الجمهوريـة الجزائـريـة الديمقراطيـة الشعبيـة
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليـم العالـي والبحـث العلمـي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Nº Ref :……………

Centre Universitaire de Mila

Institut des sciences et de la technologie

Département de Mathématiques et Informatique

La solution d'une équation aux différences d'ordre deux

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques

Spécialité : *Mathématiques Fondamentales et Appliqués*

Préparé par

Bouchetiba Khadidja

Mehazem Somia

Soutenue le .. juin 2013 devant le jury composé de :

M. Abdelouahab Mohamed Salah	C.U. Mila	président
M. Kecies Mohamed	C.U. Mila	examinateur
M. Halim Yacine	C.U. Mila	rapporteur

Année universitaire : 2012/2013

REMERCIMENTS

Au terme de ce travail, nous commençons par remercier DIEU pour nous avoir donné la volonté et le courage pour terminer ce modeste travail.

Nous tenons à exprimer notre gratitude et notre sincère remerciement à tous ceux qui ont contribués, de prés ou de loin à l'élaboration de ce mémoire.

Nous remerciements très chaleureux sont adressé à Monsieur ***Yacine Halim*** *notre encadreur.*

Nous adressons également nos vifs remerciements à Monsieur ***Mohamed salah Abdelouahab*** *et Monsieur* ***Mohamed Kecies*** *les membres de jury qui ont bien voulu et accepter d'examiner ce modeste travail.*

Nous adressons également mes remerciements chaleureux aux membres de l'institut des sciences et de la technologie.

Nous remerciements sons également adressés à tous les enseignants qui ont contribué à notre formation.

Khadidja et Somia

DIDICACE

En guise de remerciement et en termes de gratitude, je dédie ce modeste travail,

Aux personnages les plus chers du monde et les plus chers à mon cœur, qui ont été si généreux, si patients, si noble avec moi pendant mes années d'étude.

A mon père ***Abdellah*** *source de force et de courage, qui n'a jamais cesse de donner de sa sympathie et son éducation.*

A l'exemple de ma vie ma mère ***Leila*** *qui toujour présent à mes coté, avec sa tendresse et son amour.*

A mes frères : ***Houssam Eddine et Oussama****.*

A mes sœurs : ***Roqiya et Roumaissa****.*

A mon grand-père et ma grand-mère.

A toutes mes tantes et tous mes oncles, a mes cousines et mes cousins et mes amies.

A mon binôme ***Khadidja*** *qui je la souhaite une vie plaine de joie et de prospérité.*

A tous qui occupe une place dans ma vie, dans mon cœur et sur tout aux étudiants de master deux mathématiques appliqués et fondamentales.

Somia

DIDICACE

En guise de remerciement et en termes de gratitude, je dédie ce modeste travail,

Aux personnages les plus chers du monde et les plus chers à mon cœur, qui ont été si généreux, si patients, si noble avec moi pendant mes années d'étude.

*A mon père **Nouar** source de force et de courage, qui n'a jamais cesse de donner de sa sympathie et son éducation.*

*A l'exemple de ma vie ma mère **Akila** qui toujour présent à mes coté, avec sa tendresse et son amour.*

*A mon oncle **Madjid**.*

*A mes frères : **Hamza,Louai**.*

*A mes sœurs : **Amina, Marwa, et Safa**.*

A toutes mes tantes et tous mes oncles, a mes cousines et mes cousins et mes amies.

*A mon binôme **Somia** qui je la souhaite une vie plaine de joie et de prospérité.*

A tous qui occupe une place dans ma vie, dans mon cœur et sur tout aux étudiants de master deux mathématiques appliqués et fondamentales.

Khadidja

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Les équations aux différences sont à la base de l'analyse appliquée depuis L.Euler, P.L.Tchebycheff et A.A.Markov. Actuellement, elles sont le support de nombreux algorithmes d'analyse numérique et omniprésentes en combinatoire.

Récemment, les équations aux différences ont commencé à recevoir beaucoup d'attention des scientifiques de diverses disciplines. Peut-être cela est largement dû à l'avènement des ordinateurs, où les équations différentielles sont résolues en utilisant leurs formulations approximatives équation aux différences. Avec l'utilisation d'un ordinateur, on peut facilement expérimenter avec des équations aux différences et on peut facilement découvrir que ces équations possèdent des propriétés fascinantes avec beaucoup de structure et de régularité. Bien sûr, toutes les observations et les prédictions informatiques doivent également être prouvé analytiquement. Donc c'est une zone fertile de la recherche, encore à ses balbutiements, avec des résultats profonds et importants.

Les équations aux différences apparaissent comme des phénomènes naturels descriptions évolution observée parce que la plupart des mesures de l'évolution des variables temporelles sont discrètes et, comme tels, ces équations sont dans leur propre droit important des modèles mathématiques. Plus important encore, les équations aux différences apparaissent également dans l'étude des méthodes de discrétisation des équations différentielles. Plusieurs résultats de la théorie des équations aux différences ont été obtenues comme plus ou moins naturel analogues discrets de résultats correspondant d'équations différentielles. Cela est particulièrement vrai dans le cas de la théorie de Lyapunov de la stabilité.

Des exemples de phénomène discret dans la nature abondent et pourtant sa version continue a réquisitionné toute notre attention peut-être due à ce mécanisme spécial dans la nature humaine qui nous permet de constater que ce que nous avons été conditionnés à. Bien les équations aux différences se manifestent comme des modèles mathématiques décrivant des situations de vie réelle dans la théorie des probabilités, les problèmes de files d'attente, des problèmes statistiques, séries temporelles stochastiques, analyse combinatoire, la théorie des nombres, géométrie, réseaux électriques, les quanta de rayonnement, de la génétique en biologie, économie, psychologie, sociologie, etc.

Ce mémoire est réparti sur l'introduction générale et trois chapitres.

Dans le premier chapitre, nous avons donnés des définitions et résultats généraux sur les équations aux différences linéaires.

Dans le deuxième chapitre, on s'intéresse aux équations aux différences non linéaires. Dans la première partie on présente l'essentiel des définitions et résultats généraux. Dans la dernière partie, on étudie le comportement global des solutions d'une équation aux différences rationnelle d'ordre deux.

Dans le dernier chapitre, on s'est intéressé de la détermination de la solution d'une équation aux différences d'ordre deux suivant :

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{x_{n-1}\left(x_n \pm 1\right)}, n = 0, 1, \cdots , .$$

CHAPITRE 1

EQUATIONS AUX DIFFÉRENCES LINÉAIRES

Dans ce chapitre, nous allons donner quelques définitions de base et des résultats généraux qui sont utilisés au long du travail. Dans lequel, nous intéressons aux équations aux différences linéaires homogènes et non-homogènes dans le cas des coéfficients constants. Finalement, nous étudions l'analyse de la stabilité des solutions avec joignez tous ci-dessus par des exemples. En prend dans tout la suite que $\mathbb{N}_{n_0}^{+}$ désigne l'ensemble des nombres $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite définie sur $\mathbb{N}_{n_0}^{+}$.

1.1 Définitions et résultats généraux

Définition 1.1.1 *Une équation de la forme*

$$y_{n+k} + p_1(n)y_{n+k-1} + \cdots + p_k(n)y_n = g_n \tag{1.1}$$

avec, $p_0(n) = 1, p_1(n), p_2(n), \ldots, g_n$*, sont des fonctions définies sur* $\mathbb{N}^+_{n_0}$*, s'appelle équation aux différences linéaires d'ordre k dés que* $p_k(n) \neq 0$*. Avec les conditions initiales*

$$y_{n_0} = c_1, y_{n_0+1} = c_2, \cdots, \ y_{n_0+k-1} = c_k \tag{1.2}$$

où les c_i*,* $i = 1, \cdots, k$ *sont des constantes réelles ou complexes.*

Exemple 1.1.1

1. *L'équation suivante est une équation aux différence linéaire d'ordre 3*

$$y_{n+3} - \frac{n}{n+1} y_{n+2} + n y_{n+1} - 3 y_n = n \tag{1.3}$$

avec les conditions initiales

$$y_1 = 0, \ y_2 = -1, \ y_3 = 1.$$

Les conditions précédentes permettent de trouver les valeurs de y_4*,* y_5 *et* y_6*. En effet, on écrit l'équation* (1.3) *sous la forme*

$$y_{n+3} = \frac{n}{n+1} y_{n+2} - n y_{n+1} + 3 y_n + n.$$

L'orsque $n = 1$*, on obtient*

$$y_4 = \frac{1}{2} y_3 - y_2 + 3 y_1 + 1 = \frac{5}{2}.$$

L'orsque $n = 2$*, on obtient*

$$y_5 = \frac{2}{3} y_4 - 2 y_3 + 3 y_2 + 2 = \frac{-4}{3}.$$

L'orsque $n = 3$*, on obtient*

$$y_6 = \frac{3}{4} y_5 - 3 y_4 + 3 y_3 + 3 = \frac{-5}{2}.$$

2. *L'équation*

$$y_{n+3} - \frac{n}{n+1} y_{n+2} + n y_{n+1} - 3y_n^2 = n$$

est une équation aux différence non linéaire.

Théorème 1.1.1 [9]*L'équation* (1.1) *avec les conditions initiales* (1.2) *admet une et une seul solution.*

Dans la suite on note par $y(n, n_0, c)$ la solution de l'équation (1.1) tel que

$$y(n_0 + j, n_0, c) = c_{j+1}, j = 0, 1, \cdots, k-1$$

avec

$$c = (c_1, c_2, \cdots, c_k) \in \mathbb{R}^k.$$

Définition 1.1.2 *L'équation* (1.1) *est dite homogène si* $g_n = 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}_{n_0}^+$.

Soit l'opérateur L définie par

$$\begin{array}{rccc} L: & \mathbb{N}_{n_0}^+ & \longrightarrow & \mathbb{N}_{n_0}^+ \\ & y_n & \longmapsto & Ly_n = \sum\limits_{i=0}^{k} p_i(n)\, y_{n+k-i}. \end{array}$$

L'équation (1.1) prend la forme

$$Ly_n = g_n \tag{1.4}$$

et l'équation homogène sera

$$Ly_n = 0. \tag{1.5}$$

Il est clair que L est linéaire sur $\mathbb{N}^+_{n_0}$.

Notons l'espace des solutions de l'équation (1.5) par S. En vertu de la linéarité de L on a le résultat suivant :

Lemme 1.1.1 *Toute combinaison linéaire des éléments de S reste dans S.*

i.e., Si $y_1(n), \cdots, y_k(n)$ sont des solutions de l'équation homogène (1.5)*, alors*

$$\begin{aligned} y(n) &= a_1 y_1(n) + \cdots + a_k y_k(n) \\ &= \sum_{i=1}^{k} a_i y_i(n),\ a_i \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

est aussi une solution de l'équation (1.5)*.*

Preuve. Soient $y_1(n), \cdots, y_k(n)$ sont des solutions de l'équation (1.5), alors

$$Ly_1 = 0, Ly_2 = 0, \cdots, Ly_k = 0$$

et comme L est un opérateur linéaire alors

$$\begin{aligned} L(a_1 y_1 + a_2 y_2 + \cdots + a_k y_k) &= a_1 L y_1 + a_2 L y_2 + \cdots + a_k L y_k \\ &= 0,\ \ a_i \in \mathbb{R}, i = 1, \cdots, k \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} y(n) &= a_1 y_1 + a_2 y_2 + \cdots + a_k y_k \\ &= \sum_{i=1}^{k} a_i y_i, a_i \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

est une solution de l'équation (1.5) .Donc, toute combinaison linéaire des éléments de S reste dans S. ■

Lemme 1.1.2 *Soit $c = (c_1, c_2, \cdots, c_k) \in \mathbb{R}^k$. Alors toute solution $y(n, n_0, c)$ de l'équation (1.5) avec ces conditions initiales, s'écrit comme combinaison linéaire des solutions $y(n, n_0, E_i)$, avec $y(n, n_0, E_1), \cdots, y(n, n_0, E_k)$ solutions de l'équation (1.5) et $E_1 = (1, 0, 0, \cdots, 0), \cdots, E_k = (0, 0, 0, \cdots, 1)$.*

Preuve. Soit $y(n, n_0, c)$ une solution de l'équation (1.5) avec les conditions initiales $c = (c_1, c_2, \cdots, c_k) \in \mathbb{R}^k$. Alors par le lemme (1.1.1)

$$z_n = \sum_{i=1}^{k} c_i y(n, n_0, E_i)$$

est une solution de l'équation (1.5) qui satisfait les mêmes conditions initiales. En effet pour $n = n_0$,

$$z_{n_0} = \sum_{i=1}^{k} c_i y(n_0, n_0, E_i)$$

en utilisant l'égalité

$$y(n_0 + j, n_0, E_i) = E_i^{j+1}, j = 0, \cdots, k-1$$

on obtient que

$$z_{n_0} = c_1, z_{n_0+1} = c_2, \cdots, z_{n_0+k-1} = c_k.$$

Ainsi par le théorème(1.1.1), les deux solutions z_n et $y(n, n_0, c)$ coincident. Donc, $y(n, n_0, c) = \sum_{i=1}^{k} c_i y(n, n_0, E_i)$. ■

Définition 1.1.3 *Soit $f_i(n)$, k fonctions définies sur $\mathbb{N}_{n_0}^{+}$, on définit la matrice $K(n)$ (Matrice de Casorati) par :*

$$K(n) = \begin{pmatrix} f_1(n) & f_2(n) & \cdots & f_k(n) \\ f_1(n+1) & f_2(n+1) & \cdots & f_k(n+1) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ f_1(n+k-1) & f_2(n+k-1) & \cdots & f_k(n+k-1) \end{pmatrix}.$$

Définition 1.1.4 *On dit que la famille des fonctions $\{f_i(n)\}_{i=1}^{k}$, sont linéairement indépendantes si pour tout $n \in \mathbb{N}_{n_0}^{+}$*

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i f_i(n) = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0, i = 1, 2, \cdots, k.\ \alpha_i \in \mathbb{R}.$$

Théorème 1.1.2 *Une condition suffisante pour que $\{f_i(n)\}_{i=1}^{k}$ soient linéairement indépendantes, est qu'il existe $\check{n} \geq n_0$ tel que*

$$\det\ K(\check{n}) \neq 0.$$

Preuve. Supposons que

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i f_i(n) = 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i f_i(n+1) = 0 \\ \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i f_i(n+k-1) = 0 \end{cases}$$

ce qui donne

$$K(n) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix} = 0$$

ainsi, s'il existe un $n = \check{n}$ tel que

$$\det\ K(\check{n}) \neq 0$$

alors

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Donc les $\{f_i(n)\}_{i=1}^{k}$ soient linéairement indépendantes. ■

Lemme 1.1.3 [5] (*Lemme d'Abel*)

Soient $y_1(n), \cdots, y_k(n)$ sont des solutions de l'équation homogène (1.5), *et soit $K(n)$ leur matrice de Casorati alors, pour tout $n \geq n_0$*

$$\det K(n) = (-1)^{k(n-n_0)} \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} p_k(i) \right) \det K(n_0).$$

Théorème 1.1.3 *Si $\{f_i(n)\}_{i=1}^{k}$ sont des solutions de l'équation* (1.5) *tel que*

$$\det K(n_0) \neq 0$$

alors

$$\det K(n) \neq 0,\ \forall n \geq n_0.$$

Preuve. D'après la définition de la matrice de Casorati, on a

$$\det K(n_0+1) = \det \begin{pmatrix} f_1(n_0+1) & f_2(n_0+1) & \cdots & f_k(n_0+1) \\ f_1(n_0+2) & f_2(n_0+2) & \cdots & f_k(n_0+2) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ f_1(n_0+k) & f_2(n_0+k) & \cdots & f_k(n_0+k) \end{pmatrix}.$$

Comme les colonnes sont des solutions, on peut écrire

$$f_i\,(n_0 + k)\,,\ i = 1, \cdots, k$$

comme combinaison linéaire des

$$f_j\,(n_0 + k - j)\,,\ j = 1, \cdots, k$$

ainsi on obtient

$$\det K\,(n_0 + 1) = (-1)^n\, p_k(n_0) \det K\,(n_0) \neq 0$$

car

$$\det K\,(n_0) \neq 0 \text{ et } p_k(n_0) \neq 0$$

donc

$$\det K\,(n_0 + 1) \neq 0.$$

En général, pour tout $n \in \mathbb{N}^+_{n_0}$

$$\det K\,(n + 1) = (-1)^n\, p_k(n) \det K\,(n)$$

et par récurrence

$$\det K\,(n) \neq 0.$$

■

Remarque 1.1.4 *Voici la démonstration si $k = 2$*

$$\begin{aligned} \det K\,(n_0 + 1) &= \det \begin{pmatrix} f_1\,(n_0 + 1) & f_2\,(n_0 + 1) \\ f_1\,(n_0 + 2) & f_2\,(n_0 + 2) \end{pmatrix} \\ &= f_1\,(n_0 + 1)\, f_2\,(n_0 + 2) - f_1\,(n_0 + 2)\, f_2\,(n_0 + 1) \end{aligned}$$

mais

$$\begin{aligned} f_1(n_0+2) &= -p_1(n_0) f_1(n_0+1) - p_2(n_0) f_1(n_0) \\ f_2(n_0+2) &= -p_1(n_0) f_2(n_0+1) - p_2(n_0) f_2(n_0) \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\det K(n_0+1) = p_2(n_0)\left[f_1(n_0) f_2(n_0+1) - f_2(n_0) f_1(n_0+1)\right]$$

i.e.,

$$\begin{aligned} \det K(n_0+1) &= \det\begin{pmatrix} f_1(n_0) & f_2(n_0) \\ f_1(n_0+1) & f_2(n_0+1) \end{pmatrix} \\ &= p_2(n_0)\det K(n_0) \\ &= (-1)^2 p_2(n_0)\det K(n_0). \end{aligned}$$

Corollaire 1.1.1 *Les solutions $y(n, n_0, E_i), i = 1, \cdots, k$ sont linéairement indépendantes.*

Preuve. Comme $y(n, n_0, E_i)$ sont des solutions de l'équation (1.5) on a :

$$K(n_0) = \begin{pmatrix} y(n_0, n_0, E_1) & y(n_0, n_0, E_2) & \cdots & y(n_0, n_0, E_k) \\ y(n_0+1, n_0, E_1) & y(n_0+1, n_0, E_2) & \cdots & y(n_0+1, n_0, E_k) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y(n_0+k-1, n_0, E_1) & y(n_0+k-1, n_0, E_2) & \cdots & y(n_0+k-1, n_0, E_k) \end{pmatrix}.$$

En utilisant l'égalité

$$y(n_0+j, n_0, E_i) = E_i^{j+1}, j = 0, \cdots, k-1$$

on obtient

$$K(n_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

et donc

$$\det K(n_0) = 1 \neq 0.$$

Alors $y(n, n_0, E_i), i = 1, \cdots, k$ sont linéairement indépendantes, et $\{y(n, n_0, E_i)\}_{i=1}^{k}$ s'appelle la base canonique de l'espace des solutions S. ■

Théorème 1.1.5 *L'espace S des solutions de l'équation* (1.5) *avec les conditions initiales est un espace vectoriel de dimension k sur le corp* $\mathbb{R}$.

Preuve. *Elle résulte du lemme* (1.1.2) *et le corollaire* (1.1.1). ■

Lemme 1.1.4 [5]*Si y_n et $\overline{y}_n$ sont deux solutions de l'équation* (1.4)*, alors $y_n - \overline{y}_n$ est une solution de* (1.5).

Théorème 1.1.6 *Si $y(n, n_0, a_i), i = 1, \cdots, k, a_i \in \mathbb{R}^k$ sont des solutions linéairement indépendantes de l'équation* (1.5) *et si $\overline{y}_n$ la solution de l'équation* (1.4)*, alors toute autre solution y_n de* (1.4) *s'écrit*

$$y_n = \overline{y}_n + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i y(n, n_0, a_i).$$

Preuve. *Remarquons que d'aprés le lemme* (1.1.4)*, $y_n - \overline{y}_n$ est une solution de l'équation homogène* (1.5)*, ainsi $y_n - \overline{y}_n = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i y(n, n_0, a_i)$, pour une certaines constantes a_i. Alors vérifier cette théorème.* ■

1.2 Les équations aux différences linéaires à coéfficients constants

1.2.1 Résolution de l'équation homogène

Dans toute la suite, on s'intéresse aux équations aux différences à coéfficients constants homogènes, c'est-à-dire

$$\sum_{i=0}^{k} p_i y_{n+k-i} = 0, p_0 = 1. \tag{1.6}$$

Les p_i sont des constantes réels ou complexes.

Théorème 1.2.1 *L'équation* (1.6) *a des solutions de la forme*

$$y_n = \lambda^n$$

avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$ *et vérifie*

$$p(\lambda) = \sum_{i=0}^{k} p_i \lambda^{k-i} = 0. \tag{1.7}$$

Preuve. En remplaçant par $y_n = \lambda^n$ dans l'équation (1.6), on trouve

$$\lambda^n \sum_{i=0}^{k} p_i \lambda^{k-i} = 0$$

ce qui donne

$$\sum_{i=0}^{k} p_i \lambda^{k-i} = 0.$$

Alors λ^n est une solutions de l'équation (1.6). ■

Remarque 1.2.2 *Le polynôme*

$$p(\lambda) = \sum_{i=0}^{k} p_i \lambda^{k-i}$$

s'appelle polynôme caractéristique associé à l'équation (1.6).

Théorème 1.2.3 *Si les racines $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$, de $p(\lambda)$ sont distinctes, alors les solutions de* (1.6) *sont linéairement indépendantes.*

Preuve. Si $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ sont des racines distinctes du $p(\lambda)$ alors $\left\{\lambda_1^n, \cdots, \lambda_k^n\right\}$ sont k solutions de l'équation (1.6). Montrons qu'ils sont linéairement indépendantes.

Considérons la matrice de Casorati

$$K(n) = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & \lambda_2^n & \cdots & \lambda_k^n \\ \lambda_1^{n+1} & \lambda_2^{n+1} & \cdots & \lambda_k^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \lambda_1^{n+k-1} & \lambda_2^{n+k-1} & \cdots & \lambda_k^{n+k-1} \end{pmatrix}$$

et donc

$$\det K(n) = (\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_k)^n \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_k \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \cdots & \lambda_k^{k-1} \end{vmatrix} = (\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_k)^n \prod_{\substack{i>j \\ i,j=1,\cdots,k}} \left(\lambda_i - \lambda_j\right)$$

où $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_k \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-2} & \cdots & \lambda_k^{k-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leq i<j\leq k} \left(\lambda_j - \lambda_i\right)$ est appelé *le déterminant de Vandermonde généralisé.*

Ainsi

$$\det K(n) \neq 0$$

alors les solutions $\lambda_1^n, \lambda_2^n, \cdots, \lambda_k^n$ sont linéairement indépendantes. ■

Corollaire 1.2.1 *Du théorème précédent, il résulte que toute solution de l'équation* (1.6) *s'écrit comme combinaison linéaire de λ_i^n, $i = 1, \cdots, k$, i.e.,*

$$y_n = \sum_{i=1}^{k} c_i \lambda_i^n, \ c_i \in \mathbb{R}$$

avec $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ sont des racines distinctes du polynôme caractéristique $p(\lambda)$.

Théorème 1.2.4 *Si λ_i, $i = 1, \cdots, s$ est une racine du polynôme $p(\lambda)$ de degré de multiplicité m_i. Alors les fonctions*

$$y_{i,j}(n) = n^j \lambda_i^n, 0 \leq j \leq m_i - 1, i = 1, \cdots, s, m_1 + \cdots + m_s = k$$

sont des solutions linéairement indépendantes de l'équation (1.6) *et donc forment une base.*

Corollaire 1.2.2 *La solution générale de l'équation* (1.6) *s'écrit :*

$$y_n = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=0}^{m_i - 1} c_{i,j} n^j \lambda_i^n, \ c_{i,j} \in \mathbb{R}$$

où

•Le paramètre $s \leq k$ désigne le nombre de racines distinctes de l'équation caractéristique (1.7).

•Le paramètre λ_i désigne une racine de l'équation caractéristique (1.7).

•Le paramètre m_i désigne la multiplicité de la racine λ_i.

•Les coéfficients $c_{i,j}$ sont des constantes qui sont déterminées à partir des conditions intiales.

Quelques exemples

Exemple 1.2.1 (*Suite de Fibonacci*)

On considère l'équation

$$y_{n+2} - y_{n+1} - y_n = 0, \text{ avec } y_0 = 0 \text{ et } y_1 = 1. \tag{1.8}$$

L'équation caractéristique de (1.8) *est*

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0.$$

Ainsi, les racines caractéristiques sont

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

La solution générale de l'équation (1.8) *s'écrit*

$$y_n = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Utilisons les conditions initiales, on obtient

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, c_2 = \frac{-1}{\sqrt{5}}$$

d'où

$$y_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Exemple 1.2.2 *Considérons l'équation aux différences linéaires d'ordre 3*

$$y_{n+3} - 7y_{n+2} + 16y_{n+1} - 12y_n = 0, \text{ avec } y_0 = 0, y_1 = 1 \text{ et } y_2 = 1. \tag{1.9}$$

Son polynôme caractéristique associé est

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12$$

qui admet deux racines

$$\lambda_1 = 2\,(double)\,,\ \lambda_2 = 3\,(simple)\,.$$

La solution générale de (1.9) *s'écrit*

$$y_n = c_0 2^n + c_1 n 2^n + c_3 3^n.$$

Pour trouver les constantes c_0, c_1 *et* c_2*, on résoudre le système*

$$\begin{cases} y_0 = & c_0 + c_2 & = 0 \\ y_1 = & 2c_0 + 2c_1 + 3c_2 & = 1 \\ y_2 = & 4c_0 + 8c_1 + 9c_2 & = 1 \end{cases}$$

alors

$$c_0 = 3,\ c_1 = 2, \textit{ et } c_2 = -3$$

d'où

$$y_n = 3 \times 2^n + (2n) \times 2^n - 3 \times 3^n$$

par suite

$$y_n = 3 \times 2^n + n \times 2^{n+1} - 3^{n+1}.$$

Exemple 1.2.3 *Considérons l'équation*

$$y_{n+2} + p_1 y_{n+1} + p_2 y_n = 0. \tag{1.10}$$

Supposons que l'équation (1.10) *admet deux racines complexes*

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta,\ \lambda_2 = \alpha - i\beta$$

la solution générale est alors

$$y_n = c_1 (\alpha + i\beta)^n + c_2 (\alpha - i\beta)^n .$$

En coordonnés polaires :

$$\alpha = r\cos\theta,\ \beta = r\sin\theta,\ r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2},\ \theta = \arctan\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

donc

$$\begin{aligned} y_n &= c_1 (r\cos\theta + ir\sin\theta)^n + c_2 (r\cos\theta - ir\sin\theta)^n \\ &= r^n \left[(c_1 + c_2)\cos(n\theta) + i(c_1 - c_2)\sin(n\theta)\right] \\ &= r^n \left[a_1 \cos(n\theta) + a_2 \sin(n\theta)\right] \end{aligned}$$

où

$$a_1 = c_1 + c_2,\ a_2 = i(c_1 - c_2)$$

soit

$$\cos\omega = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}},\ \ \sin\omega = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}},\ \omega = \arctan\left(\frac{a_2}{a_1}\right).$$

L'équation générale devient

$$\begin{aligned} y_n &= r^n \sqrt{a_1^2 + a_2^2}\left[\cos\omega\cos(n\theta) + \sin\omega\sin(n\theta)\right] \\ &= r^n \sqrt{a_1^2 + a_2^2}\cos(n\theta - \omega) \\ &= Ar^n \cos(n\theta - \omega) . \end{aligned}$$

1.2.2 Résolution de l'équation nonhomogène

Le principe de résolution consiste à éliminer d'abord la fonction g_n, et ensuite résoudre l'équation homogène. Une technique permettant d'éliminer plusieurs types de fonctions g_n, est l'utilisation de l'opérateur d'avancement E.

Opérateur d'avancement

Définition 1.2.1 *Etant donnée une suite de nombres entiers $f(n)$, l'opérateur d'avancement E est défini comme suit*

$$\begin{array}{lcccl} f(n) = & c \text{ (une constante)} & \Rightarrow & E(f(n)) = & c \\ f(n) \neq & \text{constante} & \Rightarrow & E(f(n)) = & f(n+1). \end{array}$$

Exemple 1.2.4

$$\begin{array}{lcl} f(n) = 4 & \Rightarrow & E(f(n)) = 4 \\ f(n) = 2^n & \Rightarrow & E(f(n)) = 2^{n+1}. \end{array}$$

D'autres opérateurs peuvent aussi être crées en combinant l'opérateur E à lui-même ou à des constantes. Pour ce faire, on définit pour la constante c l'opérateur de même nom c comme suit :

$$c(f(n)) = c \times f(n).$$

La multiplication et l'addition d'opérateurs sont définies comme suit :

$$\begin{array}{rcl} (E1 \times E2) f(n) & = & E1(E2(f(n))) \\ (E1 + E2) f(n) & = & E1(f(n)) + E2(f(n)). \end{array}$$

Remarque 1.2.5 *Il est facile de vérifier que :*

1. *L'addition et la multiplication d'opérateurs sont commutatives*

$$\begin{array}{rcl} (E1 + E2) f(n) & = & (E2 + E1) f(n) \\ (E1 \times E2) f(n) & = & (E2 \times E1) f(n). \end{array}$$

2. *L'addition et la multiplication d'opérateurs sont associatives*

$$\begin{aligned} ((E1 + E2) + E3)\, f(n) &= (E1 + (E2 + E3))\, f(n) \\ ((E1 \times E2)\, E3)\, f(n) &= (E1\, (E2 \times E3))\, f(n)\,. \end{aligned}$$

Voyons maintenant quelques exemples :

Exemple 1.2.5 *Soit à resoudre l'équation suivante :*

$$y_{n+2} - 4y_{n+1} + y_n = n^2, \text{ avec } y_0 = 0, y_1 = 1.$$

On applique l'opérateur E, on obtient

$$(E-1)^3\,(y_{n+2} - 4y_{n+1} + y_n) = 0$$

développant cette relation, on obtient

$$y_{n+5} - 7y_{n+4} + 16y_{n+3} - 16y_{n+2} + 7y_{n+1} - y_n = 0$$

alors l'équation caractéristique s'écrit comme

$$\lambda^5 - 7\lambda^4 + 16\lambda^3 - 16\lambda^2 + 7\lambda - 1 = 0$$

les racines caractéristiques sont

$$\lambda_1 = 1\,(triple)\,, \lambda_2 = 2 - \sqrt{3}\,(simple) \text{ et } \lambda_3 = 2 + \sqrt{3}\,(simple)$$

la solution est de la forme

$$y_n = \left(a_0 + a_1 n + a_2 n^2\right) + a_3\left(2 - \sqrt{3}\right)^n + a_4\left(2 + \sqrt{3}\right)^n$$

pour trouver les constants a_0, a_1, a_2, a_3, a_4*, on va calculer* y_2, y_3, y_4*, on obtient*

$$\begin{cases} y_0 = & a_0 + a_3 + a_4 & = 0 \\ y_1 = & a_0 + a_1 + a_2 + \left(2 - \sqrt{3}\right) a_3 + \left(2 - \sqrt{3}\right) a_4 & = 1 \\ y_2 = & a_0 + 2a_1 + 4a_2 + \left(7 - 4\sqrt{3}\right) a_3 + \left(7 + 4\sqrt{3}\right) a_4 & = 4 \\ y_3 = & a_0 + 3a_1 + 9a_2 + \left(26 - 15\sqrt{3}\right) a_3 + \left(26 + 15\sqrt{3}\right) a_4 & = 16 \\ y_4 = & a_0 + 4a_1 + 16a_2 + \left(97 - 56\sqrt{3}\right) a_3 + \left(97 + 56\sqrt{3}\right) a_4 & = 64 \end{cases}$$

alors $a_0 = -1$*,* $a_1 = 1$*,* $a_2 = -\frac{1}{2}$*,* $a_3 = \frac{6+\sqrt{3}}{12}$*, et* $a_4 = \frac{6-\sqrt{3}}{12}$*, donc la solution est :*

$$y_n = -1 + n - \frac{n^2}{2} + \frac{6 + \sqrt{3}}{12}\left(2 - \sqrt{3}\right)^n + \frac{6 - \sqrt{3}}{12}\left(2 + \sqrt{3}\right)^n.$$

Exemple 1.2.6 *Soit à resoudre l'équation suivante :*

$$y_n - y_{n-1} = 2^n, \text{ avec } y_0 = 1.$$

On applique l'opérateur E, on obtient

$$(E - 2)(2^n) = E(2^n) - 2 \times 2^n = 0$$

par conséquent

$$(E - 2)(y_n - y_{n-1}) = 0$$

développant cette relation, on obtient

$$y_{n+1} - 3y_n + 2y_{n-1} = 0$$

alors l'équation caractéristique s'écrit comme

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

les racines caractéristiques sont

$$\lambda_1 = 1\,(simple)\ \ et\ \lambda_2 = 2\,(simple)$$

la solution est de la forme

$$y_n = a_0 + a_1 \times 2^n$$

pour trouver les constants a_0, a_1*, on va calculer* y_1*, on obtient*

$$\begin{cases} y_0 = & a_0 + a_1 & = 1 \\ y_1 = & a_0 + 2a_1 & = 3 \end{cases}$$

alors $a_0 = -1$ *et* $a_1 = 2$*, donc la solution est :*

$$y_n = -1 + 2 \times 2^n = 2^{n+1} - 1.$$

Exemple 1.2.7 *Soit à resoudre l'équation suivante :*

$$y_n - y_{n-1} = n \times 2^n,\ avec\ y_0 = 0.$$

On applique l'opérateur E, on obtient

$$(E-2)^2\,(n \times 2^n) = 0$$

par conséquent

$$(E-2)^2\,(y_n - y_{n-1}) = 0$$

développant cette relation on obtient

$$y_{n+2} - 5y_{n+1} - 8y_n - 4y_{n-1} = 0$$

alors l'équation caractéristique s'écrit comme

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = 0$$

les racines caractéristiques sont

$$\lambda_1 = 1\,(simple)\ \ et\ \lambda_2 = 2\,(double)$$

la solution est de la forme

$$y_n = (a_0 + a_1 n)\,2^n + a_2$$

pour trouver les constants a_0, a_1, a_2, on va calculer y_1, y_2, on obtient

$$\begin{cases} y_0 = & a_0 + a_2 & = 0 \\ y_1 = & 2a_0 + 2a_1 + a_2 & = 2 \\ y_2 = & 4a_0 + 8a_1 + a_2 & = 10 \end{cases}$$

alors $a_0 = -2$ et $a_1 = 2, a_2 = 2$, donc la solution est :

$$y_n = (n-1)\,2^{n+1} + 2.$$

Le tableau ci-dessous résume l'expression à employer pour éliminer quelques fonctions g_n dans les équations nonhomogènes.

Dans le tableau qui suit, $P_k(n)$ et α représentent un polynôme en n de degré k et une valeur entière respectivement.

Fonction g_n	Eliminateur correspondant
g_n =constante	$(E-1)$
$g_n = P_k(n)$	$(E-1)^{k+1}$
$g_n = \alpha^n$	$(E-\alpha)$
$g_n = \alpha^n P_k(n)$	$(E-\alpha)^{k+1}$.

1.3 Analyse de la stabilité des solutions

Définition 1.3.1 *On dit qu'une solution $\overline{y}_n$ de l'équation* (1.6) *est stable, si pour toute autre solution y_n de la même équation*

$$e_n = y_n - \overline{y}_n,\ n \in \mathbb{N}_{n_0}^{+}$$

est borné.

Définition 1.3.2 *On dit qu'une solution $\overline{y}_n$ de l'équation* (1.6) *est asymptotiquement stable, si pour toute autre solution y_n de la même équation*

$$\lim_{n\to\infty} e_n = \lim_{n\to\infty} y_n - \overline{y}_n = 0.$$

Définition 1.3.3 *Une solution $\overline{y}_n$ de l'équation* (1.6) *est dite instable si elle est non stable.*

Théorème 1.3.1 *Une solution $\overline{y}_n$ de l'équation* (1.6) *est asymptotiquement stable si et seulement si les racines de $p(\lambda)$ sont à l'intérieur du cercle unité.*

(i.e., $\overline{y}_n$ est asymptotiquement stable$\Leftrightarrow |\lambda_i| < 1,\ i = 1, \cdots, s$).

Preuve. Soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ les racines de $p(\lambda)$ avec les multiplicités respectives $m_1, \cdots, m_s$, tel que $m_1 + \cdots + m_s = k$. On a

$$y_n = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=0}^{m_i-1} c_{i,j} n^j \lambda_i^n$$

et

$$\overline{y}_n = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=0}^{m_i-1} \overline{c}_{i,j} n^j \lambda_i^n$$

ainsi

$$\left(y_n - \overline{y}_n\right) = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=0}^{m_i-1} \left(c_{i,j} - \overline{c}_{i,j}\right) n^j \lambda_i^n. \tag{1.11}$$

1. Si $|\lambda_i| < 1$, le membre de droite dans (1.11) tend vers zéro quand $n \to \infty$, *i.e.*,

$$\lim_{n\to\infty} \left|y_n - \overline{y}_n\right| = 0.$$

2. Inversement si

$$\lim_{n\to\infty} \left|y_n - \overline{y}_n\right| = 0$$

   en supposant qu'il existe une racine λ_* de module ≥ 1, le(s) terme(s) $n^j \lambda_*^n$ ne tend(s) pas vers zéro. Contradiction.

■

Théorème 1.3.2 *Une solution* $\overline{y}_n$ *de l'équation* (1.6) *est stable si et seulement si les modules des racines du polynôme caractéristique sont inférieures ou égales à* 1 *avec ceux du module* 1 *sont des racines simples.*

Preuve. Soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ les racines de $p(\lambda)$ et $m_1, \cdots, m_s$ le degré de multiplicité de chaque racine. Soit y_n une autre solution de l'équation (1.6), alors

$$\left(y_n - \overline{y}_n\right) = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=0}^{m_i-1} \left(c_{i,j} - \overline{c}_{i,j}\right) n^j \lambda_i^n. \tag{1.12}$$

Il est clair que si n est finie la quantité (1.12) est bornée. Il nous reste a étudier le comportement de cette quantité quand $n \to \infty$.

1. les termes qui correspondent à des racines de modules inférieur à 1 tends vers zéro et ceux qui correspondent à des racines de module 1 (donc simples) donnent une quantité bornée.
2. Inversement supposons que la quantité (1.12) est bornée. S'il existe une racine de $p(\lambda)$ de module supérieur à 1, alors (1.12) tend vers l'infini. Contradiction.

■

Maintenant, voici quelques exemples :

Exemple 1.3.1 *Considérons l'équation suivant*

$$y_{n+3} - (\alpha + \beta + 1)\, y_{n+2} + (\alpha + \beta + \alpha\beta)\, y_{n+1} - \alpha\beta y_n = 0$$

avec

$$(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \quad , |\alpha| \leq 1, \left|\beta\right| \leq 1.$$

Son polynôme caractéristique est donné par

$$p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)$$

ainsi la solution $\overline{y}_n$ s'écrit

$$\overline{y}_n = c_1 + c_2\alpha^n + c_3\beta^n \quad , (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Soit une autre solution y_n, alors

$$y_n = \acute{c}_1 + \acute{c}_2\alpha^n + \acute{c}_3\beta^n \quad , (\acute{c}_1, \acute{c}_2, \acute{c}_3) \in \mathbb{R}^3.$$

On a

$$\left|y_n - \overline{y}_n\right| \leq |\acute{c}_1 - c_1| + |\acute{c}_2 - c_2| + |\acute{c}_3 - c_3|$$

et donc $\overline{y}_n$ est stable.

Exemple 1.3.2 *Considérons l'équation suivant*

$$y_{n+3} - \frac{7}{2}y_{n+2} + \frac{7}{2}y_{n+1} - y_n = 0.$$

Son polynôme caractéristique est donné par

$$p(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 1)\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)$$

ainsi toute solution $\overline{y}_n$ s'écrit

$$\overline{y}_n = c_1 2^n + c_2 + c_3 \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad , (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Soit y_n une autre solution, alors

$$y_n = \acute{c}_1 2^n + \acute{c}_2 + \acute{c}_3 \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad , (\acute{c}_1, \acute{c}_2, \acute{c}_3) \in \mathbb{R}^3$$

ainsi

$$\lim_{n \to +\infty} \left(y_n - \overline{y}_n\right) = \lim_{n \to +\infty} \left[(\acute{c}_1 - c_1) 2^n + (\acute{c}_2 - c_2) + (\acute{c}_3 - c_3)\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = \infty$$

et donc $\overline{y}_n$ est non stable.

Pour simplifier notre exposé, nous limitons notre discussion à l'équation aux différence d'ordre deux suivant

$$y_{n+2} + p_1 y_{n+1} + p_2 y_n = 0. \tag{1.13}$$

Supposons que λ_1, λ_2 sont les racines caractéristiques de l'équation (1.13). On obtient alors trois cas :

1. λ_1, λ_2 sont des réels distinctes, $y_n^1 = \lambda_1^n$ et $y_n^2 = \lambda_2^n$ sont deux solutions linéairement indépendants de (1.13). Si $|\lambda_1| > |\lambda_2|$, alors nous allons montrer le compotrement limité de la solution générale $y_n = a_1\lambda_1^n + a_2\lambda_2^n$, on a

   $$y_n = \lambda_1^n \left[a_1 + a_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^n \right].$$

   Depuis

   $$\left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right| < 1.$$

   Il s'ensuit que

   $$\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^n \longrightarrow 0 \text{ quand } n \longrightarrow \infty.$$

   En conséquence : $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_1\lambda_1^n$, il y a 6 différentes situations qui peuvent se présenter ici en fonction de valeur de λ_1 :

   (a) $\lambda_1 > 1$: la suite $\left\{a_1\lambda_1^n\right\}$ diverge vers ∞ (système instable).

   (b) $\lambda_1 = 1$: la suite $\left\{a_1\lambda_1^n\right\}$ est une suite constante.

   (c) $0 < \lambda_1 < 1$: la suite $\left\{a_1\lambda_1^n\right\}$ est monotone décroissante vers 0 (système stable).

   (d) $-1 < \lambda_1 < 0$: la suite $\left\{a_1\lambda_1^n\right\}$ est oxillante auteur de 0 (c'est-à-dire, alternance de signe) et convergent vers 0 (système stable).

   (e) $\lambda_1 = -1$: la suite $\left\{a_1\lambda_1^n\right\}$ est oxillante entre deux valeurs a_1 et $-a_1$.

   (f) $\lambda_1 < -1$: la suite $\left\{a_1\lambda_1^n\right\}$ est oxillante mais de plus en plus grandeur (système instable).

2. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$: la solution générale est donnée par $y_n = (a_1 + na_2)\,\lambda^n$. De tout évidence, si $|\lambda| \geq 1$ la solution y_n diverge, monotone si $\lambda \geq 1$ ou par oxillant si $\lambda \leq -1$. Cependant, si $|\lambda| < 1$, alors la solution converge vers 0 puisque $\lim\limits_{n\to\infty} n\lambda^n = 0$.
3. $\lambda_1 = \lambda_2$ sont complexes (c'est-à-dire que $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ et $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ où $\beta \neq 0$). Alors la solution générale est de la forme : $y_n = Ar^n \cos(n\theta - \omega)$ où $r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, $\theta = \arctan\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$.

Cependant, y_n oxillant de 3 façons différentes en fonction de l'emplacement des racines conjugueés caractéristique :

(a) $r > 1$: ici λ_1 et $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ sont en dehors du cercle unité. D'où y_n est oxillante mais de plus en plus grandeur (système instable).

(b) $r = 1$: ici λ_1 et $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ sont situés sur le cercle unité. D'où y_n est oxillante mais constant en amplitude.

(c) $r < 1$: ici λ_1 et $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ sont situés à l'intérieur du cercle unité. D'où y_n est oxillante mais converge vers 0 quand $n \longrightarrow \infty$ (système stable).

Exemple 1.3.3 *Considérons l'équation suivant*

$$y_{n+2} - y_{n+1} + \frac{1}{4} y_n = 0.$$

Son polynôme caractéristique est donné par

$$p(\lambda) = \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2$$

ainsi tout solution $\overline{y}_n$ s'écrit

$$\overline{y}_n = c_1 \left(\frac{1}{2}\right)^n + c_2 n \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad ,(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Soit y_n une autre solution, alors

$$y_n = \acute{c}_1 \left(\frac{1}{2}\right)^n + \acute{c}_2 n \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad ,(\acute{c}_1, \acute{c}_2) \in \mathbb{R}^2$$

et

$$y_n - \overline{y}_n = (\acute{c}_1 - c_1) \left(\frac{1}{2}\right)^n + (\acute{c}_2 - c_2)\, n \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Nous étudions maintenant la stabilité

$1^{ére}$ *méthode* : *il est clair que*

$$\lim_{n \to +\infty} \left(y_n - \overline{y}_n \right) = 0$$

est donc $\overline{y}_n$ *est asymptotiquement stable.*

$2^{éme}$ *méthode* : *on a* $\left|\lambda_{1,2}\right| = \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} < 1$, *alors* $\overline{y}_n$ *est asymptotiquement stable.*

CHAPITRE 2

EQUATIONS AUX DIFFÉRENCES NON LINÉAIRES

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux équations aux différences non linéaires. Dans la première partie on présente l'essentiel des définitions et résultats connus utiles pour la suite de notre travail. Dans la dernière partie, on étudié d'une façon détaillée le comportement global des solutions d'une équation aux différences rationnelle d'ordre deux.

2.1 Définitions et résultats généraux

Une équation aux différences non linéaire d'ordre $(k+1)$ est une équation de la forme

$$x_{n+1} = f\left(x_n, x_{n-1}, \cdots, x_{n-k}\right), n = 0, 1, \cdots, \tag{2.1}$$

avec $f : I^{k+1} \to I$ est une fonction continue, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et

$$(x_0, x_{-1}, \cdots, x_{-k}) \in I^{k+1}$$

sont les conditions initiales.

Remarque 2.1.1 *Toute solution $\{x_n\}_{n=-k}^{+\infty}$ de l'équation* (2.1) *est uniquement déterminée par les conditions initiales.*

Définition 2.1.1 *Un point $\overline{x} \in I$ est dit point d'équilibre pour l'équation* (2.1) *si*

$$\overline{x} = f(\overline{x}, \overline{x}, \cdots, \overline{x})$$

autrement dit

$$x_n = \overline{x}, \forall n \geq -k.$$

Définition 2.1.2 *Une solution $\{x_n\}_{n=-k}^{+\infty}$ de l'équation* (2.1) *est dite périodique de période p si*

$$x_{n+p} = x_n, \forall n \geq -k.$$

Définition 2.1.3 *Un intervalle $J \subseteq I$ est dit intervalle invariant pour l'équation* (2.1) *si*

$$x_{-k}, x_{-k+1}, \cdots, x_0 \in J \Rightarrow x_n \in J, n > 0.$$

Définition 2.1.4 *Soit $\overline{x}$ un point d'équilibre de l'équation* (2.1).

1. *$\overline{x}$ est dit localement stable si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x_{-k}, \cdots, x_0 \in I : \left|x_{-k} - \overline{x}\right| + \cdots + \left|x_0 - \overline{x}\right| < \delta$$

alors

$$\left|x_n - \overline{x}\right| < \varepsilon, \forall n \geq -k.$$

2. $\overline{x}$ *est dit localement asymptotiquement stable si*

$$\bullet \overline{x} \text{ est localement stable,}$$

$$\bullet \exists \gamma > 0, \forall x_{-k}, \cdots, x_0 \in I : \left| x_{-k} - \overline{x} \right| + \cdots + \left| x_0 - \overline{x} \right| < \gamma \text{ alors } \lim_{n\to\infty} x_n = \overline{x}.$$

3. $\overline{x}$ *est dit globalement attractif si*

$$\forall x_{-k}, \cdots, x_0 \in I, \lim_{n\to\infty} x_n = \overline{x}.$$

4. $\overline{x}$ *est dit globalement asymptotiquement stable si*

$$\bullet \overline{x} \text{ est localement stable,}$$

$$\bullet \overline{x} \text{ est globalement attractif.}$$

5. *Le point* $\overline{x}$ *est dit instable s'il est non localement stable.*

2.2 Stabilité des équations aux différences non linéaires

Supposons en plus que f est une fonction différentiable au voisinage du point d'équilibre $\overline{x}$.

Définition 2.2.1 *On appelle équation aux différences linéaire associée à l'équation* (2.1) *l'équation*

$$y_{n+1} = p_0 y_n + p_1 y_{n-1} + \cdots + p_k y_{n-k} \tag{2.2}$$

avec

$$p_i = \frac{\partial f}{\partial u_i}(\overline{x}, \overline{x}, \cdots, \overline{x}), \ i = 0, \cdots, k.$$

Pour laquelle on associé le polynôme caractéristique

$$p(\lambda) = \lambda^{k+1} - p_0 \lambda^k - \cdots - p_k.$$

Remarque 2.2.1 *La stabilité de l'équation* (2.1) *est caractérisé par la stabilité de l'équation aux différences linéaire associé* (2.2).

Le théorème suivant du Clark, donne une condition suffisante de la stabilité locale asymptotique de l'équation (2.1).

Théorème 2.2.2 *Une condition suffisante pour la stabilité locale asymptotique de l'équation* (2.1) *est*

$$\left|p_0\right| + \left|p_1\right| + \cdots + \left|p_k\right| < 1.$$

Pour montrer cette théorème, on utilisant le théorème de Rouché.

Théorème 2.2.3 *(théorème de Rouché) Supposons que :*

1. *Deux fonctions $f(\lambda)$ et $g(\lambda)$ sont analytiques à l'intérieur est sur une simple conteur fermé γ dans le domaine complexe, et*
2. $\left|f(\lambda)\right| > \left|g(\lambda)\right|$ *pour tout les points sur γ.*

Alors $f(\lambda)$ et $f(\lambda) + g(\lambda)$ ont le même nombre de zéros à l'intérieur du disque unité.

Preuve. (Théorème (2.2.2))

Soit

$$p(\lambda) = \lambda^{k+1} - p_0\lambda^k - \cdots - p_k$$

le polynôme caractéristique associé à l'équation (2.1). Soit f et g deux fonctions complexes définies par

$$f(\lambda) = \lambda^{k+1}, g(\lambda) = p_0\lambda^k + \cdots + p_k.$$

On a pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| = 1$

$$\begin{aligned} \left|g(\lambda)\right| &= \left|p_0\lambda^k + \cdots + p_k\right| \\ &\leq \left|p_0\right| + \left|p_1\right| + \cdots + \left|p_k\right| \\ &< 1 \end{aligned}$$

i.e.,

$$\left|g(\lambda)\right| < \left|f(\lambda)\right|.$$

Alors par le théorème de Rouché $f(\lambda)$ et $f(\lambda) - g(\lambda)$ ont le même nombre de zéros $(k+1)$ à l'intérieur du disque unité. Ainsi les racines du polynôme $p(\lambda)$ sont de modules inférieures à 1, et le résultat découle du théorème (1.3.1) du chapitre 1. ∎

A présent on donne quelques théorèmes de convergence pour les équations aux différences non linéaires d'ordre deux.

Théorème 2.2.4 *Considérons l'équation aux différences définie par*

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}), \; n = 0, 1, \cdots, \tag{2.3}$$

avec

$$f : [a,b] \times [a,b] \to [a,b], \; a, b \in \mathbb{R}.$$

Supposons que f est une fonction continue telle que

a) *$f(x,y)$ est décroissante par rapport à x et croissante par rapport à y.*

b) *Si $(m, M) \in [a,b] \times [a,b]$ est une solution de*

$$\begin{cases} m = f(M, m) \\ M = f(m, M) \end{cases}$$

alors

$$m = M.$$

Alors l'équation (2.3) *a un point d'équilibre unique et toute solution de l'équation* (2.3) *converge vers $\overline{x}$.*

Preuve. Posons

$$m_0 = a, M_0 = b$$

et pour $i = 1, 2, \cdots$,

$$\begin{cases} m_i = f(M_{i-1}, m_{i-1}) \\ M_i = f(m_{i-1}, M_{i-1}) \end{cases}$$

observons (par (a)) que pour tout $i \geq 0$

$$m_0 \leq m_1 \leq \cdots \leq m_i \leq \cdots \leq M_i \leq \cdots \leq M_1 \leq M_0$$

et

$$m_i \leq x_k \leq M_i, \text{ pour } k \geq 2i + 1.$$

En effet,

• pour $i = 0$,

$$a = m_0 \leq x_k \leq M_0 = b, \text{ pour } k \geq 1.$$

• pour $i = 1$, on obtient

$$\begin{cases} m_1 = f(M_0, m_0) \\ M_1 = f(m_0, M_0) \end{cases}.$$

On a

$$x_{k-1} \leq M_0 \text{ et } x_{k-2} \geq m_0, \text{ pour } k \geq 3$$

et par (a), on obtient

$$m_1 = f(M_0, m_0) \leq f(x_{k-1}, m_0) \leq f(x_{k-1}, x_{k-2}) = x_k.$$

D'autre part, on a

$$x_{k-1} \geq m_0 \text{ et } x_{k-2} \leq M_0, \text{ pour } k \geq 3$$

et par (a), on a

$$M_1 = f(m_0, M_0) \geq f(x_{k-1}, M_0) \geq f(x_{k-1}, x_{k-2}) = x_k.$$

D'où

$$m_1 \leq x_k \leq M_1, \text{ pour } k \geq 3.$$

• Supposons que

$$m_i \leq x_k \leq M_i, \text{ pour } k \geq 2i+1$$

et montrons que

$$m_{i+1} \leq x_k \leq M_{i+1}, \text{ pour } k \geq 2i+3.$$

On a

$$x_{k-1} \leq M_i \text{ et } x_{k-2} \geq m_i$$

alors

$$m_{i+1} = f(M_i, m_i) \leq f(x_{k-1}, m_i) \leq f(x_{k-1}, x_{k-2}) = x_k$$

d'autre part, on a

$$m_i \leq x_{k-1} \text{ et } M_i \geq x_{k-2}$$

alors

$$M_{i+1} = f(m_i, M_i) \geq f(x_{k-1}, M_i) \geq f(x_{k-1}, x_{k-2}) = x_k$$

d'où

$$m_{i+1} \leq x_k \leq M_{i+1}, \text{ pour } k \geq 2i+3.$$

Maintenant, posons

$$m = \lim_{i\to\infty} m_i, \; M = \lim_{i\to\infty} M_i$$

et donc

$$m \leq \lim_{i\to\infty} \inf x_i \leq \lim_{i\to\infty} \sup x_i \leq M.$$

Par continuité de f

$$\begin{cases} m = f(M, m) \\ M = f(m, M) \end{cases}$$

mais

$$m, M \in [a, b]$$

ainsi (par (b))

$$m = M.$$

Il résulte que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = m = M.$$

Mais m est solution (unique) de

$$m = f(m, m)$$

i.e., point d'équilibre donc

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \overline{x}.$$

■

Théorème 2.2.5 *Considérons l'équation aux différences définie par*

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}), \ \ n = 0, 1, \cdots \tag{2.4}$$

avec

$$f : [a, b] \times [a, b] \longrightarrow [a, b], \ \ a, b \in \mathbb{R}.$$

Supposons que f est une fonction continue telle que

a) *$f(x, y)$ est croissante par rapport à x et décroissante par rapport à y.*

b) *Si* $(m, M) \in [a, b] \times [a, b]$ *est une solution de*

$$\begin{cases} m = f(m, M) \\ M = f(M, m) \end{cases}$$

alors

$$m = M.$$

Alors l'équation (2.4) *a un point d'équilibre unique et tout solution de l'équation* (2.4) *converge vers* $\overline{x}$.

Preuve. Posons

$$m_0 = a, M_0 = b$$

et pour $i = 1, 2, \cdots$,

$$\begin{cases} m_i = f(m_{i-1}, M_{i-1}) \\ M_i = f(M_{i-1}, m_{i-1}) \end{cases}$$

observons (par (a)) que tout $i \geq 0$

$$m_0 \leq m_1 \leq \cdots \leq m_i \leq \cdots \leq M_i \leq \cdots \leq M_1 \leq M_0$$

et

$$m_i \leq x_k \leq M_i, \text{ pour } k \geq 2i + 1.$$

Posons

$$m = \lim_{i \to +\infty} m_i, \ M = \lim_{i \to +\infty} M_i$$

et donc

$$m \leq \lim_{i \to \infty} \inf x_i \leq \lim_{i \to \infty} \sup x_i \leq M.$$

Par continuité de f

$$\begin{cases} m = f(m, M) \\ M = f(M, m) \end{cases}$$

mais

$$m, M \in [a, b]$$

ainsi

$$m = M.$$

Il résulte que

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = m = M.$$

Mais m est solution (unique) de

$$m = f(m, m)$$

i.e., point d'équilibre donc

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \overline{x}.$$

■

Similairement, on peut démontrer les théorèmes suivants

Théorème 2.2.6 *Considérons l'équation aux différences définie par*

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}), \;\; n = 0, 1, \cdots \tag{2.5}$$

avec

$$f : [a, b] \times [a, b] \longrightarrow [a, b], \;\; a, b \in \mathbb{R}.$$

Supposons que f est une fonction continue telle que

a) *$f(x,y)$ est une fonction décroissante par rapport à x et y.*

b) *Si $(m,M) \in [a,b] \times [a,b]$ est une solution de*

$$\begin{cases} m = f(M,M) \\ M = f(m,m) \end{cases}$$

alors

$$m = M.$$

Alors l'équation (2.5) *a un point d'équilibre unique et toute solution de l'équation* (2.5) *converge vers $\overline{x}$.*

Théorème 2.2.7 *Considérons l'équation aux différences définie par*

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}), \; n = 0, 1, \cdots, \tag{2.6}$$

avec

$$f : [a,b] \times [a,b] \longrightarrow [a,b], \; a, b \in \mathbb{R}.$$

Supposons que f est une fonction continue tels que

a) *$f(x,y)$ est une fonction croissante par rapport à x et y,*

b) *l'équation $f(x,x)$ admet une solution unique positive.*

Alors l'équation (2.6) *a un point d'équilibre unique et tout solution de* (2.6) *converge vers $\overline{x}$.*

2.3 Stabilité globale d'une équation aux différences rationnelle d'ordre deux

Dans cette partie, on intéresse à l'étude de la stabilité globale de l'équation aux différences d'ordre deux

$$x_{n+1} = \frac{1 - x_n}{\gamma - x_{n-1}},\ n = 0, 1, \cdots, \tag{2.7}$$

avec

$$\gamma > 1 \tag{2.8}$$

et les coditions initiales x_{-1}, x_0 sont arbitraires.

Remarque 2.3.1 [14]*L'équation* (2.7) *est un cas particulier du cas plus général donné par :*

$$x_{n+1} = \frac{\alpha - \beta x_n}{\gamma - x_{n-k}},\ n = 0, 1, \cdots,$$

où $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ *tel que* $\alpha \geq 0, \gamma > \beta > 0, k \in \mathbb{N}^*$.

2.3.1 Stabilité locale

Remarque 2.3.2 *Si* $\gamma > 1$, *alors :*

1. *l'équation* (2.7) *admet les point d'équilibres :*

$$\overline{x}_1 = \frac{(1+\gamma) + \sqrt{(1+\gamma)^2 - 4}}{2} \ et\ \overline{x}_2 = \frac{(1+\gamma) - \sqrt{(1+\gamma)^2 - 4}}{2}$$

2. *l'équation linéaire assosiée à* (2.7) *est donnée par :*

$$y_{n+1} + \frac{1}{\gamma - \overline{x}_i} y_n - \frac{\overline{x}_i}{\gamma - \overline{x}_i} y_{n-1} = 0,\ i = 1, 2,\ n = 0, 1, \cdots. \tag{2.9}$$

On applique le théorème (2.2.2) pour étudier la stabilité des deux points d'équilibres précédents :

• Pour le point d'équilibre $\overline{x}_1$:

on a

$$p = \frac{-2}{\gamma - 1 - \sqrt{(\gamma+1)^2 - 4}}, \text{ et } q = \frac{\gamma + 1 + \sqrt{(\gamma+1)^2 - 4}}{\gamma - 1 - \sqrt{(\gamma+1)^2 - 4}}$$

or

$$\left| \frac{\gamma + 1 + \sqrt{(\gamma+1)^2 - 4}}{\gamma - 1 - \sqrt{(\gamma+1)^2 - 4}} \right| > 1$$

En effet, supposons que

$$|q| \leq 1$$

alors

$$\left| \frac{\gamma + 1 + \sqrt{(\gamma+1)^2 - 4}}{\gamma - 1 - \sqrt{(\gamma+1)^2 - 4}} \right| \leq 1$$

d'où

$$\begin{aligned} \left|\gamma + 1 + \sqrt{(\gamma+1)^2 - 4}\right| &\leq \left|\gamma - 1 - \sqrt{(\gamma+1)^2 - 4}\right| \\ &\leq |\gamma - 1| + \sqrt{(\gamma+1)^2 - 4} \end{aligned}$$

et comme $\gamma - 1 > 0$, alors

$$\left|\gamma + 1 + \sqrt{(\gamma+1)^2 - 4}\right| = \gamma + 1 + \sqrt{(\gamma+1)^2 - 4} \leq \gamma - 1 + \sqrt{(\gamma+1)^2 - 4}$$

d'où $1 \leq -1$. Contradiction. Alors, le point d'équilibre $\overline{x}_1$ de l'équation (2.7) est instable.

• Pour le point d'équilibre $\overline{x}_2$, on a

$$\gamma > 1 \text{ et } \overline{x}_2 = \frac{(1+\gamma) - \sqrt{(1+\gamma)^2 - 4}}{2} < \frac{1+\gamma}{2} < \gamma.$$

Si

$$(\gamma - 1) > 1 \tag{2.10}$$

alors

$$\begin{aligned} \sqrt{(1+\gamma)^2 - 4} &\geq \sqrt{(1+\gamma)^2 - 4(\gamma - 1)} \\ &> \sqrt{(1+\gamma)^2 - (\gamma+3)(\gamma-1)} \\ &= \sqrt{(1+\gamma)^2 - (1+\gamma)^2 + 4} \\ &= 2 \end{aligned}$$

on a

$$p = \frac{-1}{\gamma - \overline{x}_2}, \text{ et } q = \frac{\overline{x}_2}{\gamma - \overline{x}_2}$$

alors

$$\begin{aligned} |p| + |q| &= \left|\frac{-1}{\gamma - \overline{x}_2}\right| + \left|\frac{\overline{x}_2}{\gamma - \overline{x}_2}\right| \\ &= \frac{1 + \overline{x}_2}{\gamma - \overline{x}_2} \\ &= \frac{3 + \gamma + \sqrt{(\gamma+1)^2 - 4}}{\gamma - 1 + \sqrt{(\gamma+1)^2 - 4}} \\ &< \frac{3 + \gamma - 2}{\gamma - 1 + 2} = \frac{1+\gamma}{\gamma+1} = 1 \end{aligned}$$

par le théorème (2.2.2), le point d'équilibre $\overline{x}_2$ est localement asymptotiquement stable.

Dans la suite, on note $\overline{x}_2$ par $\overline{x}$.

Lemme 2.3.1 *Soit* $f(u,v) = \frac{1-u}{\gamma - v}$ *et supposant que* (2.10) *est vérifiée. Alors les assertions* *suivantes sont vraies :*

(a) $0 < \overline{x} < 1$, *et* $1 < \overline{x}_1 < \infty$,

(b) $f(x,x)$ *est une fonction strictement décroissante sur* $]-\infty, 1]$,

(c) *soit* $u, v \in]-\infty, 1]$, *alors* $f(u,v)$ *est une fonction strictement décroissante par rapport à* u, *et strictement croissante par rapport à* v.

Preuve.

(a) Compte tenu la condition (2.10), nous avons

$$\overline{x} = \frac{1 + \gamma - \sqrt{(1+\gamma)^2 - 4}}{2} < \frac{1+\gamma}{2}.$$

Par l'équation (2.7), on a $\overline{x} = \frac{1-\overline{x}}{\gamma - \overline{x}} > 0$ et aussi $\overline{x} < 1$.

Aussi par la condition (2.10), on a

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{1-\overline{x}_1}{\gamma - \overline{x}_1} = \overline{x}_1 = \frac{1+\gamma+\sqrt{(1+\gamma)^2 - 4}}{2} \\ &\geq \frac{1+\gamma+\sqrt{(1+\gamma)^2 - 4(\gamma-1)}}{2} = \frac{1+\gamma+\sqrt{(\gamma-1)^2+4}}{2} \\ &> \frac{1+\gamma+\sqrt{(\gamma-1)^2}}{2} = \gamma \end{aligned}$$

et $1 - \overline{x}_1 < 0$, d'où $\overline{x}_1 > 1$.

(b) On a $f(x,x) = \frac{1-x}{\gamma-x}$, alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,x) = \frac{1-\gamma}{(\gamma-x)^2} < 0$$

d'où $f(x,x)$ est strictement décroissante sur $]-\infty, 1]$.

(c) C'est une conséquence des formules suivantes :

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) = \frac{-1}{\gamma - v} < 0, \text{ et } \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) = \frac{1-u}{(\gamma-v)^2} > 0.$$

■

Théorème 2.3.3 *Supposons que* (2.10) *est vérifiée, et soit* $\{x_n\}$ *une solution de l'équation* (2.7). *Si* $x_1 \in]-\infty, 1]$ *et* $x_0 \in [0, 1]$, *alors* $0 \leq x_n < 1$, *pour* $n = 1, 2, \cdots ,$.

Preuve. Par (c) de lemme (2.3.1), on a

$$0 = \frac{1 - 1 \cdot 1}{\gamma - x_{-1}} \leq x_1 = \frac{1 - x_0}{\gamma - x_{-1}} \leq \frac{1 - 1 \cdot 0}{\gamma - 1} < 1$$

et

$$0 = \frac{1 - 1 \cdot 1}{\gamma - x_0} \leq x_2 = \frac{1 - x_1}{\gamma - x_0} \leq \frac{1 - 1 \cdot 0}{\gamma - 1} < 1$$

et par récurrence, on déduit que

$$0 \leq x_n < 1, \text{ pour } n = 1, 2, \cdots ,.$$

■

2.3.2 Stabilité globale

Dans cette section, nous allons étudier la stabilité globale du point d'équilibre positive $\overline{x}$ de l'équation (2.7).

Théorème 2.3.4 *Supposons que la condition* (2.10) *est vérifiée. Alors le point d'équilibre positive* $\overline{x}$ *de l'équation* (2.7) *est globalement attractif avec* $S = [0, 1]^2$.

Preuve. Pour $u, v \in [0, 1]$, soit

$$f(u, v) = \frac{1 - u}{\gamma - v}.$$

Nous affirmons que :

$$f : [a, b] \times [a, b] \to [a, b].$$

En effet, soit $a = 0$ et $b = 1$, alors

$$f(b, a) = \frac{1-b}{\gamma - a} = \frac{1-1}{\gamma} = 0 = a,$$

et, on a par (2.10)

$$f(a, b) = \frac{1-a}{\gamma - 1} = \frac{1}{\gamma - 1} < 1 = b.$$

Depuis $f(u, v)$ est décroissante par rapport à u et croissante par rapport à v, il s'ensuite que

$$a \leq f(u, v) \leq b, \text{ pour } u, v \in [a, b],$$

ce qui implique que notre assertion est vraie.

D'autre part, pour démontrer la stabilité globale, il suffit de prouver que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \overline{x}$, et pour cela nous utilisant le théorème (2.2.4), la condition (a) est déja montrer dans le lemme (2.3.1), pour la condition (b), en effet :

si $(m, M) \in [0, 1]^2$ est une solution de

$$\begin{cases} m = f(M, m) \\ M = f(m, M) \end{cases}$$

nous donne

$$\begin{cases} mM = \frac{M(1-M)}{\gamma - m} \\ \\ mM = \frac{m(1-m)}{\gamma - M} \end{cases}$$

par soustraction, on a

$$\frac{M(1-M)}{\gamma - m} - \frac{m(1-m)}{\gamma - M} = 0$$

alors

$$\frac{M(1-M)(\gamma - M) - m(1-m)(\gamma - m)}{(\gamma - m)(\gamma - M)} = 0$$

mais

$$(\gamma - m)(\gamma - M) \neq 0$$

alors

$$M(1-M)(\gamma - M) = m(1-m)(\gamma - m)$$

ainsi

$$m = M.$$

Alors par le théorème (2.2.4)

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \overline{x}.$$

■

Théorème 2.3.5 *Supposons que la condition* (2.10) *est vérifiée, alors le point d'équilibre positive* $\overline{x}$ *de l'équation* (2.7) *est globalement attractif avec* $S =]-\infty, 1] \times [0,1]$.

Preuve. Soit $\{x_n\}$ la solution de l'équation (2.7) avec les conditions initiales $x_{-1}, x_0 \in S$. Alors par le théorème (2.3.3), on a

$$x_n \in [0,1], n = 1, 2, \cdots, .$$

Par le théorème (2.3.4), on a

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \overline{x},$$

et ainsi

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \overline{x}.$$

■

Dans la discussion qui précède, nous avons toujours supposer que $\gamma - 1 > 1$. En effet, l'exemple suivant montre que la borne supérieure $\gamma - 1$ peut être la meilleure.

Exemple 2.3.1 *Considérons l'équation aux différences*

$$x_{n+1} = \frac{1 - x_n}{2 - x_{n-1}}, n = 0, 1, \cdots,$$

il est évident que $\gamma - 1 = 1$. Il est facile de voir que la solution de cette équation avec les conditions initiales $x_{-1} = 0$, $x_0 = 1$ est périodique de période 2.

Par l'exemple ci-dessus, nous allons prouver que le résultat suivant est également vrai si

$$\gamma - 1 \leq 1 < \frac{(\gamma - 1)(\gamma + 3)}{4}. \tag{2.11}$$

Théorème 2.3.6 *Supposons que* (2.8) *et* (2.11) *sont vérifiées. Alors l'équation* (2.7) *admet deux solutions positives périodique de période* 2.

Preuve. Par le calcul direct, on a

$$\begin{cases} x_1 = f(x_0, x_1) = f(x_2, x_1) \\ x_2 = f(x_1, x_0) = f(x_1, x_2) \end{cases}$$

alors

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1-x_0}{\gamma-x_1} = \frac{1-x_2}{\gamma-x_1} \\ \\ x_2 = \frac{1-x_1}{\gamma-x_0} = \frac{1-x_1}{\gamma-x_2} \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} x_1(\gamma - x_1) = 1 - x_2 \\ x_2(\gamma - x_2) = 1 - x_1 \end{cases} \tag{2.12}$$

par soustraction, on obtient

$$x_1 = \gamma - 1 - x_2 \tag{2.13}$$

substituant (2.13) dans la premiére équation de système (2.12), on trouve

$$x_2^2 + x_2\,(1-\gamma) + (2-\gamma) = 0.$$

Alors

$$\begin{cases} x_2' = \frac{\gamma-1-\sqrt{(\gamma-1)(\gamma+3)-4}}{2} \\ \\ x_2 = \frac{\gamma-1+\sqrt{(\gamma-1)(\gamma+3)-4}}{2} \end{cases}$$

on a la solution $x_2^{'} < 0$, donc elle est refuser. Substituant maintenant la solution x_2 dans l'équation (2.13), on obtient

$$x_1 = \frac{\gamma - 1 - \sqrt{(\gamma-1)\,(\gamma+3) - 4}}{2}.$$

Alors, l'équation (2.13) admet une solution périodique de période deux de la forme :

$$\dots, \frac{\gamma - 1 + \sqrt{(\gamma-1)\,(\gamma+3) - 4}}{2}, \frac{\gamma - 1 - \sqrt{(\gamma-1)\,(\gamma+3) - 4}}{2}, \dots.$$

■

2.3.3 Exemples numériques

Pour confirmer les résultats de cette section, nous considérons des exemples numériques qui représentent différents types de solutions à l'équation (2.7).

Exemple 2.3.2 *Prenons*

$$x_{-1} = -1, x_0 = 1, \gamma = 3$$

ainsi

$$\overline{x} = 2 - \sqrt{3} \simeq 0.27.$$

(Voir fig. (2.1)*)*

Exemple 2.3.3 *Prenons*

$$x_{-1} = 10, x_0 = 1, \gamma = 2.1$$

ainsi

$$\overline{x} = \frac{3.1 - \sqrt{5.61}}{2} \simeq 0.37.$$

(Voir fig. (2.2)*)*

Exemple 2.3.4 *Prenons*

$$x_{-1} = 3, x_0 = -2, \gamma = 1.5$$

ainsi

$$\overline{x} = 0.5.$$

(Voir fig. (2.3)*)*

Remarque 2.3.7 *Dans l'exemple* (2.3.4)*, le point d'équilibre est instable car $\gamma < 2$.*

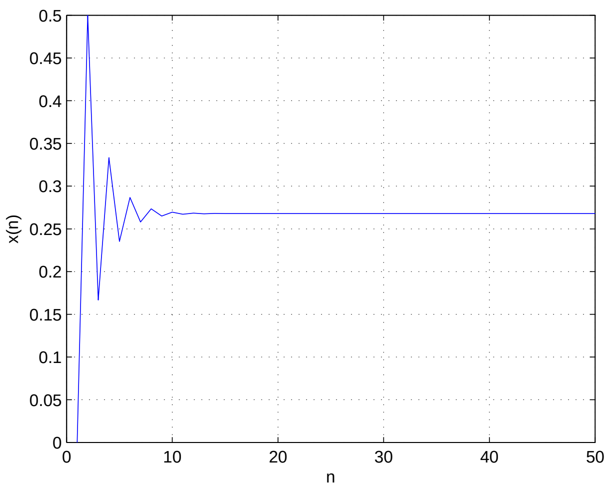

Figure 2.1 – Ce graphique réprésentent le comportement de la solution de l'équation (2.7) avec les valeurs initials donner dans l'exemple (2.3.2).

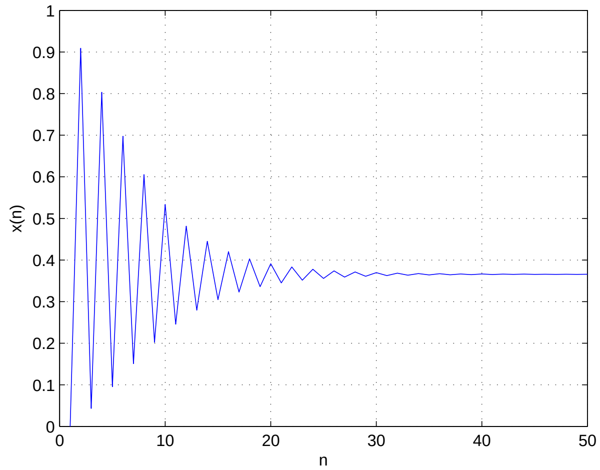

FIGURE 2.2 – Ce graphique réprésentent le comportement de la solution de l'équation (2.7) avec les valeurs initials donner dans l'exemple (2.3.3).

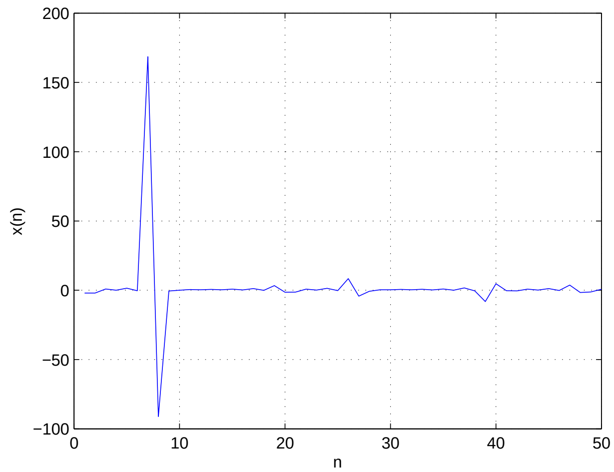

FIGURE 2.3 – Ce graphique réprésentent le comportement de la solution de l'équation (2.7) avec les valeurs initials donner dans l'exemple (2.3.4).

CHAPITRE 3

LA SOLUTION D'UNE ÉQUATION AUX DIFFÉRENCE D'ORDRE DEUX

Dans ce chapitre, nous étudions les solutions de l'équation aux différence d'ordre deux suivant

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{x_{n-1}(x_n \pm 1)}, \; n = 0, 1, \cdots,$$

où les conditions initiales x_{-1}, x_0 sont des nombres réels non nuls.

3.1 La première équation

Dans cette section nous donne la solution de l'équation aux différence suivant

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{x_{n-1}(x_n + 1)}, \; n = 0, 1, \cdots, \tag{3.1}$$

où les conditions initiales x_{-1}, x_0 sont des nombres réels non nuls avec $x_{-1}, x_0 \notin \{-1, 0\}$.

Théorème 3.1.1 *Soit* $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ *une solution de l'équation* (3.1). *Alors pour* $n = 1, 2, \cdots$,

$$\begin{aligned}
x_{5n} &= x_0 \\
x_{5n+1} &= \frac{x_0}{x_{-1}(1 + x_0)} \\
x_{5n+2} &= \frac{1}{x_{-1} + x_0 x_{-1} + x_0} \\
x_{5n+3} &= \frac{x_{-1}}{x_0(1 + x_{-1})} \\
x_{5n+4} &= x_{-1}.
\end{aligned}$$

Preuve. Pour $n = 0$ le résultat est vérifier. Supposons que $n > 0$ et que notre proposition est vraie pour $n - 1$. C'est-à-dire

$$\begin{aligned}
x_{5n-5} &= x_0 \\
x_{5n-4} &= \frac{x_0}{x_{-1}(1 + x_0)} \\
x_{5n-3} &= \frac{1}{x_{-1} + x_0 x_{-1} + x_0} \\
x_{5n-2} &= \frac{x_{-1}}{x_0(1 + x_{-1})} \\
x_{5n-1} &= x_{-1}.
\end{aligned}$$

Maintenant, il découle de l'équation (3.1) que

$$\begin{aligned} x_{5n} &= \frac{x_{5n-1}}{x_{5n-2}\left(1+x_{5n-1}\right)} = \frac{x_{-1}}{\frac{x_{-1}}{x_0(1+x_{-1})}\left(1+x_{-1}\right)} \\ &= x_0. \end{aligned}$$

De même, on obtient

$$x_{5n+1} = \frac{x_{5n}}{x_{5n-1}\left(1+x_{5n}\right)} = \frac{x_0}{x_{-1}\left(1+x_0\right)}$$

$$x_{5n+2} = \frac{x_{5n+1}}{x_{5n}\left(1+x_{5n+1}\right)} = \frac{\frac{x_0}{x_{-1}(1+x_0)}}{x_0\left(1+\dfrac{x_0}{x_{-1}\left(1+x_0\right)}\right)}$$

$$= \frac{1}{x_{-1}+x_{-1}x_0+x_0}$$

$$x_{5n+3} = \frac{x_{5n+2}}{x_{5n+1}\left(1+x_{5n+2}\right)} = \frac{\dfrac{1}{x_{-1}+x_{-1}x_0+x_0}}{\dfrac{x_0}{x_{-1}\left(1+x_0\right)}\left(1+\dfrac{1}{x_{-1}+x_{-1}x_0+x_0}\right)}$$

$$= \frac{x_{-1}}{x_0\left(1+x_{-1}\right)}$$

$$x_{5n+4} = \frac{x_{5n+3}}{x_{5n+2}\left(1+x_{5n+3}\right)} = \frac{\dfrac{x_{-1}}{x_0\left(1+x_{-1}\right)}}{\dfrac{1}{x_{-1}+x_0x_{-1}+x_0}\left(1+\dfrac{x_{-1}}{x_0\left(1+x_{-1}\right)}\right)}$$

$$= x_{-1}.$$

Ainsi, la preuve est terminée. ■

Théorème 3.1.2 *Soit* $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ *une solution de l'équation* (3.1). *Alors* $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ *est périodique de période* 5.

Preuve. De l'équation (3.1), nous voyant que

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{x_{n-1}\left(1+x_n\right)}.$$

$$
\begin{aligned}
x_{n+2} &= \frac{x_{n+1}}{x_n\left(1+x_{n+1}\right)} = \frac{\dfrac{x_n}{x_{n-1}\left(1+x_n\right)}}{x_n\left(1+\dfrac{x_n}{x_{n-1}\left(1+x_n\right)}\right)} \\
&= \frac{1}{x_{n-1}\left(1+x_n\right)+x_n} \\
x_{n+3} &= \frac{x_{n+2}}{x_{n+1}\left(1+x_{n+2}\right)} = \frac{\dfrac{1}{x_{n-1}\left(1+x_n\right)+x_n}}{\dfrac{x_n}{x_{n-1}\left(1+x_n\right)}\left(1+\dfrac{1}{x_{n-1}\left(1+x_n\right)+x_n}\right)} \\
&= \frac{x_{n-1}}{x_n\left(1+x_{n-1}\right)} \\
x_{n+4} &= \frac{x_{n+3}}{x_{n+2}\left(1+x_{n+3}\right)} = \frac{\dfrac{x_{n-1}}{x_n\left(1+x_{n-1}\right)}}{\dfrac{1}{x_{n-1}\left(1+x_n\right)+x_n}\left(1+\dfrac{x_{n-1}}{x_n\left(1+x_{n-1}\right)}\right)} \\
&= x_{n-1} \\
x_{n+5} &= \frac{x_{n+4}}{x_{n+3}\left(1+x_{n+4}\right)} = \frac{x_{n-1}}{\dfrac{x_{n-1}}{x_n\left(1+x_{n-1}\right)}\left(1+x_{n-1}\right)} \\
&= x_n.
\end{aligned}
$$

D'où $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ est une solution périodique de période 5. ■

Théorème 3.1.3 *L'équation* (3.1) *admet trois points d'équilibres qui sont* 0, $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

Preuve. Pour les points d'équilibres de l'équation (3.1), on peut écrit

$$\overline{x} = \frac{\overline{x}}{\overline{x}\left(1+\overline{x}\right)}.$$

Donc on a

$$\overline{x}^3 + \overline{x}^2 - \overline{x} = 0$$

ou

$$\overline{x}\left(\overline{x}^2 + \overline{x} - 1\right) = 0.$$

Alors les points d'équilibres de l'équation (3.1) sont

$$0, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \text{et } \frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

■

3.1.1 Exemples numériques

Pour confirmer les résultats de cette section, nous considérons des exemples numériques qui représentent différents types de solutions à l'équation (3.1) .

Exemple 3.1.1 *Nous supposons* $x_{-1} = -2, x_0 = 2$. *(Voir fig.* (3.1)*)*

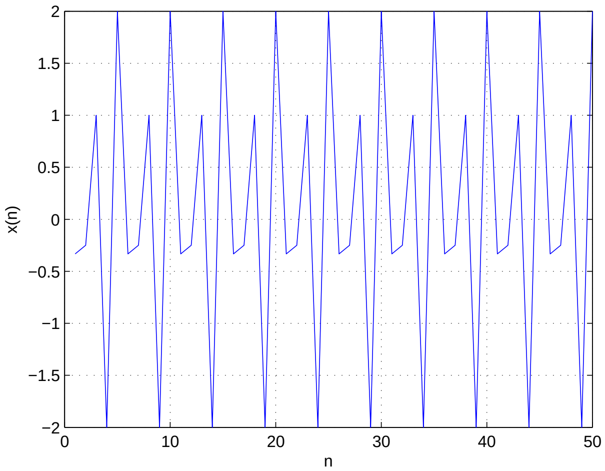

FIGURE 3.1 – Ce graphique réprésentent le comportement de la solution de l'équation (3.1) avec les valeurs initials donner dans l'exemple (3.1.1).

Exemple 3.1.2 *Nous supposons* $x_{-1} = 20; x_0 = 1$. *(Voir fig.* (3.2)*)*

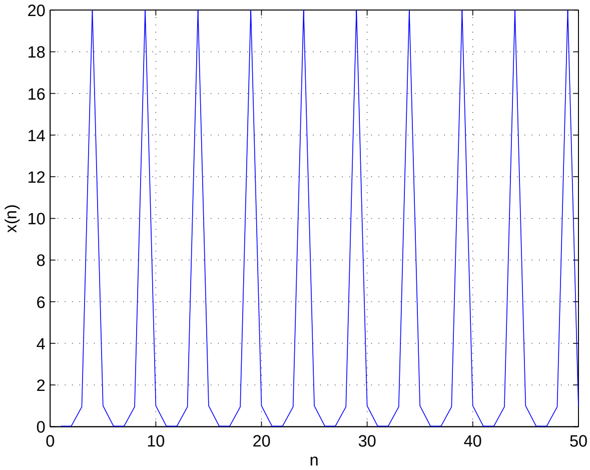

Figure 3.2 – Ce graphique réprésentent le comportement de la solution de l'équation (3.1) avec les valeurs initials donner dans l'exemple (3.1.2).

3.2 La deuxieme équation :

Dans cette section nous donne la solution de l'équation aux différence suivant

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{x_{n-1}(x_n - 1)}, n = 0, 1, \cdots \tag{3.2}$$

où les conditions initiales x_{-1}, x_0 sont des nombres réels non nuls $x_{-1}, x_0 \notin \{0, 1\}$ et $x_{-1} + x_0 \neq x_0 x_{-1}$.

Théorème 3.2.1 *Soit* $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ *une solution de l'équation* (3.2). *Alors pour* $n = 1, 2, \cdots$,

$$\begin{aligned} x_{5n} &= x_0 \\ x_{5n+1} &= \frac{x_0}{x_{-1}(x_0 - 1)} \\ x_{5n+2} &= \frac{-1}{-x_{-1} + x_0 x_{-1} - x_0} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
x_{5n+3} &= \frac{x_{-1}}{x_0\,(x_{-1}-1)} \\
x_{5n+4} &= x_{-1}.
\end{aligned}
$$

Preuve. Pour $n = 0$, le résultat est vérifier. Supposons que $n > 0$ et que notre proposition est vraie pour $n-1$. C'est à dire ;

$$
\begin{aligned}
x_{5n-5} &= x_0 \\
x_{5n-4} &= \frac{x_0}{x_{-1}\,(x_0-1)} \\
x_{5n-3} &= \frac{-1}{-x_{-1}+x_0x_{-1}-x_0} \\
x_{5n-2} &= \frac{x_{-1}}{x_0\,(x_{-1}-1)} \\
x_{5n-1} &= x_{-1}.
\end{aligned}
$$

Maintenant, il découle de l'équation (3.2) que

$$
\begin{aligned}
x_{5n} &= \frac{x_{5n-1}}{x_{5n-2}\,(x_{5n-1}-1)} = \frac{x_{-1}}{\frac{x_{-1}}{x_0(x_{-1}-1)}\,(x_{-1}-1)} \\
&= x_0.
\end{aligned}
$$

De même, on obtient

$$
x_{5n+1} = \frac{x_{5n}}{x_{5n-1}\,(x_{5n}-1)} = \frac{x_0}{x_{-1}\,(x_0-1)}
$$

$$
x_{5n+2} = \frac{x_{5n+1}}{x_{5n}\,(x_{5n+1}-1)} = \frac{\dfrac{x_0}{x_{-1}\,(x_0-1)}}{x_0\left(\dfrac{x_0}{x_{-1}\,(x_0-1)}-1\right)}
$$

$$= \frac{-1}{-x_0 + x_0 x_{-1} - x_{-1}}$$

$$x_{5n+3} = \frac{x_{5n+2}}{x_{5n+1}\left(x_{5n+2} - 1\right)} = \frac{\frac{-1}{-x_0 + x_0 x_{-1} - x_{-1}}}{\frac{x_0}{x_{-1}\left(x_0 - 1\right)}\left(\frac{-1}{-x_0 + x_0 x_{-1} - x_{-1}} - 1\right)}$$

$$= \frac{x_{-1}}{x_0\left(x_{-1} - 1\right)}$$

$$x_{5n+4} = \frac{x_{5n+3}}{x_{5n+2}\left(x_{5n+3} - 1\right)} = \frac{\frac{x_{-1}}{x_0\left(x_{-1} - 1\right)}}{\frac{-1}{-x_0 + x_0 x_{-1} - x_{-1}}\left(\frac{x_{-1}}{x_0\left(x_{-1} - 1\right)} - 1\right)}$$

$$= x_{-1}. \blacksquare$$

Théorème 3.2.2 *Soit* $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ *est une solution de l'équation* (3.2). *Alors* $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ *est périodique de période* 5.

Preuve. De l'équation (3.2) nous voyant que

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= \frac{x_n}{x_{n-1}\left(x_n - 1\right)} \\
x_{n+2} &= \frac{x_{n+1}}{x_n\left(x_{n+1} - 1\right)} = \frac{\frac{x_n}{x_{n-1}(x_n-1)}}{x_n\left(\frac{x_n}{x_{n-1}(x_n-1)} - 1\right)} \\
&= \frac{1}{x_n - x_n x_{n-1} + x_{n-1}} \\
x_{n+3} &= \frac{x_{n+2}}{x_{n+1}\left(x_{n+1} - 1\right)} = \frac{\frac{1}{x_n - x_n x_{n-1} + x_{n-1}}}{\frac{x_n}{x_{n-1}(x_n-1)}\left(\frac{1}{x_n - x_n x_{n-1} + x_{n-1}} - 1\right)} \\
&= \frac{x_{n-1}\left(x_n - 1\right)}{x_n\left(x_n - 1\right)\left(x_{n-1} - 1\right)} \\
&= \frac{x_{n-1}}{x_n\left(x_{n-1} - 1\right)} \\
x_{n+4} &= \frac{x_{n+3}}{x_{n+2}\left(x_{n+3} - 1\right)} = \frac{\frac{x_{n-1}}{x_n(x_{n-1}-1)}}{\frac{1}{x_n - x_n x_{n-1} + x_{n-1}}\left(\frac{x_{n-1}}{x_n(x_{n-1}-1)} - 1\right)} \\
&= x_{n-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{n+5} &= \frac{x_{n+4}}{x_{n+3}\left(x_{n+4}-1\right)} = \frac{x_{n-1}}{\frac{x_{n-1}}{x_n(x_{n-1}-1)}\left(x_{n-1}-1\right)} \\ &= x_n. \end{aligned}$$

Alors $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ est périodique de période 5. ■

Théorème 3.2.3 *L'équation* (3.2) *admet trois points d'équilibres qui sont* $0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Preuve. Pour les points d'équilibres de l'équation (3.2), on peut écrire

$$\overline{x} = \frac{\overline{x}}{\overline{x}\left(\overline{x}-1\right)}.$$

Alors

$$\overline{x}^3 - \overline{x}^2 - \overline{x} = 0$$

donc

$$\overline{x}\left(\overline{x}^2 - \overline{x} - 1\right) = 0$$

d'où les points d'équilibres de l'équation (3.2) sont

$$0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \text{et } \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

■

3.2.1 Exemples numériques

Pour confirmer les résultats de cette section, nous considérons des exemples numériques qui représentent différents types de solutions à l'équation (3.2).

Exemple 3.2.1 *Nous supposons* $x_{-1} = 14$ *et* $x_0 = 5$. *(Voir fig.* (3.3)*)*

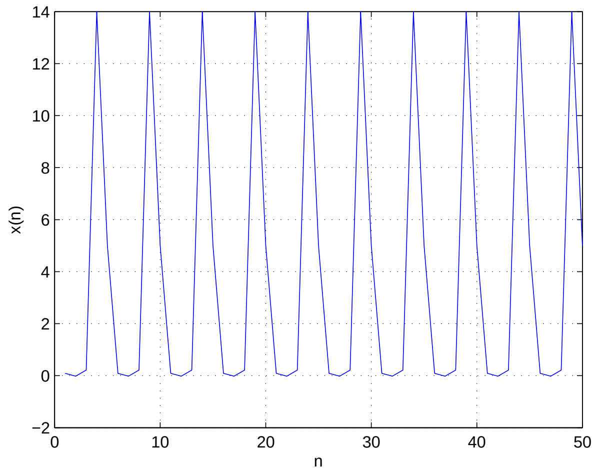

FIGURE 3.3 – Ce graphique réprésentent le comportement de la solution de l'équation (3.2) avec les valeurs initials donner dans l'exemple (3.2.1).

Exemple 3.2.2 *Nous supposons* $x_{-1} = -5$ *et* $x_0 = 10$. *(Voir fig.* (3.4)*)*

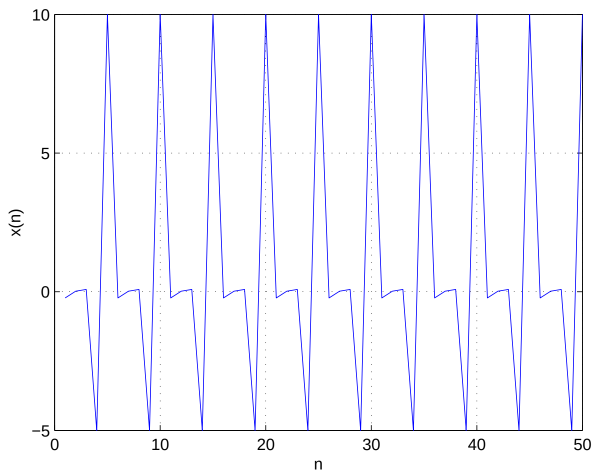

FIGURE 3.4 – Ce graphique réprésentent le comportement de la solution de l'équation (3.2) avec les valeurs initials donner dans l'exemple (3.2.2).

CONCLUSION

Les équations aux différences non linéaires sont simples dans son formules, mais difficile de comprendre le comportement de leurs solutions. Dans notre travail, nous étudions le comportement de solutions de quelques équations aux différences d'ordres deux.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Aloqeili. *Dynamics of a rational difference equation*. Applied mathematics and computation, 176(2006), 768-774.

[2] E. Camouzis, G. Ladas. *Dynamics of third-ordre rational difference equations with open problems and conjectures*. Chapman & Hall/CRC, 2008.

[3] E. Chatterjee, R. Devault, and G. Ladas. *On the global character of* $x_{n+1} = \frac{\beta x_n + \delta x_{n-k}}{A + x_{n-k}}$. International journal of applied mathematical sciences. Vol. 2. No. 1(2005), pp. 39-46.

[4] C. W. Clark. *A delayed-recruitment model of population dynamics with an application to baleen whale populations*. Journal of mathematical biology 3, (1976), 381-391.

[5] S. Elaydi. *An introduction to difference equation*. Departement of mathematics. Trinity University. April 2004.

[6] S. Elaydi, J. Cushing, R. Lasser, V. Papageorgiou, A. Ruffing, W. Van. Assche. *Difference equations, special functions and orthogonal polynomials*. World scientific publishing, 2007.

[7] E. M. Elsayed. *Expressions of solutions for a class of differential equations*. An. St. Univ. Ovidius Constanta. Vol. 18(1), 2010, 99-114.

[8] E. M. Elsayed, *On the difference equations* $x_{n+1} = \frac{x_{n-5}}{\pm 1 - x_{n-2}x_{n-5}}$. Thai journal of mathematics. Vol. 7(2009)No. 1, 1-8.

[9] N. Finizio and G. Ladas. *An introduction to differential equations with difference equations, fourier series, and partial differential equations*. Wadsworth publishing company, 1982.

[10] E. A. Grove, G. Ladas. *Periodicities in nonlinear difference equations*. Chapman & Hall/CRC, 2005.

[11] V. L. Kocic, G. Ladas. *Global behavior of nonlinear difference equations of higher order with applications*. Kluwer academic publishers, 1993.

[12] M. R. C Kulenovic, G. Ladas. *Dynamics of second order rational difference equations with open problems and conjectures*. Chapman & Hall/CRC, 2002.

[13] N. Touafek, Y. Halim. *On max type difference equations, Expressions of solution. International journal of nonlinear science*. Val. 11(2011)No. 4, pp. 396-402.

[14] X. X. Yan, W. T. Li and H. R. sun. *Global attractivity in a higher order nonlinear difference equation*. Applied mathematics E-Notes, 2(2002), 51-58.

Résumé

Le présent travail est consacré à l'étude des équations aux différences linéaires et non linéaires et l'étude de comportement global des solutions d'une équation aux différences rationnelles non linéaire d'ordre deux. Enfin, nous cherchons à la solution d'une équation aux différences d'ordre deux.

Mots clés : *Equation aux différences, stabilité globale, solution périodique.*

Abstract

In this work we study the linear and nonlinear differences equations, and we study the global behavior of solutions of a rational and nonlinear second-order difference equation, Finally, we seek the solution of a second-order difference equation.

Keywords : *difference equation, global stability, periodic solution.*

ملخص

نقوم في هذا العمل بدراسة معادلات الفروق الخطية و غير الخطية و دراسة الاستقرار العام لحلول معادلة غير خطية من الدرجة الثانية، و في الأخير نلتمس الى حل معادلة فروق من الدرجة الثانية.

الكلمات الفاتحة: معادلة الفروق، الاستقرار العام، حلول دورية.