.$$

Sachant que $\delta y(t_0) = \delta y(t_f) = 0$, l'équation (2.4) ci-dessus donne :

$$\delta J\big(y^*(t), \delta y(t)\big) = \int_{t_0}^{t_f} \left[\Big(\frac{\partial F}{\partial y}\Big)^* - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)^*\right] \delta y\, dt,$$

qui est valable pour tout δy de classe C^1. Ainsi, d'après le théorème (2.4), on déduit que la variation de J est nulle en extremum, i.e.

$$\delta J\big(y^*(t), \delta y(t)\big) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\int_{t_0}^{t_f} \left[\Big(\frac{\partial F}{\partial y}\Big)^* - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)^*\right] \delta y\, dt = 0.$$

D'après le lemme (2.1), on a le résultat :

$$\Big(\frac{\partial F}{\partial y}\Big)^* - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)^* = 0, \text{ pour tout } t \in [t_0, t_f]. \tag{2.5}$$

Cette dernière équation (2.5) (appelée l'équation d'Euler-Lagrange) est une condition nécessaire d'optimalité du première ordre.

Condition suffisante

Pour établir la nature d'une solution qui vérifier (2.5), c'est-à-dire, s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum, nous devons prendre en considération la deuxième variation et examiner son signe. Donc, nous trouvons une condition suffisante pour l'extremum. Soit :

$$\delta^2 J = \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\Big)^* \big(\delta y(t)\big)^2 + \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\Big)^* \big(\delta y'(t)\big)^2 + \Big(\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'}\Big)^* \delta y(t) \delta y'(t)\right] dt,$$

où

$$\delta^2 J = \int_{t_0}^{t_f} \left[\ \delta y(t) \quad \delta y'(t)\ \right] \left[\begin{array}{cc} \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} & \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} & \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \delta y(t) \\ \delta y'(t) \end{array} \right] dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_f} \left[\ \delta y(t) \quad \delta y'(t)\ \right] \Pi \left[\begin{array}{c} \delta y(t) \\ \delta y'(t) \end{array} \right] dt, \tag{2.6}$$

avec :

$$\Pi = \frac{1}{2} \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} & \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \end{array} \right].$$

La deuxième variation $\delta^2 J$ est positive (négative), si la matrice Π dans (2.6) soit définie positive (négative). Ceci prouve la nature de la solution. Dans beaucoup de cas $\delta y(t)$ est arbitraire, le coefficient de $\big(\delta y'(t)\big)^2$, i.e.,$\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\Big)^*$ détermine le signe de $\delta^2 J$.

$$\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\Big)^* > 0 \qquad \textit{pour le minimum}, \tag{2.7}$$

$$\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\Big)^* < 0 \qquad \textit{pour le maximum}. \tag{2.8}$$

Les conditions (2.7) et (2.8) sont appelées conditions de Legendre.

2.2.2 Problème du calcul des variations avec contrainte

On rencontre dans les problèmes d'optimisation (calcul des variations), un certain nombre de contraintes imposées à la solution admissible $y(t)$, engendrent des difficultés supplémentaires. Généralement, il y a plusieurs contraintes :

- Contraintes au bord : on peut imposer à la solution de prendre des valeurs données aux bornes de l'intervalle $I = [t_0, t_f]$ (conditions initiales).

- Contraintes instantanées :
  1. Sous forme d'égalité : $g\big(y(t), t\big) = 0$.
  2. Sous forme d'inégalité : $g\big(y(t), t\big) \leq 0$.

- Contraintes différentiables : ce type de contraintes sera pris en compte dans la théorie de la commande optimale et sera de la forme :

$$g\big(y(t), y'(t), t\big) = 0.$$

Pour incorporer ces contraintes, on fera appel à la technique des multiplicateurs de Lagrange.

Définition 2.11 *Minimum (maximum) global*

Soit Ω un ouvert d'un espace vectoriel normé E.
y^* réalise un maximum pour la fonctionnelle J ou que $J(y^*)$ est une valeur maximale de J si :

$$\forall y \in \Omega : J(y) - J(y^*) \leq 0.$$

y^* réalise un minimum pour la fonctionnelle J si :

$$\forall y \in \Omega : J(y) - J(y^*) \geq 0.$$

Définition 2.12 *Minimum (Maximum) local*

Soit Ω un ensemble non vide d'un espace E et J une fonction de Ω dans $\mathbb{K}$, on dit que $y^* \in \Omega$ réalise un minimum local de J sur Ω si on peut trouver une boule ouverte $B(y^*, \rho)$ de E centrée en y^* telle que :

$$\forall y \in B(y^*, \rho) \cap \Omega : J(y^*) \leq J(y).$$

On dit que y^* réalise un maximum local de J sur Ω si on peut trouver une boule ouverte $B(y^*, \rho)$ de H centrée en y^* telle que :

$$\forall y \in B(y^*, \rho) \cap \Omega : J(y^*) \geq J(y).$$

Multiplicateurs de Lagrange

Considérons le problème $(2.1) - (2.2)$ avec $E = C^1([t_0, t_f], \mathbb{R}^n)$ et supposons qu'on dispose de p contraintes :

$$g_k(y,t) = 0 \qquad 1 \leq k \leq p,$$

où, $y = (y_1, y_2, ..., y_p)^T$.
Pour étudier ce problème, on introduit p multiplicateurs de Lagrange

$$\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p,$$

et soit :

$$L(y, y', t) = F(y, y', t) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i g_i(y). \tag{2.9}$$

Maintenant, il suffit juste d'utiliser les résultats précédents de la sous section (2.2.1), au lagrangien (2.9), alors, $y(t)$ vérifie les équations d'Euler-Lagrange, données par :

$$\forall i \in [1,p], \qquad \frac{\partial L}{\partial y_i}\big(y(t),y'(t),t\big) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial y'_i}\big(y(t),y'(t),t\big) =$$

$$\frac{\partial F}{\partial y_i}\big(y(t),y'(t),t\big) - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial y'_i}\big(y(t),y'(t),t\big) + \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial y_i}\big(y(t),t\big) = 0.$$

On cherche donc les fonctions λ_1,λ_2,............,λ_p, telles que :

$$\forall i \in [1,p], \quad \frac{\partial L}{\partial y_i}\big(y(t),y'(t),t\big) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial y'_i}\big(y(t),(y'(t),t\big) = 0.$$

C'est–à–dire $(\lambda_k)_{1\leq k\leq p}$ sont solutions du système linéaire, qui comporte p équations et p inconnues, suivant :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial g_i}{\partial y_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial g_p}{\partial y_p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \cdots \\ \lambda_i \\ \cdots \\ \lambda_p \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial y_1}\Big(y(t),y'(t),t\Big) - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial y'_1}\Big(y(t),y'(t),t\Big) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial F}{\partial y_i}\Big(y(t),y'(t),t\Big) - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial y'_i}\Big(y(t),y'(t),t\Big) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial F}{\partial y_p}\Big(y(t),y'(t),t\Big) - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial y'_p}\Big(y(t),y'(t),t\Big) \end{pmatrix}.$$

La fonction vectorielle y solution du problème de calcul des variations avec les p contraintes est donc solution des équations d 'Euler -Lagrange associées au Lagrangien :

$$L = F + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i g_i.$$

Problème Isopérimétrique

On appelle problème isopérimétrique, un problème où, au moins, une contrainte s'intègral toute le trajectoire. Généralement, il s'agit d'un problème géométrique de calcul de « surface minimale à périmètre donné » ou « volume minimal à surface donnée ». Pour cela, considérons le problème suivant défini sur $E = C^1([t_0, t_f],\ \mathbb{R})$;

$$Min J(y) = \int_{t_0}^{t_f} F\big(y(t), y'(t,t)\big)\, dt,$$

avec

$$\int_{t_0}^{t_f} g\big(y(t), y'(t), t\big)\, dt = \mu, \tag{2.10}$$

et les conditions aux limites sera vérifie :

$$y(t_0) = y_0,\ y(t_f) = y_f.$$

On suppose que $F\big(y(t), y'(t), t\big)$ et $g\big(y(t), y'(t), t\big)$ sont respectivement de classe C^2 et de classe C^1 par rapport à $y(t)$. La difficulté du problème est dûe à la présence de la contrainte (2.10).

L'objectif de la méthode des multiplicateurs de Lagrange est d'incorporer la condition (2.10) et de faire apparaître une nouvelle formulation du problème. De ce fait, la fonctionnelle augmentée est de la forme suivante :

$$J_\lambda = \int_{t_0}^{t_f} L\big(y(t), y'(t), t\big)\, dt,$$

où

$$L\big(y(t), y'(t), t\big) = F\big(y(t), y'(t), t\big) + \lambda\Big[g\big(y(t), y'(t), t\big) - \mu\Big]. \tag{2.11}$$

Supposons que $y^*(t)$ est un minimum, et que $y(t)$ est suffisamment proche du minimum $y^*(t)$ i. e.

$$y(t) = y^*(t) + \xi\eta(t),$$

avec : ξ réelle, alors, $\xi \to J_\lambda\big(y^*(t) + \xi\mu\big)$, aura un minimum pour $\xi = 0$, pour tout choix de $\eta : [t_0, t_f] \to \mathbb{R}$ de classe C^1 avec

$$\eta(t_0) = 0,\ \eta(t_f) = 0. \tag{2.12}$$

Donc, la variation de J par rapport $y^*(t)+\xi\eta(t)$ est nulle

$$\frac{d}{d\xi}J\big(y^*(t)+\xi\eta(t)\big)|_{\xi=0}=0,$$

ce qui donne :

$$\int_{t_0}^{t_f}\Big(\frac{\partial L}{\partial y}\eta+\frac{\partial L}{\partial y'}\eta'\Big)\,dt=0. \tag{2.13}$$

En faisant une intégration par parties dans le deuxième terme de (2.13) et tenant compte de (2.12), on a l'équation suivante, qui vérifiée pour tout η de classe $C^2([t_0,t_f])$:

$$\int_{t_0}^{t_f}\left[\Big(\frac{\partial L}{\partial y}\Big)^*-\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial y'}\Big)^*\right]\eta\,dt=0.$$

D'après le lemme (2.1), on a :

$$\Big(\frac{\partial L}{\partial y}\Big)^*-\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial y'}\Big)^*=0.$$

L'équation du multiplicateur de Lagrange est :

$$\Big(\frac{\partial L}{\partial \lambda}\Big)^*-\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \lambda'}\Big)^*=0. \tag{2.14}$$

Remarquons d'après (2.11) que le Lagrangien L est indépendant de $\lambda'(t)$ et que l'équation d'Euler-Lagrange (2.14) pour l'état adjoint $\lambda(t)$ n'est rien d'autre que la relation de contrainte (2.10).

Exemple 2.1

Soit la fonctionnelle J définit par :

$$J(y)=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}y^2(t)\,dt;$$

avec la contrainte :

$$\int_0^{2\pi}y(t)dt=\mu,$$

et les conditions aux limites $y(0)=y_0$ et $y(2\pi)=y_f$.

On veut déterminer la fonction $y(t)$ qui rend extrémal la fonctionnelle J.

Solution

D'après (2.11), on a :

$$L\big(y(t), y'(t), \lambda, t\big) = \frac{1}{2}y^2(t) + \lambda\big[y(t) - \mu\big].$$

Équation d'Euler-Lagrange est :

$$y(t) + \lambda = 0;$$

c'est à dire :

$$y(t) = -\lambda.$$

Pour utiliser la condition $\int_0^{2\pi} y(t)dt = \mu$, on doit intégrer $y(t) = -\lambda$, et on obtient :

$$\lambda = \frac{-\mu}{2\pi}.$$

Alors la solution est :

$$y(t) = \frac{\mu}{2\pi}.$$

2.3 Problème de calcul des variation avec une extrémité libre : Condition de transversalité

Dans la section (2.2), nous avons étudié le cas où toutes les courbes considérées reliant deux points fixes. Parfois, on souhaite maximiser ou minimiser une fonctionnelle de type (2.1) pour toute courbe ayant un point final non spécifié. Généralement, le problème peut se réduire au calcul de minimum de la fonctionnelle sachant que toutes les courbes commencent en un point initial et finissent sur une courbe arbitraire $\phi(t, y) = 0$.

Considérons le problème suivant :

$$MinJ\big(y(t)\big) = \int_{t_0}^{t_f} F\big(y(t), y'(t), t\big)\, dt, \tag{2.15}$$

avec la condition initiale donnée par :

$$y(t_0) = y_0 \;\; et \;\; y(t_f) \; libre, \; t_f \; libre, \tag{2.16}$$

on suppose que $F\big(y(t), y'(t), t\big)$ est de classe C^2.

Le problème décrit par (2.15) − (2.16) est le même problème que celui déjà vu dans la section (2.2) (calcul des variations avec extrémités fixes). La difficulté est que le temps final t_f est libre et que $y(t_f)$ n'est pas imposé, i.e. libre. Donc la nouveauté spécifique associée à ce problème est l'imposition des conditions de transversalité.

Nous développons la solution du problème de calcul des variations avec une extrémité et t_f libres sons à travers les étapes suivantes :

Étape 1 : hypothèse d'extremum.

Étape 2 : accroissement de la fonctionnelle.

Étape 3 : première variation de la fonctionnelle.

Étape 4 : condition d'extremum.

Étape 5 : conditions de transversalité.

Nous donnons ci-dessous les détails de chaque étape :

Étape 1 :hypothèse d'extremum

Supposons que $y^*(t)$ est une courbe qui rend l'intégrale (2.15) minimale, et $y(t)$ une courbe suffisamment proche de $y^*(t)$ s'écrivant sous la forme :

$$y(t) = y^*(t) + \delta y(t),$$

D'où

$$\begin{aligned} J\big(y(t)\big) &= \int_{t_0}^{t_f+\delta t_f} F\big(y^*(t) + \delta y(t), y'^*(t) + \delta y'(t), t\big)\, dt \\ &= \int_{t_0}^{t_f} F\big(y^*(t) + \delta y(t), y'^*(t) + \delta y'(t), t\big)\, dt \\ &+ \int_{t_f}^{t_f+\delta t_f} F\big(y^*(t) + \delta y(t), y'^*(t) + \delta y'(t), t\big)\, dt, \end{aligned}$$

en utilisant le théorème (3) (théorème de la moyenne) puis le développement de Taylor de F autour de $y^*(t)$, $y'^*(t)$, en retenant simplement les termes linéaires trouvés et en négligeant les termes d'ordre supérieurs ou égal à 2, on a :

$$\int_{t_0}^{t_f+\delta t_f} F\big(y^*(t) + \delta y(t), y'^*(t) + \delta y(t), t\big)\, dt \approx F\,|_{t_f}\, \delta t_f.$$

Étape 2 : Accroissement de la fonctionnelle

Soit :

$$\Delta J\big(y^*(t), \delta y(t)\big) = J\big(y^*(t) + \delta y(t)\big) - J\big(y^*(t)\big)$$

$$= \int_{t_0}^{t_f} \Big[F\big(y^*(t) + \delta y(t), y'^*(t) + \delta y'(t), t\big)$$

$$- F\big(y^*(t), y'^*(t), t\big)\Big] \, dt + F|_{t_f} \, \delta t_f.$$

Étape 3 : Première variation de la fonctionnelle

L'utilisation du theorème (2) pour $F\big(y^*(t)+\delta y(t), y'^*(t)+\delta y'(t), t\big)$ donne :

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left[\Big(\frac{\partial F}{\partial y}\Big)^* \delta y(t) + \Big(\frac{\partial F}{\partial y'}\Big)^* \delta y'(t) \right] dt + F|_{t_f} \delta t_f.$$

Une intégration par partie du deuxième terme de l'intégrale donne :

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left[\Big(\frac{\partial F}{\partial y}\Big)^* - \Big(\frac{\partial F}{\partial y'}\Big)^* \right] \delta y(t) \right\} dt + F|_{t_f} \delta t_f + \left[\Big(\frac{\partial F}{\partial y'}\Big)^* \delta y(t) \right] \Bigg|_{t_f}.$$

Étape 4 : Condition d'extremum

Une condition nécessaire pour que J ait un minimum est que $\delta J = 0 \, \forall \, \delta y(t), \ \forall \, \delta t_f$.

D'après le théorème (2.4), on a :

$$\delta J = 0. \tag{2.17}$$

D'où, l'équation d'Euler- Lagrange

$$\Big(\frac{\partial F}{\partial y}\Big)^* - \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial F}{\partial y'}\Big)^* = 0.$$

La conditon (2.17) donne :

$$F|_{t_f} \delta t_f + \left[\Big(\frac{\partial F}{\partial y'}\Big)^* \delta y(t) \right] \Bigg|_{t_f} = 0. \tag{2.18}$$

Étape 5 : Conditions de transversalité

Notons que la tangente de $y'^*(t) + \delta y'(t)$ au point t_f est approchée par :

$$y'^*(t_f) + \delta y'(t_f) \approx \frac{\big(\delta y_f - \delta y(t_f)\big)}{\delta t_f}. \tag{2.19}$$

Tenant compte du terme linéaire dans la relation (2.19), on a :

$$\delta y(t_f) \approx \delta y_f - y'^*(t_f)\delta t_f. \tag{2.20}$$

Substituant (2.20) dans l'équation (2.18), nous obtenons la condition de transversalité :

$$\left[F - y'\Big(\frac{\partial F}{\partial y'}\Big)\right]^*\Bigg|_{t_f} \delta t_f + \Big(\frac{\partial F}{\partial y'}\Big)^*\Big|_{t_f} \delta y_f = 0. \tag{2.21}$$

Nous obtenons différents cas selon que l'on considère t_f et/ou $y(t_f)$ libres ou fixes.

Type (a) : t_f fixe et $y(t_f)$ fixe : puisque t_f et $y(t_f)$ sont fixes, δt_f et δy_f sont nuls dans la condition de transversalité (2.21) ; donc il n'y a aucune condition supplémentaire à part celles imposées par le problème.

Type (b) : t_f libre et $y(t_f)$ fixe : puisque t_f est libre, alors δt_f est arbitraire et $y(t_f)$ est fixe. On spécifie que δy_f est nul. Donc le coefficient de δt_f dans la condition (2.21) est nul aboutissant à la condition de transversalité :

$$\left[F - y'\Big(\frac{\partial F}{\partial y'}\Big)\right]^*_{t_f} = 0. \tag{2.22}$$

Type(c) : t_f fixe et $y(t_f)$ libre : comme t_f est donné et $y(t_f)$ est libre donc, δt_f est nul et δy_f est arbitraire. Ceci signifie que le coefficient de δy_f dans la condition (2.21) est nul. c.à.d,

$$\Big(\frac{\partial F}{\partial y'}\Big)^*_{t_f} = 0. \tag{2.23}$$

Type(d) : t_f libre et $y(t_f)$ libre les coefficients de δt_f et de δy_f dans la condition (2.21) sont nuls.

$$\left[F - y'\Big(\frac{\partial F}{\partial y'}\Big)\right]^*_{tf} = 0,$$

$$\Big(\frac{\partial F}{\partial y'}\Big)^*_{t_f} = 0.$$

Exemple 2.2

Soit la fonctionnelle J définit par :

$$\int_0^{t_f} c_1[y'(t)]^2 + c_2 y(t)\, dt, \tag{2.24}$$

avec :

$$y(0) = 0, \;\; y(t_f) = b, \; telle\ que \;\; b\ constante\ et\ t_f\ libre. \tag{2.25}$$

D'aprés (2.5) l'équation d'Euler-Lagrange est :

$$c_2 - \frac{d}{dt} 2c_1 y'(t) = 0,$$

la solution de cette équation est :

$$y(t) = \frac{c_2}{4c_1} t^2 + k_1 t + k_2, \tag{2.26}$$

avec : $0 \leq t \leq t_f$, et k_1, k_2 sont constants. D'après (2.22), on trouve :

$$c_1[y'(t_f)]^2 = c_2 y(t_f). \tag{2.27}$$

On utilisant (2.25) pour déterminer k_2, on a :

$$y(0) = 0, \; alors\ k_2 = 0.$$

D'après (2.26) et (2.27) on trouve :

$$c_1(\frac{c_2}{2c_1} t_f + k_1)^2 = c_2(\frac{c_2}{4c_1} t_f^2 + k_1 t_f),$$

alors $k_1 = 0$. On substituons les deux valeurs $k_1 = 0$, $k_2 = 0$ dans (2.26) on trouve :

$$y(t) = \frac{c_2}{4c_1} t^2, \tag{2.28}$$

et comme $y(t_f) = b$, alors :

$$t_f = 2(b\frac{c_1}{c_2})^{\frac{1}{2}}.$$

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudiés les problèmes fondamentaux du calcul des variations avec et sans contrainte pour but minimiser ou de maximiser une fonctionnelle, la base et le point clef de ces problèmes est l'équation d'Euler-Lagrange qui donne les conditions nécessaire d'optimalité.

Chapitre 3

Contrôle optimal

Introduction

La théorie du contrôle optimal permet d'amener un système d'un état initial donné à un certain état final, tout en optimisant certains critères.

En mathématiques, la théorie du contrôle optimal s'inscrit dans la continuité du calcul des variations. Elle est apparue après la seconde guerre mondiale. Elle a vue une autre dimension dans les années 50 après l'aparétion du principe de minimum de pontriaguine. Cette théorie pépond à des besoins pratiques de contrôle, notamment dans le domaine de l'aéronautique et de la dynamique du vol [19].

Historiquement, la théorie du contrôle est liée d'une part au calcul des variations et d'autre part à la résolution des équation différentielles ordinaires. Le point clef de cette théorie est le principe du minimum de Pontriaguine, qui donne une condition nécessaire d'optimalité et permet ainsi de calculer les trajectoires optimales [16].

3.1 Problème de contrôle optimal

On peut décrire le problème de contrôle optimal de la manière suivante : on dispose d'un système dynamique (robot, une fusée, un four .....) dont l'évolution dans le temps est gouvernée par une loi physique (mécanique, transfert de matière ....) qui donne le lien entre variables d'état, décrites par un vecteur d'état $y(t)$ (vitesse, position) et des contrôles $u(t)$ (accélération, flux de matière, poussée), et a l'aide de contrôle, on désire faire en sorte que le système suit une trajectoire déterminée ou atteigne un état fixe ou minimise le long de la trajectoire un critère donné.

3.1.1 Différents types de problèmes de contrôle optimal

Par rapport au critère d'optimisation, généralement, on distingue trois types de problème de contrôle optimale :

PROBLEME DE LAGRANGE

Un problème de contrôle optimal est dit de Lagrange si le système dynamique est :

$$y'(t) = g\big(y(t), u(t), t\big), \tag{3.1}$$

où les contrôles $u(.)$ sont des fonctions définies de $[t_0, t_f]$ dans $\mathbb{R}$. Et la fonction coût $J : [t_0, t_f] \times \mathbb{R} \times U \to \mathbb{R}$, est à minimiser comme suit :

$$Min \int_{t_0}^{t_f} F\big(y(t), u(t), t\big)\, dt, \tag{3.2}$$

avec $y(t_0) = y_0$ est une condition initiale donné.

PROBLEME DE MAYER

Dans ce cas, le critère à optimiser est différent de celui de la section précédente. Il dépend uniquement de la valeur terminale de l'état contrôlé par le système.
On considère le système (3.1) et soit la fonction $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on définit le problème d'optimisation par :

$$\begin{cases} MinG\big(y(t_f), t_f\big); \\ y'(t) = g\big(y(t), u(t), t\big); \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \tag{3.3}$$

PROBLEME DE BOLZA

L'avantage du problème de Bolza est que, il regroupe les deux précédentes formulations (Lagrange et Mayer).

Soit le système dynamique (3.1), étant donné $F : [t_0, t_f] \times \mathbb{R} \times U \to \mathbb{R}$ et $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on définit, alors, le problème à minimiser comme suit :

$$Min\Big[\int_{t_0}^{t_f} F\big(y(t), u(t), t\big)\, dt + G\big(y(t_f), t_f\big)\Big], \tag{3.4}$$

où $y(t_0) = y_0$ est la condition initiale.

3.1.2 Problème Abstrait de contrôle optimal

Un problème de contrôle optimal comporte deux parties :
La première partie consiste à déterminer parmi les contrôles admissibles celles qui permettent d'avoir une trajectoire joignant le point initial à une cible.
La deuxième partie consiste à chercher, parmi toutes ces trajectoires possibles, celles qui réalisent le coût minimal. Ainsi, le problème de contrôle optimale consiste à déterminer, s'il existe, un contrôle u^* qui minimise, sur l'ensemble U des contrôles admissibles, un critère J de la forme :

$$J = G(y_f, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} F\big(y(t), u(t), t\big)\, dt; \tag{3.5}$$

tel que :

$$y'(t) = g\big(y(t), u(t), t\big), \qquad t \in [t_0, t_f],$$

et les conditions aux limites sont sous l'une des formes suivantes :

1. $y(t_0) = y_0$, $y(t_f)$ libre et t_f fixe.

2. $y(t_0) = y_0$, $y(t_f)$ libre et t_f libre.

3. $y(t_0) = y_0$, $y(t_f)$ fixe et t_f fixe.

4. $y(t_0) = y_0$, $y(t_f)$ fixe et t_f libre,

où $y(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in U$, $\forall t \in I$, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant $[t_0, t_f]$ et U est un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$.
G, F et g sont des fonctions vectorielles réelles suffisamment régulières par rapport à leurs arguments.

3.2 Contrôle optimal d'un système dynamique linéaire (sans contrainte sur l'état)

3.2.1 Position du problème

Le système général étudié dans cette partie est celui de Bolza. Soient n et m deux entiers naturels non nuls, I un intervalle de $\mathbb{R}$, et soient A, B et r trois applications localement intégrables sur I, à valeurs respectivement dans $M_n(\mathbb{R})$, $M_{n,m}(\mathbb{R})$, et $M_{n,1}(\mathbb{R})$. Soit U un sous-ensemble de $\mathbb{R}^m$, et soit $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Le système de contrôle linéaire auquel on s'intéresse est :

$$\begin{cases} \forall t \in I \quad y'(t) = A(t)y(t) + B(t)u(t) + r(t); \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \tag{3.6}$$

où l'ensemble des contrôles u considérés, est l'ensemble des applications mesurables et localement bornées sur I, à valeurs dans le sous-ensemble $U \subset \mathbb{R}^m$. Donc le problème de contrôle optimale s'écrit par :

$$\begin{cases} MinJ(u) = G\big(y(t_f), t_f\big) + \int_{t_0}^{t_f} F\big(y(t), u(t), t\big)\, dt; \\ y'(t) = Ay(t) + Bu(t) + r(t); \\ y(t_0) = y_0 \text{ et } y(t_f) = y_f, \end{cases} \tag{3.7}$$

où G, et F sont, au moins, de classe C^2 par rapport à leurs arguments.

3.2.2 Contrôlabilité des systèmes linéaires

Les théorèmes d'existence de solutions d'équations différentielles nous assurent que, pour tout contrôle u, le système (3.6) admet une unique solution $y(.) : I \to \mathbb{R}^n$, absolument continue. Soit $M(.) : I \to M_n(\mathbb{R})$ la résolvante du système linéaire homogène $y'(t) = A(t)y(t)$, définie par $M'(t) = A(t)M(t)$, $M(t_0 = 0) = Id$. Notons que si $A(t) = A$ est constante sur I, alors $M(t) = e^{tA}$. Alors, la solution $y(.)$ du système (3.6) associée au contrôle u est donnée par :

$$y(t_f) = M(t_f)y_0 + \int_0^{t_f} M(t_f)M(s)^{-1}\big(B(s)u(s) + r(s)\big)\, ds,$$

pour tout $t_f \in I$.

Définition 3.1 *(L'ensemble accessible)*

Considérons le système contrôlé (3.6) *:*

$$\begin{cases} \forall t \in I \quad y'(t) = A(t)y(t) + B(t)u(t) + r(t); \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

L'ensemble des points accessibles à partir de y_0 en un temps $t_f > 0$ est défini par :

$$Acc(y_0, t_f) = \{y_u(t_f)/u \in L^\infty([0, t_f], U)\},$$

où $y_u(.)$ est la solution du système (3.6) *associée au contrôle u. Autrement dit, $Acc(y_0, t_f)$ est l'ensemble des extrémités des solutions de* (3.6) *au temps t_f.*

Définition 3.2 *(La contrôlabilité)*

Le système contrôlé $y'(t) = A(t)y(t)+B(t)u(t)+r(t)$ est dit contrôlable en temps t_f si $Acc(y_0, t_f) = \mathbb{R}^n$, i.e. pour tous $y_0, y_1 \in \mathbb{R}^n$, il existe un contrôle u tel que la trajectoire associée relie y_0 à y_1 en temps t_f.

Contrôlabilité des systèmes linéaires autonomes (Cas sans contrainte sur le contrôle)

Lemme 3.1 [21]*La matrice C est de rang n si et seulement si l'application linéaire*

$$\Phi : L^\infty([0, t_f], \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}^n$$

$$u \mapsto \int_0^{t_f} e^{(t_f - t)A} Bu(t)\, dt$$

est surjective.

Preuve du lemme

Supposons, tout d'abord, que rang $C < n$, et montrons que Φ n'est pas surjective. L'application C étant non surjective, il existe un vecteur $\psi \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, que l'on supposera être un vecteur ligne, tel que $\psi C = 0$. Par conséquent,

$$\psi B = \psi AB = ... = \psi A^{n-1} B = 0.$$

Or d'après le théorème d'Hamilton-Cayley, il existe des réels $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$ tels que :

$$A^n = a_0 I + ... + a_{n-1} A^{n-1}.$$

On en déduit par récurrence immédiate que, pour tout entier k,

$$\psi A^k B = 0,$$

et donc, pour tout $t \in [0, t_f]$,

$$\psi e^{tA} B = 0.$$

Par conséquent, pour tout contrôle u, on a :

$$\psi \int_0^{t_f} e^{(t_f - t)A} Bu(t)\, dt = 0.$$

i.e. $\psi\Phi(u) = 0$, ce qui montre que Φ n'est pas surjective.

Réciproquement, si Φ n'est pas surjective, alors il existe un vecteur ligne $\psi \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ tel que pour tout contrôle u on ait :

$$\psi \int_0^{t_f} e^{(t_f - t)A} Bu(t)\, dt = 0.$$

Ceci implique que, pour tout $t \in [0, t_f]$,

$$\psi e^{(t_f - t)A} B = 0.$$

En $t = t_f$ on obtient $\psi B = 0$. Ensuite, en dérivant par rapport à t , puis en prenant $t = t_f$, on obtient $\psi AB = 0$. Ainsi, par dérivations successives, on obtient finalement :

$$\psi B = \psi AB = ... = \psi A^{n-1} B = 0.$$

Donc $\psi C = 0$, et donc rg $C < n$. Ce lemme permet maintenant de montrer facilement le théorème suivante.
Le théorème suivant nous donne une condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité dans le cas où A et B ne dépendent pas de t.

Théorème 3.1 [19] *On suppose que $U = \mathbb{R}^m$ (pas de contrainte sur le contrôle). Le système $y'(t) = Ay(t) + Bu(t) + r(t)$ est contrôlable en temps t_f (quelconque) si et seulement si la matrice $C = (B\ AB\ ...\ A^{n-1}B)$ est de rang n.*

La matrice C est appelée matrice de Kalman, et la condition rang $C = n$ est appelée condition de Kalman.

Preuve du théorème 1

Si la matrice C est de rang n, alors d'après le lemme l'application Φ est surjective, i.e. $\Phi(L^\infty) = \mathbb{R}^n$. Or, pour tout contrôle u, l'extrémité au temps t_f de la trajectoire associée à u est donnée par :

$$y(t) = e^{t_f A} y_0 + \int_0^{t_f} e^{(t_f - t)A} \big(Bu(t) + r(t)\big)\, dt;$$

de sorte que l'ensemble accessible en temps t_f depuis un point $y_0 \in \mathbb{R}^n$ est :

$$Acc(y_0, t_f) = e^{t_f A} y_0 + \int_0^{t_f} e^{(t_f - t)A} r(t)\, dt + \Phi(L^\infty) = \mathbb{R}^n;$$

ce qui montre que le système est contrôlable.

Réciproquement si le système est contrôlable, alors il est en particulier contrôlable depuis y_0 défini par :

$$y_0 = -e^{-t_f A} \int_0^{t_f} e^{(t_f - t)A} r(t)\, dt.$$

Or en ce point l'ensemble accessible en temps t_f s'écrit :

$$Acc(y_0, t_f) = \Phi(L^\infty).$$

Le système étant contrôlable, alors cette ensemble est égal à $\mathbb{R}^n$. Cela preuve que Φ est surjective, donc, d'après le lemme, la matrice C est de rang n.

Remarque 3.1 *La condition de Kalman ne dépend ni de t_f ni de y_0. Autrement dit, si un système linéaire autonome est contrôlable en temps t_f depuis y_0, alors il est contrôlable en tout temps depuis tout point.*

Contrôlabilité des systèmes linéaires autonomes (Cas avec contrainte sur le contrôle)

Dans le théorème (3.1), on n'a pas mis de contrainte sur le contrôle. Cependant en adaptant la preuve on obtient aisément le résultat suivant.

Corollaire 3.1 *Sous la condition de Kalman précédente, si $r = 0$ et si $0 \in int(U)$, alors l'ensemble accessible $Acc(y_0, t)$ en temps t contient un voisinage du point $e^(tA) y_0$.*

Théorème 3.2 [19] *Soit* $b \in \mathbb{R}^n$ *et* $U \subset \mathbb{R}$ *un intervalle contenant* 0 *dans son intérieur. Considérons le système* $y'(t) = Ay(t) + bu(t)$, *avec* $u(t) \in U$. *Alors tout point de* $\mathbb{R}^n$ *peut être conduit à l'origine en temps fini si et seulement si la paire* (A, b) *vérifie la condition de Kalman et la partie réelle de chaque valeur propre de* A *est inférieure ou égale à* 0.

Contrôlabilité des systèmes linéaires instationnaires

Les deux théorèmes suivants donnent une condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité dans le cas instationnaire.

Théorème 3.3 [19] *Le système* $y't) = A(t)y(t) + B(t)u(t) + r(t)$ *est contrôlable en temps* t_f *si et seulement si la matrice :*

$$C(t_f) = \int_0^{t_f} M(t)^{-1}B(t)B(t)^T(M(t)^{-1})^T\,dt,$$

dite matrice de contrôlabilité, est inversible.

Remarque 3.2 *Cette condition dépend de* t_f, *mais ne dépend pas du point initial* y_0. *Autrement dit, si un système linéaire instationnaire est contrôlable en temps* t_f *depuis* y_0, *alors il est contrôlable en temps* t_f *depuis tout point.*

Remarque 3.3 *On a* $C(t_f) = C(t_f)^T$, *et* $y^T C(t_f) y \geq 0$ *pour tout* $y \in \mathbb{R}^n$, *i.e.* $C(t_f)$ *est une matrice carrée réelle symétrique positive.*

preuve du théorème 3

Pour toute solution $y(t)$, on a, d'après la formule de variation de la constante, on a :

$$y(t_f) = y' + M(t_f)\int_0^{t_f} M(t)^{-1}B(t)u(t)\,dt,$$

où

$$y' = M(t)y_0 + M(t_f)\int_0^{t_f} M(t)^{-1}r(t)\,dt.$$

Si $C(t_f)$ est inversible, posons $u(t) = B(t)^T M(t)^{-l^T}\psi$, avec $\psi \in \mathbb{R}^n$. Alors

$$y(t_f) = y' + M(t_f)C(t_f)\psi,$$

et il suffit de prendre $\psi = C(t_f)^{-1}M(t_f)^{-1}(y_1 - y')$.

Réciproquement, si $C(t_f)$ n'est pas inversible, alors il existe $\psi \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ tel que $\psi^T C(t_f)\psi = 0$. On en déduit que :

$$\int_0^{t_f} \|B(t)^T M(t)^{-1^T} \psi\|^2 \, dt = 0,$$

d'où ,$\psi^T M(t)^{-1}B(t) = 0$ p.p. sur $[0, t_f]$. Ainsi, pour tout contrôle u, on a :

$$\psi^T \int_0^{t_f} M(t)^{-1}B(t)u(t) \, dt = 0.$$

Posons $\psi_1 = M(t_f)^{-1^T}\psi$; on a, pour tout contrôle u.

$$\psi^T(y_u(t_f) - y') = 0,$$

i.e. $y_u(t_f) \in y' + \psi^T$, et donc le système n'est pas contrôlable.

Remarque 3.4 *Si le système est autonome, on a $M(t) = e^{tA}$, et donc :*

$$C(t_f) = \int_0^{t_f} e^{-sA}BB^T e^{-sA^T} \, ds.$$

Dans ce cas, $C(t_0)$ est inversible si et seulement si $C(t_f)$ est inversible, et en particulier la condition de contrôlabilité ne dépend pas de t_f (ce qui est faux dans le cas instationnaire).

Théorème 3.4 [19] *Considérons le système :*

$$y'(t) = A(t)y(t) + B(t)u(t) + r(t),$$

où les applications A, B, r sont de classe C^∞ sur $[0, t_f]$ définissons par récurrence

$$B_0(t) = B(t), \; B_{i+1}(t) = A(t)B_i(t) - \frac{dB_i(t)}{dt}.$$

- S'il existe $t \in [0, t_f]$ tel que :

$$Vect\{B_i(t)v / v \in \mathbb{R}^n, \; i \in N\} = \mathbb{R}^n,$$

alors le système est contrôlable en temps t_f.

- Si de plus les applications A, B, r sont analytiques sur $[0, t_f]$, alors le système est contrôlable en temps t_f si et seulement si :

$$\forall t \in [0, t_f] \quad Vect\{B_i(t)v / v \in \mathbb{R}^n, \; i \in N\} = \mathbb{R}^n.$$

Exemple 3.1

Soit le système linéaire autonome suivant :

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_2(t) + u; \\ y_2'(t) = -y_2(t) + u. \end{cases}$$

Ce système s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$Y' = Ay + Bu + r,$$

on pose :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \; et \; r = 0.$$

Alors la matrice de contrôlabilité du système est :

$$\begin{aligned} C &= (B \; AB) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La matrice C est de rang 2, d'après le théorème(3.1), le système est contrôlable.

3.2.3 Principe du minimum de Pontriaguine

Le principe du minimum de Pontriaguine (PMP), énoncé par Pontriaguine dans une publication Russ 1958 et en Anglais 1962 sous le titre "The Mathematical theory", généralise les équations d'Euler-Lagrange du calcul des variations [18].

Définition 3.3 *(Contrôle admissible)*

On appelle contrôle admissible toute fonction continue par morceaux $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t_f$, à valeur dans U.

Remarque 3.5 *On ne peut pas piloter le système considéré entre l'instant initial t_0 et un instant final t_f qu'avec un contrôle suffisamment régulière.*

Définition 3.4 *(Fonction Hamiltonien)*

L'Hamiltonien est une fonction de la forme :
$H = H\big(y(t), u(t), \lambda(t), t\big) = F\big(y(t), u(t), t\big) + \lambda^T(t)[Ay(t) + Bu(t) + r(t)].$

Théorème 3.5 [18]*Principe du minimum faible (cas sans contrainte sur le contrôle)*

Si le contrôle u^* associée au système linéaire de contrôle

$$y'(t) = Ay(t) + Bu(t) + r(t)$$

est optimale pour le critère :

$$J(u) = G\big(y(t_f), t_f\big) + \int_{t_0}^{t_f} F\big(y(t), u(t), t\big)\, dt,$$

alors il existe une application $\lambda(.)$ absolument continue sur $[t_0, t_f]$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, appelée vecteur adjoint, et les équations suivantes sont vérifiées pour presque tout $t \in [t_0, t_f]$:

$$y'^*(t) = \frac{\partial H\big(y(t), u^*(t), \lambda^*(t), t\big)}{\partial \lambda};$$

$$\lambda'^*(t) = -\frac{\partial H\big(y^*(t), u^*(t), \lambda(t), t\big)}{\partial y};$$

$$\frac{\partial H\big(y(t), u^*(t), \lambda(t), t\big)}{\partial u} = 0.$$

Théorème 3.6 [18]*Principe du minimum fort (cas de contrôle avec contrainte)*

Si le contrôle u^* associée au système linéaire de contrôle

$$y'(t) = Ay(t) + Bu(t) + r(t)$$

est optimale pour le critère :

$$J(u) = G\big(y(t_f), t_f\big) + \int_{t_0}^{t_f} F\big(y(t), u, t\big)\, dt,$$

alors il existe une application $\lambda(.)$ absolument continue sur $[t_0, t_f]$ tel que :

$$y'^*(t) = \frac{\partial H\big(y(t), u^*(t), \lambda^*(t), t\big)}{\partial \lambda};$$

$$\lambda'^*(t) = -\frac{\partial H\big(y^*(t), u^*(t), \lambda(t), t\big)}{\partial y}.$$

3.2.4 Résolution du problème de contrôle optimal

Nous développons la solution du problème de contrôle optimal donné ci-dessus, à travers les étapes suivantes :

1 : Construire l'Hamiltonien.
2 : Obtenir l'équations d'état et l'équation adjoint.
3 : Obtenir la condition nécessaire d'optimalité par rapport à u.
4 : Donner les conditions de transversalité.

Description des différentes étapes de la résolution du problème

Étape 1 : Hamiltonien

Nous construisons l'Hamiltonien H pour le problème décrit par le système $y'(t) = Ay(t) + Bu(t) + r(t)$ et le critère :

$$J(u) = G\big(y(t_f), t_f\big) + \int_{t_0}^{t_f} F\big(y(t), u(t), t\big)\, dt.$$

En posant :

$$H\big(y(t), u(t), \lambda(t), t\big) = F\big(y(t), u(t), t\big) + \lambda(t)^T[Ay(t) + Bu(t) + r(t)],$$

où $\lambda(t)$ est l'état adjoint.

Étape 2 : Équation d'état et équation adjoint

Soient $y^*(t)$, $u^*(t)$ et $\lambda^*(t)$ les valeurs optimales, alors L'équation d'état et l'équation adjoint sont données respectivement par :

$$y'^*(t) = \Big(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\Big)^* = Ay^*(t) + Bu^*(t) + r^*(t), \tag{3.8}$$

avec la condition initiale $y^*(t_0) = y(t_0)$, et

$$\lambda'^*(t) = -\Big(\frac{\partial H}{\partial y}\Big)^* = -\Big(\frac{\partial F}{\partial y} + \lambda^T \frac{\partial[Ay(t) + Bu(t) + r(t)]}{\partial y}\Big)^*. \tag{3.9}$$

Étape 3 : Condition d'optimalité

La condition d'optimalité est donnée par :

$$\Big(\frac{\partial H}{\partial u}\Big)^* = \Big(\frac{\partial F}{\partial u} + \lambda^T \frac{\partial[Ay(t) + Bu(t) + r(t)]}{\partial u}\Big)^* = 0. \tag{3.10}$$

Étape 4 : Condition de transversalité

La condition de transversalité est donné par la formul suivante :

$$\Big[H^* + \Big(\frac{\partial G}{\partial t}\Big)\Big]_{t_f} \delta t_f + \Big[\Big(\frac{\partial G}{\partial y}\Big)^* - \lambda^*(t)\Big]_{t_f} \delta y_f = 0. \tag{3.11}$$

La relation (3.11) donne la condition supplémentaire qui sert à résoudre l'ensemble des équations (3.8) et (3.9).

Différents cas de transversalité

Type (1) : Si t_f et $y(t_f)$ sont fixes alors, δt_f et δy_f sont nuls dans la condition de transversalité (3.11) ; il n'y aucune condition supplémentaire à part celles imposées par la formulation du problème.

Type (2) : t_f le temps final libre et $y(t_f)$ est fixe, alors δt_f est arbitraire et comme $y(t_f)$ est fixe, δy_f est nul. Le coefficient de δt_f dans la condition de transversalité (3.11) est nul, et on aura :

$$\Big(H^* + \frac{\partial G}{\partial t}\Big)_{t_f} = 0. \tag{3.12}$$

Type (3) : t_f est fixe et $y(t_f)$ est libre. Donc δt_f est nul et δy_f est arbitraire. Ceci signifie que le coefficient de δy_f dans la condition de transversalité (3.11) est nul. Ce qui nous donne la relation suivante :

$$\left(\Big(\frac{\partial G}{\partial y}\Big)^* - \lambda^*(t)\right)_{t_f} = 0. \tag{3.13}$$

Type (4) : t_f et $y(t_f)$ sont libres, ne sont pas reliés, δt_f et δy_f ne le sont pas, alors on a d'après la condition (3.11) le résultat suivant :

$$\Big(H^* + \frac{\partial G}{\partial t}\Big)_{t_f} = 0; \tag{3.14}$$

$$\left(\Big(\frac{\partial G}{\partial y}\Big)^* - \lambda^*(t)\right)_{t_f} = 0. \tag{3.15}$$

Exemple 3.2

Soit l'exemple de contrôle de la température dans une chambre suivant : On désire chauffer une chambre en utilisant le moins d'énergie possible. Si $\theta(t)$

est la température dans la chambre, θ_a la température ambiante extérieure de l'air (constante) et $u(t)$ est le taux d'alimentation en chaleur de la chambre, alors :

$$\theta' = -a(\theta - \theta_a) + bu,$$

où a, b sont des constantes dépendant de l'isolation de la chambre. Pour simplifier le problème, nous supposerons que $y = \theta - \theta_a$ et la température initiale de la chambre est égale à $\theta_a = 60^{\circ}$, alors $y(t_0) = 0^{\circ}$, et la température finale $\theta(t_f)$ libre.
Soit le problème de contrôle optimal suivant :

$$\begin{cases} J(y,u) = \frac{1}{2}s\big(y(t_f) - 10\big)^2 + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} u^2\,dt; \\ y' = -ay + bu; \\ y(t_0) = 0^{\circ}, y(t_f) \ libre \ et \ t_f \ fixe, \end{cases}$$

où s est un nombre réel. Alors, l'Hamiltonien H est :

$$H(y,u,t) = \frac{1}{2}u^2 + \lambda(-ay + bu).$$

D'après (3.8), (3.9) et (3.10) les conditions nécessaires d'optimalité sont :

$$\begin{cases} y' = -ay + bu; \\ \lambda' = a\lambda; \\ u + \lambda b = 0; \\ y(t_0) = 0^{\circ}, y(t_f) \ libre \ et \ t_f \ fixe. \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} y' = -ay - b^2\lambda; \\ \lambda' = a\lambda; \\ y(t_0) = 0^{\circ}, y(t_f) \ libre \ et \ t_f \ fixe. \end{cases}$$

La résolution du équation adjointe donne :

$$\lambda(t) = \lambda(t_f)e^{at};$$

$$y(t) = y(t_0)e^{-at} - \frac{b^2\lambda(t_f)e^{at}}{2a} + \alpha e^{-at},$$

où α est une constante.
Comme $y(0) = 0^{\circ}$, ceci implique que $\alpha = \frac{b^2\lambda(t_f)}{2a}$. De ce fait, la solution devient :

$$y(t) = y(t_0)e^{-at} - \frac{b^2\lambda(t_f)}{2a}(e^{at} - e^{-at}).$$

Comme l'état final est libre, donc, $\delta y(t_f) \neq 0$, $\delta t_f = 0$ la condition de transversalité (3.11) se réduit au type (3) ce qui donne :

$$\lambda(t_f) = s\big(y(t_f) - 10\big).$$

Substituant $y(t_f) = y(0)e^{-at_f} - \frac{b^2\lambda(t_f)}{2a}(e^{at_f} - e^{-at_f})$ dans l'équation précédente nous obtenons :

$$\lambda(t_f) = \frac{-20as}{2a + sb^2\big(e^{at_f} - e^{-at_f}\big)}.$$

Substituant cette équation dans $\lambda(t) = \lambda(t_f)e^{at}$, on obtient l'état adjoint :

$$\lambda(t) = \frac{-20ase^{at}}{2a + sb^2\big(e^{at_f} - e^{-at_f}\big)}.$$

Finalement le contrôle optimal est :

$$u^*(t) = \frac{20asbe^{at}}{2a + sb^2\big(e^{at_f} - e^{-at_f}\big)}.$$

Ainsi, la trajectoire optimale est donnée par :

$$y(t) = \frac{10sb^2(e^{at} - e^{-at})}{2a + sb^2\big(e^{at_f} - e^{-at_f}\big)}.$$

3.2.5 Problème en temps minimum

Ici nous allons voir comment appliquer le PMP pour résoudre un problème de contrôle en temps minimum. Une particularité de ces problèmes est que le contrôle optimal se trouve nécessairement sur le bord du sous ensemble des contrôles admissibles et saute d'une frontière à l'autre (elle n'est donc même pas continue).

Définition 3.5 *Un contrôle Bang-Bang est un contrôle qui possède au moins un commutation.*

Définition 3.6 *une matrice singulièree est une matrice n'admet pas d'inverse.*

Position du problème

Le problème consiste à trouver le contrôle optimale $u^*(t) \in \mathbb{R}^n$ qui satisfait la contrainte :

$$|u_j| \leq 1;\ t \in [t_0, t_f],\ 1 \leq j \leq n, \tag{3.16}$$

et qui transfert le système :

$$y'(t) = Ay(t) + Bu(t) + r(t), \tag{3.17}$$

$y \in \mathbb{R}^n$, A matrice $n \times n$ constante, $r \in \mathbb{R}^n$ et $B \in \mathbb{R}^n$ vecteur constant d'un état initial $y(t_0) = y_0$ en un autre état final $y(t_f) = y_f$ en temps minimum, et la fonctionnelle à minimiser et sous la forme suivante :

$$J\big(u(t)\big) = \int_{t_0}^{t_f} F\big(y(t), u(t), t\big)\, dt = \int_{t_0}^{t_f} 1\, dt = t_f - t_0, \tag{3.18}$$

où t_0 est fixe, t_f est libre.
Remarquons que si t_f est fixe, la quantité $t_f - t_0$ est une constante donc la minimisation n'a aucun sens.

Nous développons la solution de ce système de contrôle en temps minimum à travers la description succincte des étapes suivantes :

Étape 1 : Hamiltonien.
Étape 2 : Equation d'état et équation adjointe.
Étape 3 : Condition d'optimalité.
Étape 4 : Contrôle optimale.
Étape 5 : Condition pour que le système de contrôle en temps optimal soit normal.
Étape 6 : Loi de contrôle bang-bang.
Étape 7 : Unicité du contrôle optimale.
Étape 8 : Nombre de commutations.

Description détaillée

Étape 1 : Hamiltonien

Nous formons l'Hamiltonien H pour le problème décrit par le système (3.17) et le critère (3.18) par :

$$H\big(y(t), u(t), \lambda(t)\big) = 1 + \lambda^T \big[Ay(t) + Bu(t) + r(t)\big],$$

où $\lambda \in \mathbb{R}^n$ est l'état adjoint.

Étape 2 : Equation d'état et équation adjointe

Soient $u^*(t)$, $y^*(t)$ et $\lambda^*(t)$ les solutions optimales alors, l'état $y^*(t)$ et l'état adjoint $\lambda^*(t)$ sont donnés par les relations suivantes :

$$y'^*(t) = \Big(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\Big)^* = Ay^*(t) + Bu^*(t) + r^*(t). \tag{3.19}$$

$$\lambda'^*(t) = -\Big(\frac{\partial H}{\partial y}\Big)^* = -A^T\lambda^*(t), \tag{3.20}$$

avec les conditions aux limites

$$y^*(t_0) = y_0; y^*(t_f) = y_f.$$

Étape 3 : Condition d'optimalité

Faisant appel au Principe de Minimum de Pontriaguine et le critère (3.18) pour le contrôle optimal en fonction du Hamiltonien :

$$\begin{aligned} H\big(y^*(t), u^*(t), \lambda^*(t)\big) &= 1 + \big[Ay^*(t)\big]^T\lambda^*(t) + \big(u^*(t)\big)^T B^T\lambda^*(t) + \big(r^*(t)\big)^T\lambda^*(t); \\ &\leq 1 + \big[Ay^*(t)\big]^T\lambda^*(t) + \big(u(t)\big)^T B^T\lambda^*(t) + \big(r^*(t)\big)^T\lambda^*(t); \end{aligned}$$

ou encore sous forme plus compacte :

$$\begin{aligned} \big[u^*(t)\big]^T B^T\lambda^*(t) &\leq \big[u(t)\big]^T B^T\lambda^*(t); \\ \big[u^*(t)\big]^T q^*(t) &\leq \big[u(t)\big]^T q^*(t); \\ &= \min_{|u(t)|\leq 1}\{\big[(u(t)\big]^T q^*(t)\}, \end{aligned} \tag{3.21}$$

où $q^*(t) = B^T\lambda^*(t)$.

Étape 4 : Contrôle optimal

Nous obtenons le contrôle optimal $u^*(t)$ à partir de (3.21).

- Si $q^*(t)$ est positive, le contrôle $u(t)$ doit être la plus petite valeur du contrôle admissible ($u(t) = -1$) donc :

$$\min_{|u(t)|\leq 1}\{\big[u^*(t)\big]^T q^*(t)\} = -q^*(t) = -|q^*(t)|. \tag{3.22}$$

- Si $q^*(t)$ est négative, le contrôle $u(t)$ doit être la plus grande valeur du contrôle admissible, c'est à dire $u(t) = +1$ alors :

$$\min_{|u(t)|\leq 1}\{\big[u^*(t)\big]^T q^*(t)\} = +q^*(t) = -|q^*(t)|. \tag{3.23}$$

Ainsi, de (3.22) et (3.23), le contrôle optimal $u^*(t)$ est :

$$u^*(t) = \begin{cases} +1 & si \quad q^*(t) < 0; \\ -1 & si \quad q^*(t) > 0; \\ -1 \; ou \; 1 & si \quad q^*(t) = 0. \end{cases} \tag{3.24}$$

De ce fait, nous pouvons écrire le contrôle (3.24) sous la forme :

$$u^*(t) = -Signe\{q^*(t)\}, \tag{3.25}$$

où la fonction de signe est donnée par :

$$Singe\big(q^*(t)\big) = \begin{cases} +1 & si \quad q^*(t) > 0; \\ -1 & si \quad q^*(t) < 0; \\ -1 \; ou \; 1 & si \quad q^*(t) = 0. \end{cases}$$

Étape 5 : Condition pour que le système de contrôle en temps minimum soit normal :

Nous déterminons les conditions nécessaires pour que le système ne soit pas singulier. De ce fait, nous obtenons les conditions pour que le système soit normal. Ainsi, la solution de l'équation adjointe (3.20) est :

$$\lambda^*(t) = \exp\big(-A^T t\big) \times \lambda^*(t_0). \tag{3.26}$$

On suppose que la condition initiale $\lambda^*(t_0)$ est un vecteur non nul. Tenant compte de la solution (3.26), la loi de contrôle (3.25) devient :

$$u^*(t) = -Signe\{B^T \exp\big(-A^T t\big) \times \lambda^*(t_0)\}.$$

Par composantes, elle s'écrit :

$$u_j{}^*(t) = -Signe\{b_j{}^T \exp\big(-A^T t\big) \times \lambda^*(t_0)\}, 1 \leq j \leq n.$$

Supposons qu'il existe un intervalle de temps $[t_1, t_2]$ où la fonction $q^*(t)$ est nulle.

Alors, nécessairement toutes ses dérivés sont nulles dans cet intervalle.

En effet :

$$\begin{aligned} &q_j{}^*(t) = b_j{}^T \exp\big(-A^T t\big) \times \lambda^*(t_0) = 0; \\ &q_j'{}^*(t) = -b_j{}^T A^T \exp\big(-A^T t\big) \times \lambda^*(t_0) = 0; \\ &. \\ &. \\ &. \\ &. \\ &. \end{aligned}$$

$$q_j^{(n-1)^*}(t) = {b_j}^T A^{n-1} \exp\big(- A^T t\big) \times \lambda^*(t_0) = 0.$$

Sous forme compacte, elle est donnée par :

$$G_j{}^T \exp\big(- A^T t\big) \times \lambda^*(t_0) = 0, \tag{3.27}$$

où

$$G_j = [b_j \quad Ab_j \quad A^2 b_j \quad ..... \quad A^{n-1} b_j].$$

Dans la condition (3.27), la matrice $[\exp(-A^T t)]$ est non singulière et $\lambda^*(t_0) \neq 0$, alors, la matrice G_j est singulière. Ainsi, pour le système de contrôle en temps minimum singulier, la matrice G_j doit être singulière. Par conséquent pour le système de contrôle en temps minimum normal, la matrice G_j doit être non singulière.

Étape 6 : : Loi de contrôle Bang-Bang

Pour un système de contrôle en temps minimum normal, le contrôle optimal est donné par :

$$u^*(t) = -Signe\{q^*(t)\} = -Signe\{B^T \lambda^*(t)\}, \tag{3.28}$$

pour $t \in [t_0, t_f]$.

Étape 7 : Unicité du contrôle optimale

Si le système de contrôle en temps minimum est normal, alors le contrôle en temps minimum est unique.

Étape 8 : Nombre de commutations

Le résultat est énoncé sous forme de théorème suivante :

Théorème 3.7 [8] *Si le système original* (3.17) *est normal, et si toutes les valeurs propres du système sont réelles alors le contrôle optimale* $u^*(t)$ *peut sauter au plus* $(n-1)$ *fois de* $(+1)$ *à* (-1) *ou de* (-1) *à* $(+1)$.

Exemple 3.3

Soit le problème en temps minimum suivant :

$$\begin{cases} minJ(u) = \int_0^{t_f} \, dt = t_f - 0; \\ {y_1}'(t) = -y_1 + u; \\ {y_2}'(t) = u; \\ |u| \leq 1; \\ y_1(0) = a, y_2(0) = b; \\ y_1(t_f) = y_2(t_f) = 0. \end{cases}$$

Nous construisons la solution du problème à travers les étapes suivantes :

Étape 1 : Hamiltonien

L'Hamiltonien H pour ce problème est :

$$H\big(y(t), \lambda(t), u(t)\big) = 1 + \lambda_1(-y_1 + u) + \lambda_2 u. \tag{3.29}$$

Étape 2 : Minimisation du Hamiltonien

D'après le principe du Minimum de Pontriaguine, on a :

$$\begin{aligned} H\big(y^*(t), \lambda^*(t), u^*(t)\big) &\leq H\big(y^*(t), \lambda^*(t), u(t)\big) \\ &= \min_{|u|\leq 1} H\big(y^*(t), \lambda^*(t), u(t)\big). \end{aligned} \tag{3.30}$$

En substituant (3.29) dans la condition (3.30), nous avons alors :

$$1 + \lambda_1^*(-y_1^* + u^*) + \lambda_2^* u^* \leq 1 + \lambda_1^*(-y_1^* + u^*) + \lambda_2^* u,$$

plus précieusement :

$$\begin{aligned} (\lambda_1^* + \lambda_2^*)u^* &\leq (\lambda_1^* + \lambda_2^*)u \\ &= \min_{|u|\leq 1} (\lambda_1^* + \lambda_2^*)u. \end{aligned} \tag{3.31}$$

D'après le résultat précédent, le contrôle optimal (3.25) est donné de la fonction Signe suivante :

$$u^*(t) = -Signe\{(\lambda_1^* + \lambda_2^*)\}.$$

Étape 3 :L'équations d'états et équations adjointes

$$\begin{cases} {y_1}'^*(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda_1^*}; \\ {y_2}'^*(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda_2^*}. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} {y_1}'^*(t) = -y_1(t) + u; \\ {y_2}'^*(t) = u. \end{cases} \tag{3.32}$$

La résolution du système différentiel (3.32) donne :

$$\begin{cases} {y_1}^*(t) = \alpha e^{-t} + u^*; \\ {y_2}^*(t) = u^* t + \beta, \end{cases} \tag{3.33}$$

telles que α, β sont des constantes.

$$\begin{cases} {\lambda_1}'^*(t) = -\frac{\partial H}{\partial y_1^*}; \\ {\lambda_2}'^*(t) = -\frac{\partial H}{\partial y_2^*}. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} {\lambda_1}'^*(t) = \lambda_1(t); \\ {\lambda_2}'^*(t) = 0. \end{cases} \tag{3.34}$$

Ce système est un système d'équations différentielles ordinaire d'ordre 1. D'où la solution est donnée par :

$$\begin{cases} \lambda_1^*(t) = c_1 e^t; \\ \lambda_2^*(t) = c_2, \end{cases} \tag{3.35}$$

où c_1, c_2 sont des constantes.

Étape 4 : Contrôle en temps minimum

D'après la formule précedente $u^*(t) = -Signe\{(\lambda_1^* + \lambda_2^*)\}$, nous constatons que la solution de l'équation $\lambda_1^*(t) + \lambda_2^*(t)$ est une courbe, et qu'il y a quatre solutions possibles comme le montre la figure (3.1). Le contrôle optimal possède au plus un saut. Donc, le contrôle optimal doit avoir une des quatre formes suivante :

$$u^*(t) = \begin{cases} -1 & si\ t \in [0, t_f] \quad pas\ de\ saut; \\ +1 & si\ t \in [0, t_s] \ \ et\ \ -1 \quad si\ t \in]t_s, t_f]; \\ -1 & si\ t \in [0, t_s] \ \ et\ \ +1 \quad si\ t \in]t_s, t_f]; \\ +1 & si\ t \in [0, t_f] \quad pas\ de\ saut. \end{cases}$$

Ainsi les quatre séquences de commande possible sont :

$$\{-1\}, \{+1, -1\}, \{-1, +1\}, \{+1\}.$$

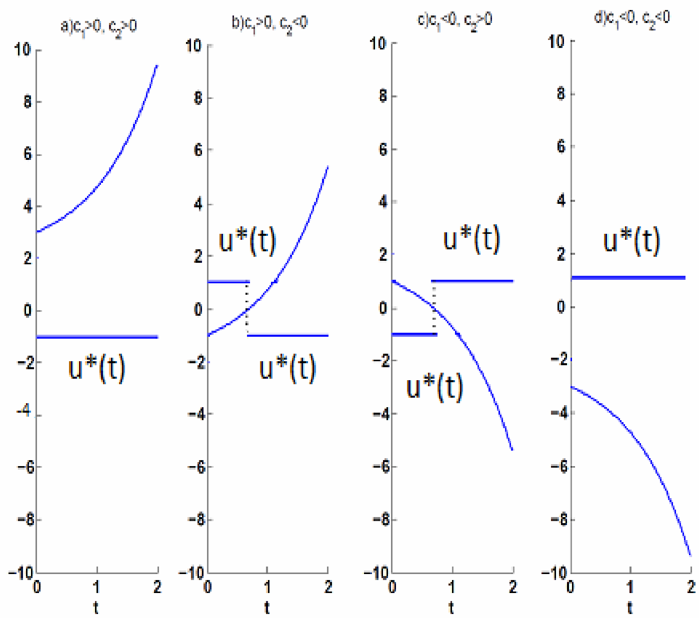

FIGURE 3.1 – Les équations adjointes et les contrôles correspondantes

Étape 5 : Trajectoires optimales

D'après le système (3.33), et comme $y_1^*(0) = a$, $y_2^*(0) = b$, ceci implique que $\alpha = a - u^*$, $\beta = b$. De ce fait, la solution devient :

$$\begin{cases} y_1{}^*(t) = (a - u^*)e^{-t} + u^*; \\ y_2{}^*(t) = u^*t + b, \end{cases} \tag{3.36}$$

où, $u^*(t) = \pm 1$. Afin de représenter les équations d'état dans le plan de phase, nous éliminons le temps t de (3.36). D'où

$$t = \frac{y_2^*(t) - b}{u^*}. \tag{3.37}$$

Substituons (3.37), dans l'équation $n^\circ 1$ du système (3.36) on obtient :

$$y_1{}^*(t) = (a - u^*) \times \exp\left(\frac{-y_2{}^*(t) + b}{u^*}\right) + u^*, \tag{3.38}$$

où, nous utilisons $u^* = \pm 1$,
si :

$$u^* = +1, \begin{cases} t = y_2{}^*(t) - b; \\ y_1{}^*(t) = (a-1)e^{-y_2^*(t)+b} + 1. \end{cases} \tag{3.39}$$

Maintenant si :

$$u^* = -1, \begin{cases} t = -{y_2}^*(t) + b; \\ {y_1}^*(t) = (a+1)e^{y_2^*(t)-b} - 1. \end{cases} \tag{3.40}$$

Ainsi, on constate que les relations (3.39) et (3.40) représentent une famille des courbes dans le plan de phase (y_1, y_2) comme le montre la figure (3.2).

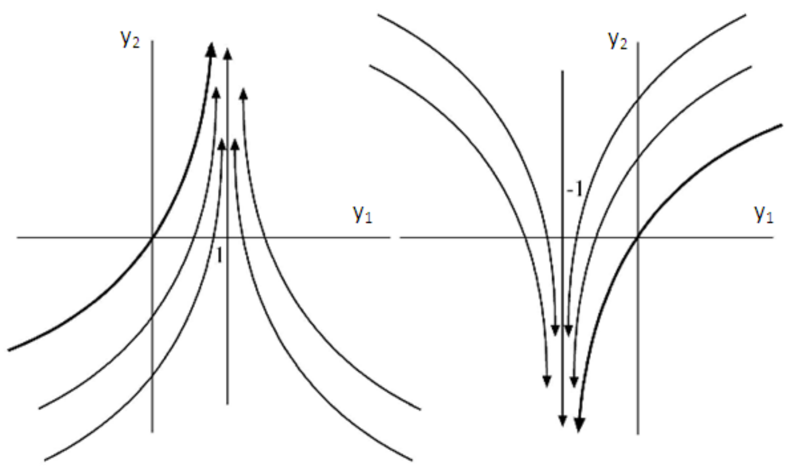

FIGURE 3.2 – Trajectoires de phase planes pour $u^* = +1$ et $u^* = -1$

Étape 6 : La courbe de commutation

D'après la figure (3.3), il y a deux courbes A_+ et A_- qui transfèrent n'importe quel état initial (y_1, y_2) en origine $(0, 0)$.

1. la courbe A_+ est l'allure de tous les points (y_1, y_2) qui peuvent être transférés au point origine $(0, 0)$ par le contrôle $u = +1$

$$A_+ = \{(y_1, y_2) : \; y_1 = 1 - e^{-y_2}, y_2 \leq 0\}.$$

2. la courbe A_- est l'allure de tout les points (y_1, y_2) qui peuvent être transférés au point origine (0.0) par le contrôle $u = -1$

$$A_- = \{(y_1, y_2) : \; y_1 = e^{y_2} - 1, y_2 \geq 0\}.$$

La courbe de commutation complète, A est définie par :

$$A = A_- \cup A_+.$$

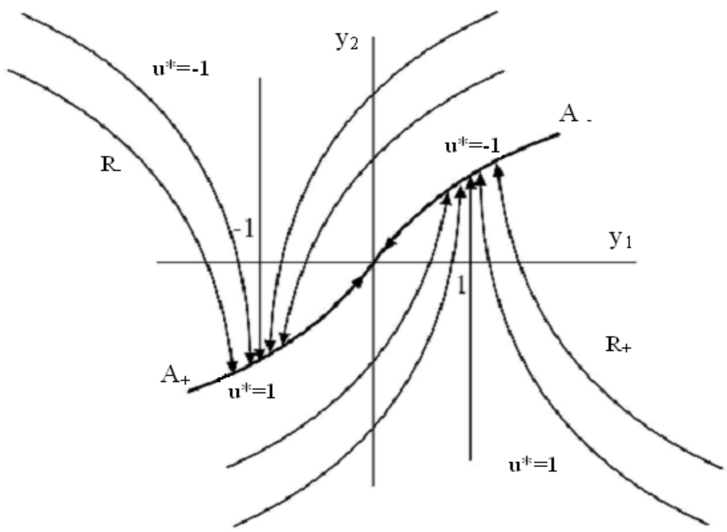

FIGURE 3.3 – La courbe de commutation pour le contrôle en temps minimum

Étape 7 : Régions dans le plan de phase

Définissons les régions dans les quelles nous devons appliquer le contrôle $u^* = +1$ ou $u^* = -1$.

1. Soit R_+ la région des points au dessous de la courbe de commutation A.
2. Soit R_- la région des points au dessus de la courbe de commutation A.

Étape 8 : La loi de contrôle

Le contrôle en temps minimum u^* comme une fonction de l'état (y_1, y_2) sera donnée par :

$$\begin{cases} u^* = +1 & pour \quad (y_1, y_2) \in A_+ \cup R_+; \\ u^* = -1 & pour \quad (y_1, y_2) \in A_- \cup R_-. \end{cases}$$

3.3 Méthode de tir simple pour la résolution du problème de contrôle optimal

Le principe général de la méthode de tir simple, est transformé le problème de contrôle optimal d'origine en la résolution d'une équation non linéaire.

La méthode de tir simple est une méthode indirectes, qui consiste a transformer le problème de contrôle optimal en un problème de la recherche de zéro d'un fonction de tir associée, cette méthode est basée sur le principe du minimum de pontriaguine [19].

3.3.1 Problème aux deux bouts

On considère un problème général de contrôle optimal, sous la forme de Bolza :

$$\begin{cases} MinJ(y,u) = G\big(y(t_f),t_f\big) + \int_{t_0}^{t_f} F\big(y(t),u(t),t\big)\,dt; \\ y'(t) = Ay(t) + Bu(t) + r(t); \\ y(t_0) = y_0; \\ y(t_f) = y_f. \end{cases} \tag{3.41}$$

Le principe du minimum donne une condition nécessaire d'optimalité et affirme que toute trajectoire optimale est la projection d'une extrémale. En écrivant les conditions initiales et finales sous la forme de deux fonctions, alors on obtient le problème suivant :

$$\begin{cases} MinJ(y,u) = G\big(y(t_f),t_f\big) + \int_{t_0}^{t_f} F\big(y(t),u(t),t\big)\,dt; \\ y'(t) = Ay(t) + Bu(t) + r(t); \\ g_0\big(t_0, y(t_0)\big) = 0; \\ g_f\big(t_f, y(t_f)\big) = 0, \end{cases} \tag{3.42}$$

telle que $g_0\big(t_0, y(t_0)\big) = 0 \in \mathbb{R}^{n_0}$ et $g_f\big(t_f, y(t_f)\big) = 0 \in \mathbb{R}^{n_1}$. La condition nécessaire d'optimalité (PMP) nous conduit à un système différentiel à $2n$ équations avec $n_0 + n_1$ conditions initiales et terminales, alors résoudre (3.41) équivaut à résoudre le problème aux deux bouts suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + Bu(t) + r(t); \\ \lambda'(t) = -\frac{\partial F}{\partial y}\big(y(t),u(t),t\big) - \lambda^T \frac{\partial[Ay(t)+Bu(t)+r(t)]}{\partial y}; \\ u(t) = h\big(\lambda(t)\big); \\ g_0\big(y(t_0)\big) = 0; \\ g_f\big(y(t_f)\big) = 0, \end{cases} \tag{3.43}$$

où $u(t) = h\big(\lambda(t)\big)$ est donné par la minimisation de l'Hamiltonien.

Problème à valeur initiale

Nous allons maintenant définir la méthode de tir pour résoudre ce problème aux deux bouts. Posons $z(t)$ le couple état, état adjoint

$$z(t) = \big(y(t), \lambda(t)\big) = \big(z_1(t), z_2(t)\big),$$

et en posant aussi $z(., z_0)$ la solution du problème à valeur initiale (problème de Cauchy) suivant :

$$\begin{cases} z'(t) = Ez(t) + Du(t) + k(t); \\ z(t_0) = z_0. \end{cases} \tag{3.44}$$

où $E \in M_{2n}(\mathbb{R})$, $D \in M_{2n,m}(\mathbb{R})$, et $k \in M_{2n,1}(\mathbb{R})$.

On introduit maintenant une application S appelée fonction de tir, qui à la valeur initiale z_0, telle que $z_0 = \big(y(t_0), \lambda(t_0)\big) = (y_0, \beta)$, les conditions initiales g_0 du problème (3.42) fixent déjà une partie de $z(t_0)$, et l'inconnue de la fonction de tir est donc réduite à la partie "manquante", que l'on note β. Une situation fréquente est celle où les conditions initiales déterminent l'état initial $y(t_0)$, β étant alors finalement la valeur de l'état adjoint initial $\lambda(t_0)$. La valeur de la fonction de tir est alors donnée par les conditions en t_f pour la solution $z(t, z_0)$ de (3.44), donc la fonction de tir définie par :

$$\begin{aligned} S : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ \beta &\mapsto S(\beta) = \begin{pmatrix} R_1\big(z_1(t_f, z_0)\big) \\ R_2\big(z_2(t_f, z_0)\big) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

où $R_1\big(z_1(t_f, z_0)\big) \in \mathbb{R}^n$, $R_1\big(z_1(t_f, z_0)\big) \in \mathbb{R}^n$.

Trouver un zéro de la fonction de tir S est alors équivalent à la résolution de problème (3.43), et donne ainsi une solution de (3.41).i.e. il s'agit de déterminer un zéro de la fonction S. Ceci peut se résoudre par la méthode de Newton.

Méthodes de Newton

Il s'agit de résoudre numériquement $S(\beta) = 0$, où $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une fonction de classe C^1. L'idée de base est la suivante : Si β_k est proche d'un zéro β de S, alors :

$$S(\beta) = S(\beta_k) + dS(\beta_k).(\beta - \beta_k) + o(\beta - \beta_k) = 0.$$

On est alors amené à considérer la suite définie par récurrence suivant :

$$\beta_{k+1} = \beta_k - \big(dS(\beta_k)\big)^{-1}.S(\beta_k).$$

Un point initial $\beta_0 \in \mathbb{R}^n$ étant choisi, et on espère que β_k converge vers le zéro β. Ceci suppose donc le calcul de l'inverse de la matrice jacobienne de

S, ce qui doit être évité numériquement. Il s'agit alors, à chaque étape, de résoudre l'équation :

$$S(\beta_k) + dS(\beta_k).d_k = 0,$$

où d_k est appelé direction de descente, et on pose $\beta_{k+1} = \beta_k.d_k = 0$.

Sous des hypothèses générales, l'algorithme de Newton converge, et la convergence est quadratique. Il existe de nombreuses variantes de la méthode Newton : méthode de descente, de quasi-Newton, de Newton quadratique, de Broyden, ect....

Cette méthode permet, en général, une détermination très précise d'un zéro. Son inconvénient principal est la petitesse du domaine de convergence. Pour faire converger la méthode, il faut que le point initial β_0 soit suffisamment proche de la solution recherchée β. Ceci suppose donc que pour déterminer le zéro β de S il faut avoir au préalable une idée approximative de la solution β.

Du point de vue du contrôle optimal, cela signifie que, pour appliquer une méthode de tir, il faut avoir une idée a priori de la trajectoire optimale recherchée. Ceci peut sembler paradoxal, mais il existe des moyens de se donner une approximation, même grossière, de cette trajectoire optimale. Il s'agit là en tout cas d'une caractéristique majeure des méthodes de tir : elles sont très précises mais requièrent une connaissance a priori (plus ou moins grossière) de la trajectoire optimale recherchée [16].

Exemple 3.4

On considère le problème de contrôle optimal suivant :

$$\begin{cases} MinJ(u) = \int_0^{t_f} dt; \\ y_1'(t) = y_2(t); \\ y_2'(t) = 2y_2(t) + u(t); \\ |u| \leq 1; \\ y_1(0) = 0,\ y_1(t_f) = 1; \\ y_2(0) = 0,\ y_2(t_f) = 0. \end{cases} \tag{3.45}$$

Soit le système contrôlé suivant :

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_2(t); \\ y_2'(t) = 2y_2(t) + u(t) \end{cases} \tag{3.46}$$

On pose :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} etr = 0.$$

le système (3.46) est contrôlable car, la matrice :

$$C = (B\ AB)$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

est de rang 2.
La fonction Hamiltonienne de ce problème s'écrit :

$$H\big(x(t), u(t), \lambda(t)\big) = 1 + \lambda_1(t)y_2(t) + \lambda_2(t)(2y_2(t) + u(t)),$$

par ailleurs la condition du minimum(du principe du minimum) :

$$minH = 1 + \lambda_1(t)y_2(t) + \lambda_2(t)\big(2y_2(t)\big) + min\{\lambda_2(t)u(t)\},$$

nous donnons :

$$u(t) = -Signe(\lambda_2(t)).$$

Nous avons le problème aux deux bouts suivant :

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_2(t); \\ y_2'(t) = 2y_2(t) + u(t); \\ \lambda_1'(t) = 0; \\ \lambda_2'(t) = -\lambda_1(t) - 2\lambda_2(t); \\ y_1(0) = 0, y_2(0) = 0; \\ y_1(t_f) = 1, y_2(t_f) = 0. \end{cases} \tag{3.47}$$

En posons $z(t) = \big(y_1(t), y_2(t), \lambda_1(t), \lambda_2(t)\big) = \big(z_1(t), z_2(t), z_3(t), z_4(t)\big)$.
Résoudre le problème (3.47) est alors équivalent à rechercher un zéro de l'équation $S(\beta) = 0$ où la fonction S est la fonction de tir associée à notre problème est définie par :

$$S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$\beta \mapsto S(\beta) = z(t, 0, \beta)$$

avec $z(t, 0, \beta)$ est la solution du système suivant :

$$\begin{cases} z_1'(t) = z_2(t); \\ z_2'(t) = 2z_2(t) + u(t); \\ z_3'(t) = 0; \\ z_4'(t) = -z_3(t) - 2z_4(t); \\ z_1(0) = 0, z_2(0) = 0; \\ z_3(0) = \beta_1, z_4(0) = \beta_2. \end{cases}$$

où $(\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^2$.
Soit $z(t, 0, 0, \beta_1, \beta_2)$ une solution du système au temps t avec les conditions initiales $(0, 0, \beta_1, \beta_2)$.
Dans cet exemple on a le temps final (t_f) est libre,on doit avoir :

$$z(t_f, 0, 0, \beta_1, \beta_2) = \begin{pmatrix} z_1(t_f, 0, 0, \beta_1, \beta_2) \\ z_2(t_f, 0, 0, \beta_1, \beta_2) \\ z_3(t_f, 0, 0, \beta_1, \beta_2) \\ z_4(t_f, 0, 0, \beta_1, \beta_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

On définit la fonction de tir suivante :

$$S(\beta) = \begin{pmatrix} z_1(t_f, 0, 0, \beta_1, \beta_2) - 1 \\ z_2(t_f, 0, 0, \beta_1, \beta_2) - 0 \\ z_3(t_f, 0, 0, \beta_1, \beta_2) - c_1 \\ z_4(t_f, 0, 0, \beta_1, \beta_2) - c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t_f}/4 - ut_f/2 - 5/4 \\ e^{2t_f}/2 - u/2 \\ \beta_1 - c_1 \\ (\beta_2 + \beta_1/2)e^{-2t_f} - \beta_1/2 - c_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On a :

$$\begin{cases} e^{2t_f}/4 - ut_f/2 - 5/4 = 0; \\ e^{2t_f}/2 - u/2 = 0, \end{cases}$$

ceci implique que :

$$t_f = \frac{-5}{2u} + \frac{1}{2},$$

si $u = -1$ alors, $t_f = 3$, et on a :

$$\begin{cases} \beta_1 - c_1 = 0; \\ (\beta_2 + \beta_1/2)e^{-2t_f} - \beta_1/2 - c_2 = 0, \end{cases}$$

ceci implique que :

$$\beta_1 = c_1, et\ \beta_2 = -c_1 - c_2.$$

D'après le système :

$$\begin{cases} z_3(t) = a; \\ z_4(t) = \frac{1}{2}e^{-2t+2b} - \frac{a}{2}, \end{cases}$$

et comme $z_3(t_f) = c_1$, et $z_4(t_f) = c_2$, alors on a le résulta suivant :

$$c_1 = a,\ c_2 = \frac{1}{2}e^{2b-6} - \frac{a}{2}.$$

Finalement on obtient :

$$\beta_1 = a,\ \beta_2 = -\frac{a}{2} - \frac{1}{2}e^{2b-6}.$$

Exemple 3.5

Soit à minimiser le problème de contrôle suivant :

$$\begin{cases} MinJ(u) = \int_0^1 u^2(t)\,dt; \\ y_1'(t) = y_2(t); \\ y_2'(t) = u(t); \\ y_1(0) = 1, y_1(1) = 0; \\ y_2(0) = 1, y_2(1) = 0. \end{cases}$$

Comme le système :

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_2(t); \\ y_2'(t) = u(t), \end{cases} \tag{3.48}$$

est linéaire, alors il s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$Y' = Ay + Bu + r,$$

où :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} et\ r = 0.$$

Alors la matrice de contrôlabilité du système est :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

cette matrice est de rang 2, alors le système (3.48) est contrôlable.
L'Hamiltonien est donné par :

$$H\big(y(t), u(t), \lambda(t)\big) = u^2(t) + \lambda_1(t)y_2(t) + \lambda_2(t)u(t).$$

D'après le principe du minimum de pontriaguine, on a :

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_2(t); \\ y_2'(t) = u(t); \\ \lambda_1'(t) = 0; \\ \lambda_2'(t) = -\lambda_1(t); \\ u(t) = -\frac{1}{2}\lambda_2(t); \\ y_1(0) = 1, y_1(1) = 0; \\ y_2(0) = 1, y_2(1) = 0. \end{cases}$$

Nous avons le problème aux deux bouts suivant :

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_2(t); \\ y_2'(t) = u(t); \\ \lambda_1'(t) = 0; \\ \lambda_2'(t) = -\lambda_1(t); \\ y_1(0) = 1, y_1(1) = 0; \\ y_2(0) = 1, y_2(1) = 0. \end{cases} \tag{3.49}$$

En posons $z(t) = \big(y_1(t), y_2(t), \lambda_1(t), \lambda_2(t)\big) = \big(z_1(t), z_2(t), z_3(t), z_4(t)\big)$.
Résoudre le problème (3.49) est alors équivalent à rechercher un zéro de l'équation $S(\beta) = 0$ où la fonction S est la fonction de tir associée à notre problème, est définie par :

$$S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$\beta \mapsto S(\beta) = z(t, 1, \beta)$$

avec $z(t, 1, \beta)$ la solution du système suivant :

$$\begin{cases} z_1'(t) = z_2(t); \\ z_2'(t) = u(t); \\ z_3'(t) = 0; \\ z_4'(t) = -z_3(t); \\ z_1(0) = 1, z_2(0) = 1; \\ z_3(0) = \beta_1, z_4(0) = \beta_2. \end{cases}$$

où $(\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^2$.
Soit $z(t, 1, 1, \beta_1, \beta_2)$ une solution du système au temps t avec les conditions initiales $(1, 1, \beta_1, \beta_2)$.

$$z(1,1,1,\beta_1,\beta_2) = \begin{pmatrix} z_1(1,1,1,\beta_1,\beta_2) \\ z_2(1,1,1,\beta_1,\beta_2) \\ z_3(1,1,1,\beta_1,\beta_2) \\ z_4(1,1,1,\beta_1,\beta_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

On définit la fonction de tir suivante :

$$S(\beta) = \begin{pmatrix} z_1(1,1,1,\beta_1,\beta_2) - 0 \\ z_2(1,1,1,\beta_1,\beta_2) - 0 \\ z_3(1,1,1,\beta_1,\beta_2) - c_1 \\ z_4(1,1,1,\beta_1,\beta_2) - c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1/12 - \beta_2/4 + 2 \\ \beta_1/4 - \beta_2/2 + 1 \\ \beta_1 - c_1 \\ -\beta_1 + \beta_2 - c_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On a :

$$\begin{cases} \beta_1/12 - \beta_2/4 + 2 = 0; \\ \beta_1/4 - \beta_2/2 + 1 = 0, \end{cases}$$

ceci implique que $\beta_1 = 36$, $\beta_2 = 20$.

conclusion

Avant résoudre un problème de contrôle optimal, nous avons étudié la contrôlabilité du système dynamique. La résolution du problème de contrôle optimal consiste à utiliser le principe du minimum de pontriaguine, qui est une condition nécessaire d'optimalité. La méthode de tir simple consiste à transformer le problème de contrôle optimal en un problème de la recherche du zéro de la fonction de tir associé, cette méthode permet de résoudre le problème de contrôle optimale d'une manière rapide.

Conclusion Générale

Ce mémoire a pour but la résolution de deux problème d'optimisation d'un système dynamique linéaire : Problème de calcul des variations, et problème de contrôle optimal. Aprés les rappelles sur les systèmes dynamiques nous nous sommes intéréssés dans le deuxième chapitre à traités la théorie du calcul des variations, à savoir, les équations que doient satisfaire les courbes extrémales d'un problème variationnel (équation d'Euler-Lagrange). Dans le troisième chapitre nous avons étudié la théorie de contrôle optimal, dont nous avons exposés certains éléments de base de cette théorie.

L'étude du problème de calcul des variations, qui consiste à piloter un point initiale à un point final d'un système régie par d'équations différentielle linéaire. Cependant l'étude du problème de contrôle optimal consiste la même chose que le problème de calcul des variations, mais sa résolution consiste à trouver un contrôle, qui permet d'avoir une trajectoire joigne le point initiale à une cible tout en optimisant un critère.

Table des figures

Bibliographie

[1] D. Azé, G. Constans et J. B. Hiriart-Urruty, Calcul différentiel et équations différentielles : exercices et problèmes corrigés, Dunod, Paris, 2002.

[2] M. Bergounioux, Optimisation et controle des systèmes linéaires, Dunod, Paris, 2001.

[3] G. J. Blisse et M. D. Intriligator, Dynamic optimisation : The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management, North-Holland, 1991.

[4] H. Cartan, Forme différentielles, Elément de calcul des variations, Application de la méthode du repère mobile à la théorie des courbes et des surfaces, Hermann, Paris, 1967.

[5] J. M. Clérin, Problème de contrôle optimal du type bilinéaire gouvernés par des équations aux dérivées partielles dévolution, Thèse pour obtenire le titre de docteur de l'université d'Avignon, 2009.

[6] O. Cots, Controle optimal Géométrique : méthodes homotopiques et application, thèse pour obtenir le titre de docteur de l'université de Bourgogne, université de Bourgogne-Dijon, 2012.

[7] J. C. Culioli, Introduction à l'optimisation, ellipses, France, 1994.

[8] G. Khenniche. Théorie et application du calcul des variations en commande optimale, Mémoire de Magister, SKIKDA, 2007.

[9] G. Leitmann, The calculs of variations optimal control, plenum press, 1981.

[10] K. Louadj, Résolution de problèmes paramétrés de contrôle optimal, Mémoire de Doctorat, TIZI OUZOU, 2012.

[11] B. Malgrange, Équation différentielles à coefficient polynomiaux, Birkhäuser. Boston. Basel. Berlin, 1991.

[12] P. Martinon, Résolution numérique de problèmes de contrôle optimal par une méthode homotopiques simpliciale, These presentée pour obtenire le titre de docteur de l'institus national polytechnique de TOULOUSE, 2005.

[13] M. A. Merakeb, Optimisation multicritères en contrôle optimal : Application au véhicule électrique, Mémoire de Doctorat, TIZI OUZOU, 2011.

[14] V. Morio, Contribution au développement d'une loi de guidage autonome par platitude application à une mission de rentrée atmosphérique, France, 2009.

[15] D. S. Naidu, Optimal control systems, CRC press, France, 2003.

[16] D. Ouidja, Principe du maximum et méthode de Tir, Mémoire de Magister, TIZI-OUIZOU, 2011.

[17] P. Pedregal, Introduction to optimization, Springer-verlag New York, Inc, 1963.

[18] L. S. Pontraguine, V. G. Boltyanskii, R. V. Gankrelidze, E. F. Mishchenko, THe mathematical theory of optimal processes, INTERSCIENCE PUBLISHERS, a division of JOHN WILEY et SONS, Inc. New Yorc. London, 1962.

[19] E. Trelat, Contrôle optimal : théorie et application, Vuibert, collection "Mathématique concrêtes ", Paris, 2005.

[20] M. Willem, Analyse convexe et optimisation, Claco s.c., 1987.

Résumé

L’objectif de ce mémoire est d’étudier les méthodes d’optimisation d’un système dynamique linéaire. Nous avons abordés, au premier lieu, la résolution d’un problème du calcul des variations, à savoir les équations que doivent satisfaire les courbes extrémales d’un problème variationnel. Au second lieu, nous avons étudié la théorie de contrôle optimal, qui ce base sur le Principe du Minimum de Pontriaguine. Finalement, nous avons étudie la méthode de tire, qui est une méthode numérique pour résoudre un problème de contrôle optimal.

Mots clef

Calcul des variations, équation d’Euler-Lagrange, contrôle optimal, contrôlabilité, Principe du Minimum de Pontriaguine, méthode de tire.

Abstract

The objective of this paper is to study the methods of optimization a linear dynamic system. At first, we study the solution of calculus of variations, namely the equations must satisfy the extremal solution of a variational problem. In the second place, we study the theory of optimal control, which it based on the Pontryagin Minimum Principle. Finally, we study the shooting method, which is a numerical method to solve optimal control problem.

Keywords

Calculus of variations, equation of Euler-Lagrange, optimal control, controllability, the Pontryagin Minimum Principle, shooting method.

ملخص

الهدف من هته الأطروحة هو دراسة مثالية النظام الديناميكي الخطي.

بدأنا أولا بدراسة مشكل حساب التغيرات والذي يعتمد في حله على الشروط الضرورية للمثالية والمتمثلة في معادلة " ايلر- لكرنج "؛ ثم انتقلنا ثانيا لدراسة نظرية المراقب المثالي التي أساسها المبدأ الاصغري " لبنطريقين " الذي يعطي الشروط الضرورية و هو بدوره تعميم لمعادلة " ايلر- لكرنج ".

في الأخير تطرقنا لحل مشكل المراقب المثالي بطريقة عددية و هي طريقة " تير".

الكلمات المفتاحية

حساب التغيرات، المراقب المثالي، قابلية المراقبة، المبدأ الاصغري " لبنطريقين "، نظام مراقب.