



N° Ref :.....

Centre Universitaire de Mila

Institut des sciences et de la technologie

Département de Mathématiques et Informatique

## *Méthode Adaptée Pour La Résolution D'un Programme Linéaire*

**Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de Master en  
Mathématiques**

**Préparé par :** - Nassima SOUILAH  
- Assia SEDDIKI

**Filière:** Mathématiques

**Spécialité:** Mathématiques Fondamentales et Appliquées

Soutenue le 04 Juin 2013 devant le jury composé de :

|                    |              |            |
|--------------------|--------------|------------|
| <b>Encadreur :</b> | M. AZI       | C. U. Mila |
| <b>Président :</b> | A. ZAIDI     | C. U. Mila |
| <b>Examineur :</b> | M. GUETTICHE | C. U. Mila |

**Année universitaire : 2012/2013**

# *Remerciements*

*Louange à dieu tout puissant de nous avoir aidé, éclairé le chemin pour achever notre travail et nos études.*

*Nos remerciements à nos très chers parents, frères, sœurs, collègues amis respectifs qui nous ont encouragées, soutenues durant tout notre parcours.*

*Un remerciement particulier à notre encadreur Mr M.AZI pour sa présence, son aide et surtout pour ses précieux conseils qui nous ont assistés pour l'accomplissement de notre mémoire.*

*Nous tenons à exprimer nos sincères remerciements à toutes les personnes de l'institut de sciences et de la technologie surtout les enseignants qui nous ont enseigné durant toutes nos années d'étude.*

*Enfin nous remercions toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à l'achèvement de ce travail.*

*Merci bien.*

# Table des matières

|                                                                         |           |
|-------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Introduction générale</b>                                            | <b>3</b>  |
| <b>1 Préliminaires</b>                                                  | <b>4</b>  |
| Introduction . . . . .                                                  | 4         |
| 1.1 Rappels d'algèbre matricielle : . . . . .                           | 4         |
| 1.1.1 Définitions . . . . .                                             | 5         |
| 1.1.2 Déterminant . . . . .                                             | 6         |
| 1.1.3 Indépendance linéaire : . . . . .                                 | 6         |
| 1.1.4 Inverse d'une matrice . . . . .                                   | 7         |
| 1.1.5 Rang d'une matrice : . . . . .                                    | 7         |
| 1.2 Notions sur la convexité . . . . .                                  | 8         |
| 1.2.1 Ensembles convexes . . . . .                                      | 8         |
| 1.2.2 Fonctions convexes . . . . .                                      | 10        |
| 1.3 Inéquations linéaires : . . . . .                                   | 11        |
| 1.4 Résolution des systèmes linéaires par la méthode de Gauss : . . . . | 12        |
| Conclusion . . . . .                                                    | 15        |
| <b>2 Méthodes de résolution d'un problème linéaire</b>                  | <b>16</b> |
| Introduction . . . . .                                                  | 16        |
| 2.1 La programmation linéaire . . . . .                                 | 16        |
| 2.1.1 Technique de la programmation linéaire . . . . .                  | 16        |
| 2.1.2 Formulation mathématique d'un programme linéaire . . . . .        | 17        |
| 2.1.3 Structure d'un programme linéaire : . . . . .                     | 19        |
| 2.2 Résolution graphique d'un problème linéaire . . . . .               | 20        |
| 2.2.1 Technique de résolution graphique d'un PL : . . . . .             | 21        |
| 2.3 Méthode du simplexe . . . . .                                       | 25        |
| 2.3.1 Caractérisation des points extrêmes . . . . .                     | 26        |
| 2.3.2 Critère d'optimalité . . . . .                                    | 27        |
| 2.3.3 Algorithme du simplexe : . . . . .                                | 30        |
| 2.3.4 Algorithme du simplexe en tableau : . . . . .                     | 39        |
| 2.3.5 Changements de bases . . . . .                                    | 40        |

|          |                                                                   |           |
|----------|-------------------------------------------------------------------|-----------|
| 2.4      | Obtention d'une base réalisable de départ : . . . . .             | 42        |
| 2.4.1    | La méthode des deux phases . . . . .                              | 43        |
| 2.4.2    | La méthode du Big M (Pénalité) . . . . .                          | 46        |
| 2.4.3    | La Dualité en programmation linéaire . . . . .                    | 47        |
|          | Conclusion . . . . .                                              | 52        |
| <b>3</b> | <b>Méthode adaptée pour la résolution d'un programme linéaire</b> | <b>53</b> |
|          | Introduction . . . . .                                            | 53        |
| 3.1      | Position du problème et définitions . . . . .                     | 53        |
| 3.2      | Critère d'optimalité . . . . .                                    | 55        |
| 3.3      | Critère de suboptimalité . . . . .                                | 57        |
| 3.4      | Algorithme de la méthode . . . . .                                | 58        |
| 3.5      | Exemple numérique . . . . .                                       | 61        |
|          | Conclusion . . . . .                                              | 63        |
|          | <b>Conclusion générale</b>                                        | <b>64</b> |
|          | <b>Table des figures</b>                                          | <b>66</b> |
|          | <b>Table des tableaux</b>                                         | <b>67</b> |
|          | <b>Bibliographie</b>                                              | <b>68</b> |

# Introduction générale

La programmation linéaire est la branche des mathématiques qui étudie la résolution optimale de certains problèmes de minimisation ou maximisation d'une fonction linéaire, qui a le sens économique d'un coût ou d'un profit, sous des contraintes linéaires d'égalité et/ou d'inégalité.

Historiquement, la programmation linéaire a été développée en 1947 par George Bernard Dantzig, Marshall Wood et leurs collaborateurs au U.S. Département of the Air Force. Jusqu'en 1984, l'algorithme du simplexe était le seul algorithme connu et utilisé pour la résolution des problèmes linéaires. Actuellement, il existe d'autres méthodes concurrentes (la méthode développée par Khachian en 1979 puis, la méthode des points intérieurs développée par Karmarkar en 1984).

Outre une introduction, ce travail est constitué de trois chapitres et d'une conclusion. Le premier chapitre est consacré aux rappels sur l'algèbre linéaire, ainsi que la notion des ensembles et des fonctions convexes. Le deuxième chapitre traite quelques méthodes de résolution d'un problème linéaire, dont nous abordons : la méthode graphique ; la méthode du simplexe ; ainsi que la méthode des deux phases, la méthode du Big M et la méthode dual-simplexe qui sont tous basées sur la méthode du simplexe.

Le troisième chapitre, noyau du mémoire, est consacré à la résolution des problèmes de programmation linéaire avec contraintes d'égalité à variables bornées par la méthode adaptée qui généralise la méthode du simplexe. Cette méthode a été développée par R. GABASSOV et F.M KIRILLOVA dans les années 70, elle utilise une métrique différente de celle du simplexe, dite adaptée. Après l'introduction d'un nouveau concept qui est l'estimation de suboptimalité qui estime l'écart entre la valeur de la fonction objectif à une itération donnée et sa valeur optimale, nous présentons l'algorithme de résolution, illustré par un exemple numérique. Finalement, ce mémoire s'achève par une conclusion générale et une bibliographie.

# Chapitre 1

## Préliminaires

### Introduction

Dans ce chapitre, nous allons présenter, brièvement, quelques notions et propriétés sur l'algèbre linéaire. Tout d'abord, nous définissons certains types de matrices dont on va utiliser leur propriétés dans la suite du mémoire, ainsi que la notion des ensembles et des fonctions convexes, en suite, on rappelle quelques notions importantes, pour l'étude théorique.

### 1.1 Rappels d'algèbre matricielle :

Une matrice est un tableau rectangulaire de nombres réels, il peut être représenter de la manière suivante :

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Les termes représentés dans le tableau constituent les éléments de la matrice. Ces éléments, notés  $a_{ij}$ , sont caractérisés par leur valeur et leur position. L'indice de ligne  $i$  et l'indice de colonne  $j$  indique la position d'un élément dans la matrice. Ainsi, l'élément  $a_{ij}$  se trouve dans la  $i^{\text{ème}}$  ligne et la  $j^{\text{ème}}$  colonne. Une matrice composée de  $m$  lignes et  $n$  colonnes est dite d'ordre  $(m \times n)$ .

Une matrice d'ordre  $(m \times 1)$  est appelée vecteur-colonne, tandis qu'une matrice d'ordre  $(1 \times n)$  est appelée vecteur-ligne. Une matrice dont le nombre de lignes est

égal au nombre de colonnes est une matrice carrée d'ordre  $n$ .

### 1.1.1 Définitions

#### Matrice nulle :

La matrice nulle, notée  $0$  n'est composée que des  $0$ .

#### Matrice diagonale :

Il s'agit d'une matrice  $A$  carrée telle que :

$$a_{ij} = d_{ij}, \text{ si } i = j$$

$$a_{ij} = 0, \text{ si } i \neq j.$$

#### Matrice identité(unité) :

La matrice identité est une matrice carrée contenant le chiffre  $1$  sur la diagonale principale et des  $0$  partout ailleurs. Elle est notée  $Id$  ou bien  $I$ .

#### Matrice symétrique :

Une matrice carrée  $A$  est appelé matrice symétrique si  $A = A^T$ .

#### Matrice triangulaire supérieure :

Soit  $A$  une matrice carrée. On dit que  $A$  est une matrice triangulaire supérieure si :

$$a_{ij} = 0, \text{ pour } i > j.$$

#### Matrice inversible :

Une matrice  $A$  est dit *inversible*, ou non singulière ou régulière, s'il existe une matrice  $A^{-1}$  telle que :

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

$I$  étant la matrice unité.

En outre, on dit que  $A$  est inversible si et seulement si tous les vecteurs colonnes et lignes sont linéairement indépendant.

### Transposée d'une Matrice :

Soit  $A$  une matrice dont les éléments sont notés  $a_{ij}$ , où  $i$  désigne la ligne et  $j$  la colonne. La matrice  $B$  est la *transposée* de  $A$  si :

$$b_{ij} = a_{ji}, \quad \forall i \text{ et } \forall j.$$

On notera  $B = A^T$ . On a :

$$(A^T)^T = A, \quad (AB)^T = B^T A^T, \quad (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

On notera souvent  $A^{-T} = (A^{-1})^T$ .

### 1.1.2 Déterminant

À chaque matrice carrée  $A$ , on associe un nombre appelé déterminant que l'on note  $\det(A)$  ou simplement  $|A|$ .

Pour calculer le déterminant d'une matrice carrée  $A(n \times n)$  on utilise le cofacteur  $A_{ij}$  de l'élément  $a_{ij}$ , tel que :  $A_{ij}$  est égal au déterminant de la sous-matrice obtenue à partir de la matrice originale lorsque l'on a éliminé la  $i^{\text{ème}}$  ligne et la  $j^{\text{ème}}$  colonne,

multiplié par  $(-1)^{i+j}$ . Par exemple soit la matrice  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ ,

alors le cofacteur de l'élément  $a_{11}$  est  $A_{11}$  tel que :

$$A_{11} = (-1)^{(1+1)} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = (-1)^{(1+1)}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}).$$

Et le cofacteur de l'élément  $a_{22}$  par exemple est  $A_{22}$  tel que :

$$A_{22} = (-1)^{(2+2)} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} = (-1)^{(2+2)}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}).$$

De la même manière on calcule les autres cofacteurs.

Donc :

$$\det(A) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^n a_{ij}A_{ij}.$$

- Si :  $n = 1$       $A = (a)$ ,  $\det(A) = a$ .
- Si :  $n = 2$       $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ,  $\det(A) = ad - bc$ .

### 1.1.3 Indépendance linéaire :

Avant d'introduire la notion de l'indépendance linéaire, il convient de rappeler quelques notions essentielles concernant les vecteurs.



Chaque colonne d'une matrice peut être considérée comme un vecteur ; par convention, un vecteur est toujours un vecteur-colonne. Chaque ligne d'une matrice peut aussi être considérée comme un vecteur-ligne et correspond à la transposée d'un vecteur-colonne.

Les éléments d'un vecteur sont appelés composantes de ce vecteur, lorsqu'un vecteur possède  $n$  composantes, on dit qu'il est de dimension  $n$ .

**Définition 1.1** : Les vecteurs  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sont dits linéairement indépendants si et seulement s'il existe des constantes  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  tel que :

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0,$$

Sinon ils sont linéairement dépendants ou lié.

### 1.1.4 Inverse d'une matrice

Nous avons vu précédemment qu'à chaque élément  $a_{ij}$  de la matrice  $A$  correspond un cofacteur  $A_{ij}$ . Nous pouvons, dès lors, former la matrice des cofacteurs  $(A_{ij})$ . Cette matrice sera notée  $A^c$ , donc :

$$A^c = (A_{ij}) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

On dit que l'inverse de  $A$  existe si et seulement si :  $\det(A) \neq 0$ . Dans ce cas,  $A$  est dite non-singulière, et :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (A^c)^T.$$

### 1.1.5 Rang d'une matrice :

Avant d'introduire la notion de rang d'une matrice, rappelons qu'une sous matrice de  $A$  est une matrice obtenue de  $A$  en éliminant un certain nombre de lignes et de colonnes.

La plus grande sous-matrice est la matrice  $A$  elle-même tandis que la plus petite n'est composée que d'un seul élément de  $A$ .

**Remarque 1.1** : L'ordre maximum d'une sous-matrice carrée d'une matrice  $A$  d'ordre  $(m \times n)$  est égal au plus petit des entiers  $m$  et  $n$ .

Soit  $r$  un nombre entier tel que  $r \leq \min(m \times n)$ . Le rang d'une matrice  $A$  d'ordre  $(m \times n)$  est égal à  $r$  s'il existe au moins une sous-matrice carrée d'ordre  $r$  qui est non-singulière et si toutes les sous matrices carrées d'ordre supérieur à  $r$  sont singulières.

**Définition 1.2 :** *Le rang d'une matrice  $A$  est égal à l'ordre de la plus grande sous-matrice carrée de  $A$  non-singulière.*

Dans le cas d'une matrice nulle, on dit que le rang est zéro. Lorsque le rang  $r$  d'une matrice est maximal :  $r = \min(m, n)$  ; la matrice est dite de rang plein.

**Propriété :** Si le rang d'une matrice quelconque  $A$  est égal à  $r$ , alors il y a exactement  $r$  colonnes et  $r$  lignes linéairement indépendantes.

## 1.2 Notions sur la convexité

### 1.2.1 Ensembles convexes

Soit  $x_1$  et  $x_2$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ . Le segment de droite joignant l'extrémité de ces vecteurs est l'ensemble des points :

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n / x = (1 - \alpha)x_1 + \alpha x_2, \alpha \in [0, 1]\}.$$

**Définition 1.3 :** *Un ensemble  $C$  de  $\mathbb{R}^n$  est dit **convexe** si :*

$$\forall x_1, x_2 \in C, \alpha \in [0, 1], \text{ on a : } (1 - \alpha)x_1 + \alpha x_2 \in C.$$

**Exemple :**

1. La boule unité  $U = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \leq 1\}$  est un ensemble convexe.
2. Les ensembles suivantes (où  $\beta$  est un réel et  $b \in \mathbb{R}^n$ ) :  $\{x \in \mathbb{R}^n, b^T x \geq \beta\}$  et  $\{x \in \mathbb{R}^n, b^T x \leq \beta\}$  sont appelés demi-espaces fermés, et les ensembles :  $\{x \in \mathbb{R}^n, b^T x > \beta\}$ , et  $\{x \in \mathbb{R}^n, b^T x < \beta\}$  sont appelés demi-espaces ouverts. Les deux demi-espaces (fermés et ouverts) sont convexes.
3. Les ensembles de la forme :  $P = \{x \in \mathbb{R}^n, Ax \leq b\}$  où  $A$  est une  $(m \times n)$  matrice réelle et  $b \in \mathbb{R}^m$  sont appelés polyèdres. Les polyèdres sont convexes et fermés.

**Définition 1.4 :** *On appelle combinaison convexe de  $m$ -vecteur de  $\mathbb{R}^n$ ,  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , le point*

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_m x_m \quad \text{ou} \quad \alpha_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, m \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1.$$

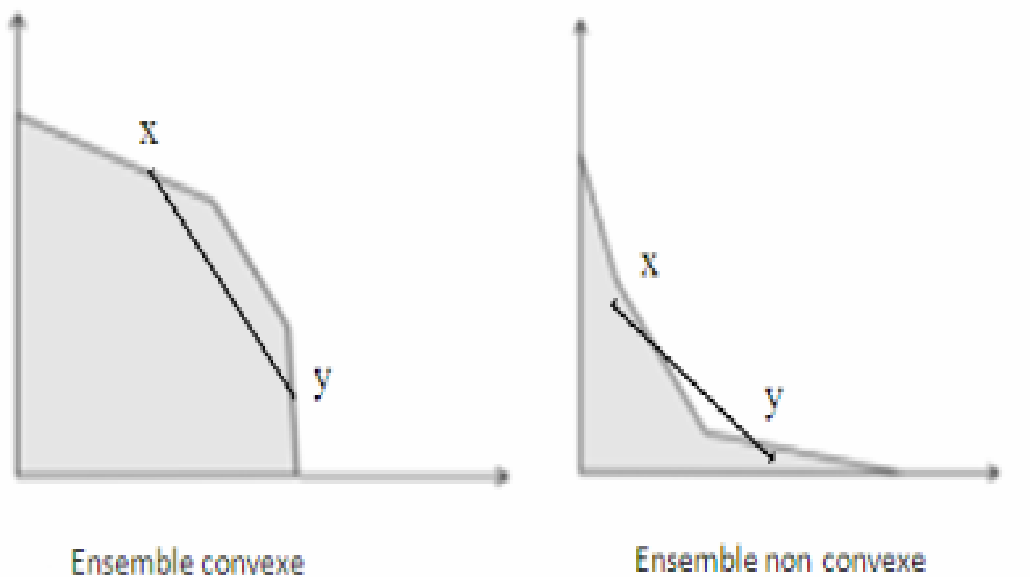


FIGURE 1.1 – Ensembles convexes et non convexes

**Définition 1.5 :** Soit  $C$  un convexe non vide de  $\mathbb{R}^n$  et  $x \in C$ , le point  $x$  est un **point extrême (point sommet)** s'il ne peut être exprimé comme combinaison linéaire convexe de deux autres points de  $C$  (s'il n'est pas à l'intérieur d'un segment de droite contenue dans  $C$ ). Autrement dit  $x$  est un point extrême de  $C$  si et seulement si :

$$\forall x_1, x_2 \in C, \forall \alpha \in ]0, 1[, x = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \Rightarrow x = x_1 = x_2.$$

**Définition 1.6 :** soit  $S$  un sous ensemble de  $\mathbb{R}^n$  : On appelle **enveloppe convexe** de  $S$  l'intersection de toutes les ensembles convexes contenant  $S$ . On le note **Conv(S)**, c'est le plus petit ensemble convexe de  $\mathbb{R}^n$  qui contient  $S$ .

**Définition 1.7 :** l'enveloppe convexe d'un sous ensemble finie de  $\mathbb{R}^n$  :  $\text{Conv}(\{x_1, x_2, \dots, x_{k+1}\})$  est appelée **polytope**.

**Remarque 1.2 :**

1. Un polytope est toujours fermé et borné (un compacte).
2. Notons que tout polytope est un polyèdre bornée.
3. Le nombre de vecteurs linéairement indépendants dans  $\mathbb{R}^n$  ne dépasse pas  $n$ , alors il ne peut y avoir de simplexe dans  $\mathbb{R}^n$  possédant plus que  $n + 1$  sommets.

## 1.2.2 Fonctions convexes

**Définition 1.8** : Une fonction  $F : S \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  définie sur un ensemble convexe  $S$  est dite convexe si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in S^2, \forall \lambda \in [0, 1], F(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda F(x) + (1 - \lambda)F(y).$$

$F$  est dite strictement convexe si l'inégalité stricte est vérifiée pour  $x \neq y$  et  $\lambda \in ]0, 1[$ .

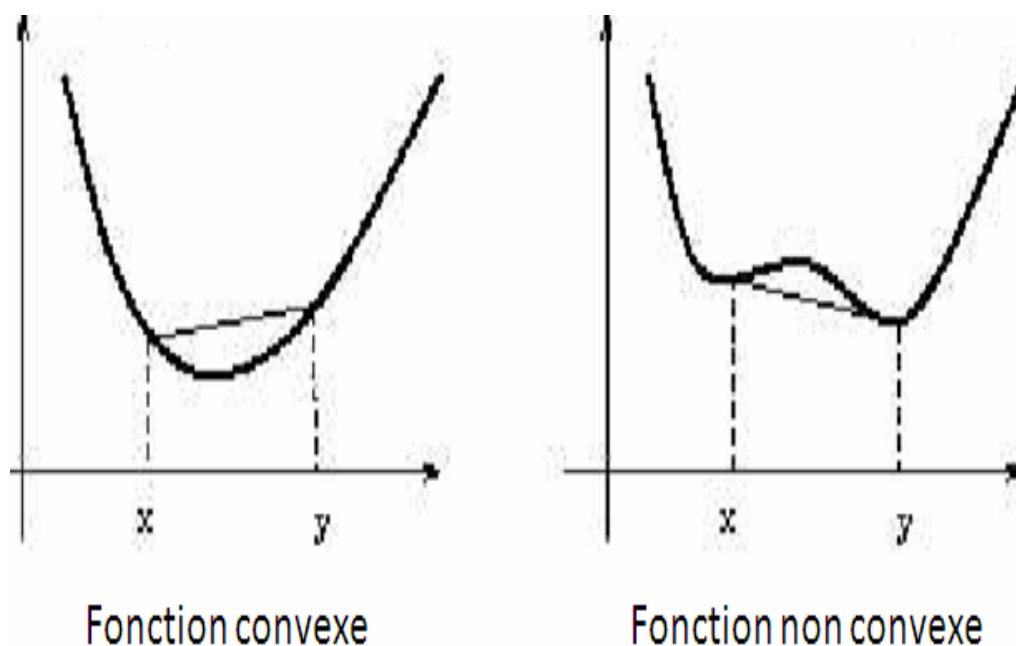


FIGURE 1.2 – Fonctions convexes et non convexes.

**Définition 1.9** : Une fonction  $F : S \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  définie sur un ensemble convexe  $S$  est dite concave si et seulement si :  $(-F)$  est convexe.

**Proposition** : Une fonction  $F : S \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est convexe si son épigraphe  $\text{epi}(F)$  est un ensemble convexe de  $\mathbb{R}^{n+1}$  c'est-à-dire :

$$F \text{ est convexe} \Leftrightarrow \text{epi}(F) = \{(x, \alpha) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} / F(x) \leq \alpha\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \text{ est convexe.}$$

**Remarque 1.3** : si  $F$  est une fonction affine ( $F(x) = c^T x + b / c \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}$ ) alors  $F$  est à la fois convexe et concave.

## 1.3 Inéquations linéaires :

Par opposition à une équation linéaire, une inéquation linéaire est obtenue en remplaçant le signe d'égalité par un signe d'inégalité :

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \begin{pmatrix} \leq \\ \geq \end{pmatrix} b.$$

L'ensemble des valeurs des variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$  qui vérifient cette inéquation est appelé solution de l'inéquation linéaire. Il s'agit d'un demi-espace ouvert ou fermé selon que l'inégalité est respectivement stricte ( $<, >$ ) ou large ( $\leq, \geq$ ). Un système d'inéquations linéaires s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m. \end{cases}$$

Sous la forme matricielle il est donné par :  $Ax \leq b$ .

Dans le plan  $\mathbb{R}^2$  une inéquation linéaire est une inéquation qui peut être écrite sous l'une des formes suivantes :

$$ax + by < c, \quad ax + by > c, \quad ax + by \leq c, \quad ax + by \geq c.$$

où  $a, b$  et  $c$  sont des nombres réels.

Graphiquement, la droite  $ax + by = c$  sépare le plan en deux demi-plans. Les solutions d'une inéquation linéaire sont tous les points de l'un de ces demi-plans la droite frontière étant incluse pour  $\leq$  ou  $\geq$ , et elle n'est pas incluse pour  $<$  ou  $>$ .

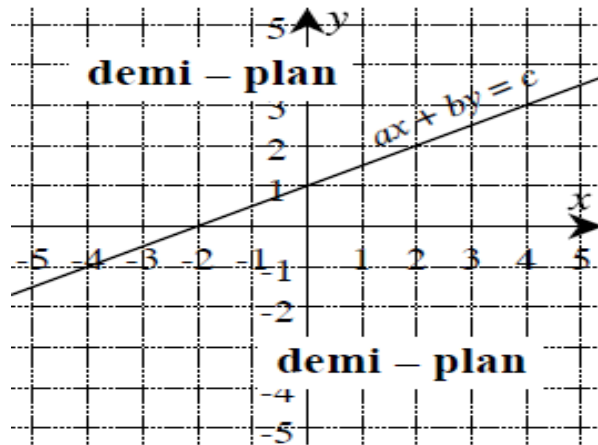


FIGURE 1.3 – Les demi-plans de  $\mathbb{R}^2$ .

Les solutions d'un système d'inéquations sont les solutions communes à toutes les inéquations du système. Le graphique d'un système d'inéquations correspond à une région  $S$  du plan contenant les solutions. Dans le cadre de la programmation linéaire, cette région sera appelée **polygone** dans le cas de deux variables et **polyèdre des contraintes** dans le cas générale.

## 1.4 Résolution des systèmes linéaires par la méthode de Gauss :

On appelle système d'équation à  $n$  inconnu  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , la famille d'équations :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Ce système peut se mettre sous la forme :  $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ ;  
où  $A = (a_{ij}), 1 \leq i \leq m$  et  $1 \leq j \leq n$ , alors  $A$  est une  $(m \times n)$  matrice réelle donnée par ses éléments  $a_{ij}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$  de composantes  $(b_1, b_2, \dots, b_m)$  et  $x$  est le vecteur inconnu de composantes  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

**Théorème 1.1** : Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  une matrice carrée réelle, une condition nécessaire et suffisante pour que le système  $Ax = b$  admet une solution unique est que  $A$  soit inversible, autrement dit  $\det(A) \neq 0$ , et dans ce cas le système est dit système de Cramer.

### Résolution d'un système triangulaire supérieur :

Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  une matrice carrée réelle, elle est dite triangulaire supérieur si  $a_{ij} = 0, \forall i > j$ ; dans ce cas le système  $Ax = b$  est dit triangulaire supérieur, il est de la forme :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \phantom{a_{11}x_1} a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \phantom{a_{11}x_1} \phantom{a_{22}x_2} a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Si  $a_{kk} \neq 0, \forall k \in [1, n]$ , alors le système admet une solution unique  $x^*$ , telle que :

$$x_k^* = \frac{b_k - \sum_{j=k+1}^n a_{kj}x_j}{a_{kk}}; \quad k = n, n-1, \dots, 1.$$

### Méthode de Gauss :

Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  une matrice carrée donnée et  $b \in \mathbb{R}^n$ , on cherche une solution du système :  $Ax=b$ .

La méthode de Gauss consiste à construire un système équivalent plus facile à résoudre (à matrice triangulaire supérieur).

**Remarque 1.4 :** Les transformations élémentaires suivantes appliquée à un système linéaire nous donne un autre système linéaire équivalent :

- Une équation peut être remplacée par cette même équation dont on ajoute ou retranche une autre équation.
- La multiplication de l'équation par une constante non nul.
- La permutation de deux équations ou deux variables.

On écrit  $Ax = b$  sous la forme  $A^{(1)}x = b^{(1)}$  avec  $A^{(1)} = (a_{ij}^{(1)}) = A$  et  $b^{(1)} = (b_j^{(1)}) = b$ .

On peut supposer que même si on permute des lignes ou des colonnes de  $A^{(1)}$ ,  $a_{11}^{(1)} \neq 0$ , tel que  $a_{11}^{(1)}$  est le premier pivot de l'élimination.

Pour  $i=2,3,\dots,n$ , on multiplie la 1<sup>ère</sup> équation par :  $g_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}}$ ; ( la 1<sup>ère</sup> équation est :  $a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \dots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)}$ ), et on retranche de la  $i^{\text{ème}}$  équation de  $A^{(1)}x = b^{(1)}$ , on obtient :  $A^{(2)}x = b^{(2)}$ , où :

$$A^{(2)} = (a_{ij}^{(2)}) \quad ; \quad b^{(2)} = (b_j^{(2)}).$$

$$a_{1j}^{(2)} = a_{1j}^{(1)}; \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

$$a_{i1}^{(2)} = 0; \quad i = 2, 3, \dots, n;$$

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - g_{i1}a_{ij}^{(1)}; \quad i = 2, 3, \dots, n; \quad j = 2, 3, \dots, n;$$

$$b_1^{(2)} = b_1^{(1)};$$

$$b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - g_{i1}b_1^{(1)}; \quad i = 2, 3, \dots, n;$$

Plus précisément on a :

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} \end{pmatrix}; \quad b^{(2)} = \begin{pmatrix} b_1^{(2)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Soit  $\tilde{A} \in M_{n,n+1}(\mathbb{R})$  avec :

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}$$

On définit :  $\tilde{A}^{(2)} = (A^{(2)} \setminus b^{(2)})$  par :

$$\begin{cases} a_{1j}^{(2)} = a_{1j}^{(1)}, & j = 1, 2, \dots, n; \\ a_{i1}^{(2)} = 0, & i = 2, 3, \dots, n; \\ a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - g_{i1}a_{i1}^{(1)}, & i = 2, 3, \dots, n, \quad j = 2, 3, \dots, n. \end{cases}$$

On passe à l'étape suivante, en considérant la matrice composée des  $(n-1)$  derniers lignes et  $n$  derniers colonnes de  $\tilde{A}^{(2)}$ .

Si on a le deuxième pivot  $a_{22}^{(2)} \neq 0$  (sinon on permute les lignes ou les colonnes), on construit donc une suite de systèmes équivalent de la forme :  $\tilde{A}^{(k)}x = b$  où les matrices  $\tilde{A}^{(k)}$  sont données sous la forme :

$$\tilde{A}^{(k)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ \vdots & \ddots & a_{k-1,k-1}^{(k-1)} & \cdots & a_{k-1,n}^{(k-1)} & b_{k-1}^{(k-1)} \\ 0 & 0 \cdots 0 & a_{kk}^{(k)} & \cdots & a_{kn}^{(k)} & b_k^{(k)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \vdots & 0 \cdots \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots 0 & \cdots a_{nk}^{(k)} & \cdots a_{nn}^{(k)} & b_n^{(k)} \end{pmatrix}$$

C'est-à-dire :  $\tilde{A}^{(k)} = (A^{(k)} \setminus b^{(k)})$  avec  $\det(\tilde{A}^{(k)}) \neq 0$ .

On peut passer au système  $\tilde{A}^{(k+1)}$  et supposer que  $a_{kk}^{(k)} \neq 0$  (ce terme s'appelle le  $k^{\text{ème}}$  pivot) pour  $i = k+1, \dots, n$ .

On multiplie la  $k^{\text{ème}}$  ligne de  $\tilde{A}^{(k)}$  par :  $g_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{kk}^{(k)}}$ , puis on retranche le résultat du



1<sup>er</sup> ligne, on obtient  $\tilde{A}^{(k+1)}$  définie par :

$$\begin{cases} a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)}; i = 1, \dots, k; j = 1, 2, \dots, n+1; \\ a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - g_{ik}a_{kj}^{(k)}; \quad i = k+1, \dots, n; \quad j = k+1, \dots, n+1; \\ \text{les autres éléments sont nulles.} \end{cases}$$

À la dernière étape, c'est-à-dire, pour  $k = n$  on obtient le système équivalent  $\tilde{A}^{(n)}x = b^{(n)}$  telle que :

$$\tilde{A}^{(n)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ \vdots & \ddots & a_{n-1n-1}^{(n-1)} & a_{n-1n}^{(n-1)} & b_{n-1}^{(n-1)} \\ 0 & \cdots & 0 \cdots 0 & \ddots a_{nn}^{(n)} & b_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

En effet, nous avons obtenus un système triangulaire supérieur.

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté des rappels et quelques notions nécessaires pour l'étude théorique dans le deuxième et le troisième chapitre.

# Chapitre 2

## Méthodes de résolution d'un problème linéaire

### Introduction

Après la formulation mathématique des problèmes de programmation linéaire, il devient essentiel d'essayer de voir comment les résoudre. Dans ce chapitre, on donne quelques méthodes de résolution tel que : la méthode graphique qui est employée pour résoudre les problèmes de dimension deux, ou trois ; la méthode du simplexe qui est la méthode classique la plus courante, elle permet de résoudre un problème linéaire sous forme standard ; et aussi la méthode de deux phases et du Big M qui permettent de trouver une base de départ (base unité) pour faire marcher l'algorithme du simplexe en tableau ; finalement, on présente la méthode dual-simplexe.

### 2.1 La programmation linéaire

La programmation linéaire peut se définir comme une technique mathématique permettant de résoudre les problèmes de décisions, particulièrement, ceux où le décideur cherche la meilleur utilisation de ressources pour atteindre un objectif spécifique comme la maximisation des bénéfices ou la minimisation des coûts. Elle est utilisée en particulier, dans l'industrie et dans la planification économique ...etc.

#### 2.1.1 Technique de la programmation linéaire

La mise en œuvre de la technique de la programmation linéaire peut être subdivisé en cinq étapes suivantes :

- **Première étape :** Identification du problème comme étant solvable par programmation linéaire. Cette identification est le fruit d'une expérience dans la modélisation mathématique des problèmes.
- **Deuxième étape :** Formulation du problème réel avec utilisation d'un modèle mathématique linéaire. Elle se fait en collaboration avec le décideur posant le problème.
- **Troisième étape :** Résolution du problème théorique en utilisant les techniques algorithmiques.
- **Quatrième étape :** Détermination d'une solution réelle à partir de la solution théorique.
- **Cinquième étape :** Vérification de la validité de la solution et modification nécessaire de la formulation mathématique. Cette étape permet d'affiner le modèle afin d'apporter une solution acceptable par le décideur.

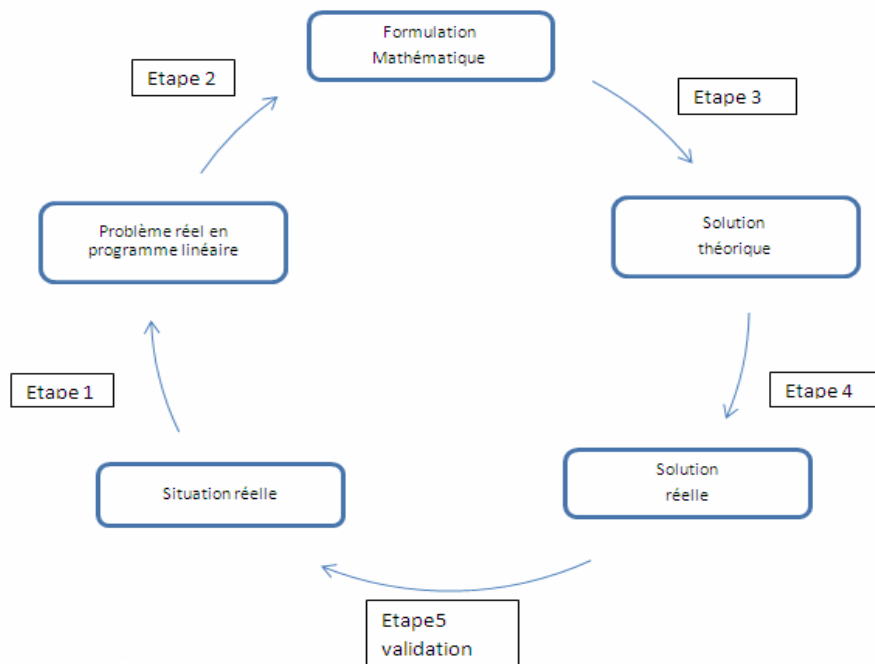


FIGURE 2.1 – Principe de la programmation linéaire

### 2.1.2 Formulation mathématique d'un programme linéaire

Généralement, il y a trois étapes à suivre pour pouvoir construire le modèle d'un programme linéaire :

- 1) Identifier des variables de décision, on suppose dans un premier temps que ces variables peuvent prendre n'importe quelle valeur positive.
- 2) Identifier les contraintes du problème et les exprimer par un système d'équation et/ou d'inéquation linéaire par rapport aux variables de décision.
- 3) Identifier la fonction à optimiser (la fonction objectif) et la représenter sous une forme linéaire par rapport aux variables de décision. De plus, il faut spécifier si la fonction objectif est à maximiser ou à minimiser.

**Exemple :**

Un menuisier désire fabriquer des tables et des chaises, il dispose de 50 unités de bois et de 90 heures de travail. La fabrication d'une table nécessite 10 unités de bois et 15 heures de travail, celle d'une chaise, 5 unités de bois et 10 heures de travail. Une table vendue procure au menuisier un profit de 800 DA ; une chaise un profit de 500 DA. Combien de tables et de chaises devrait il produire afin de maximiser son profit ?

**Formulation mathématique du problème :**

**1) Variables de décision :**

Pour modéliser le problème de ce menuisier, il est commode de commencer par identifier les variables de décision, dans cet exemple elles sont au nombre de deux et concernent le nombre de tables et le nombre de chaises à fabriquer, on les notera :

$x_1$  : nombre de tables.

$x_2$  : nombre de chaises.

**2) Contraintes du modèle :**

La première contrainte est relative à la quantité de bois dont dispose le menuisier qui ne peut exéder 50 unités, ainsi si le menuisier fabrique  $x_1$  tables et  $x_2$  chaises, il doit consommer respectivement  $(10.x_1)$  et  $(5.x_2)$  unités de bois, c'est-à-dire cette quantité de bois consommé  $(10x_1 + 5x_2)$  ne peut exéder les 50 unités de bois disponibles. Cette contrainte s'exprime par l'inégalité :  $10x_1 + 5x_2 \leq 50$ . La deuxième contrainte est relative au temps dont dispose le menuisier qui ne peut exéder 90 heures. La fabrication de  $x_1$  tables et de  $x_2$  chaises demande respectivement  $(15.x_1)$  et  $(10.x_2)$  heures de travail. Cette contrainte s'exprime par l'inégalité :  $15x_1 + 10x_2 \leq 90$ .

De plus les variables  $x_1$  et  $x_2$  ne peuvent être négatives puisqu'elles représentent

des entités physique concrets. D'ou les inégalités :

$$x_1 \geq 0 \quad \text{et} \quad x_2 \geq 0.$$

### 3)La fonction objectif :

La fonction objectif à optimiser dépend du nombre de tables et de chaises vendus et de leurs prix unitaires, et comme cette fonction concerne un profit, elle est donc à maximiser, si on la note par  $Z$ , elle peut s'écrire comme suit :

$$\text{Maximiser } Z = 800x_1 + 500x_2.$$

En effet, le modèle complet est le suivant :

$$(p) \begin{cases} \max Z = 800x_1 + 500x_2 \\ 10x_1 + 5x_2 \leq 50 \\ 15x_1 + 10x_2 \leq 90 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

### 2.1.3 Structure d'un programme linéaire :

Un programme linéaire s'écrit sous l'une des deux formes suivante :

#### a)La forme canonique :

$$(p) \begin{cases} \max Z(x) = c^T x \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

où :  $x \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, A(m \times n)$  matrice réelle.

#### b)La forme standard :

$$(p) \begin{cases} \max Z(x) = c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

où :  $x \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, A(m \times n)$  matrice réelle.

**Remarque 2.1 :**

1- On peut vérifier facilement l'équivalence entre les deux formes précédentes.

En effet, toute inégalité peut être transformée en une égalité par une addition d'une variable positive, dit variable d'écart comme suit :

$$a_i^T x \leq b_i \quad \Rightarrow \quad a_i^T x + e_i = b_i \quad e_i \geq 0.$$

Et toute égalité équivaut à deux inégalités comme suit :

$$a_i^T x = b_i \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a_i^T x \leq b_i \\ -a_i^T x \leq -b_i \end{cases}.$$

2- Pour trouver une solution optimale  $x^*$  d'un problème de minimisation, il suffit de multiplier la fonction objectif  $Z$  par  $(-1)$ , prendre  $\max Z = \min(-Z)$  et la valeur optimale s'obtient par :  $\max Z(x^*) = -\min(-Z(x^*))$ .

## 2.2 Résolution graphique d'un problème linéaire

L'objet principal de cette section est de proposer une méthode de résolution d'un problème linéaire ne comportant que deux variables de décision. La méthode consiste à délimiter l'intersection des demi-plans représentant les inéquations des contraintes et à rechercher sur le bord de ce domaine les points donnant l'optimum de la fonction objectif.

Avant de présenter la technique de la résolution, on va donner les définitions suivantes :

**Définition 2.1** Une solution  $x$  est dite **réalisable** (admissible), si elle vérifie toutes les contraintes.

**Définition 2.2** On appelle **domaine réalisable** (admissible), l'ensemble  $S$  des solutions réalisables (admissibles) du problème.

**Définition 2.3** On appelle **solution optimale**, toute solution réalisable donnant la meilleure évaluation de la fonction objectif.

### 2.2.1 Technique de résolution graphique d'un PL :

Il existe deux méthodes de résolution graphique d'un PL qui sont :

- **Première méthode :**

1. Représenter les lignes de contraintes et l'ensemble des solutions réalisables.
2. Localiser la solution optimale.
3. Calculer la solution optimale.

#### 1. Représentation des lignes de contraintes et l'ensemble des solutions réalisables :

Le domaine hachuré représente le domaine du plan formé par l'ensemble des points vérifiant toutes les contraintes (l'ensemble des solutions réalisables).

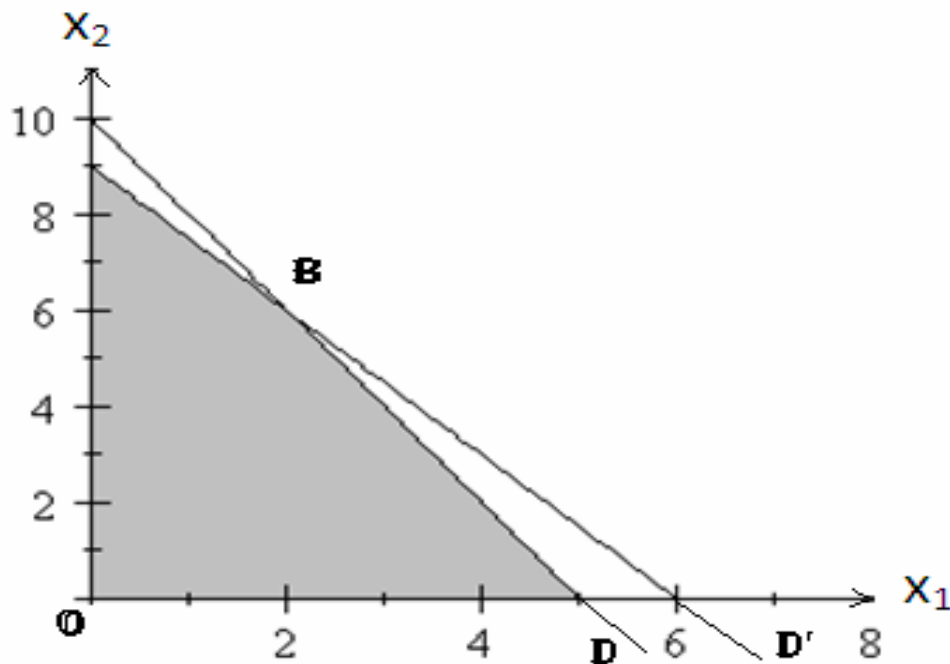


FIGURE 2.2 – Ensemble des solutions réalisables

**2. Localisation de la solution optimale :** Soit le problème de maximisation précédent :

$$(p) \begin{cases} \max Z = 800x_1 + 500x_2 \\ 10x_1 + 5x_2 \leq 50 \\ 15x_1 + 10x_2 \leq 90 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Posons  $Z = 800x_1 + 500x_2 = K$  qui représente l'équation des courbes de niveau. Donc, pour maximiser  $Z$ , on cherche la plus haute courbe de niveau qui a une intersection non vide avec le domaine des solutions réalisables. Tout point appartenant à cette intersection est une solution optimale .

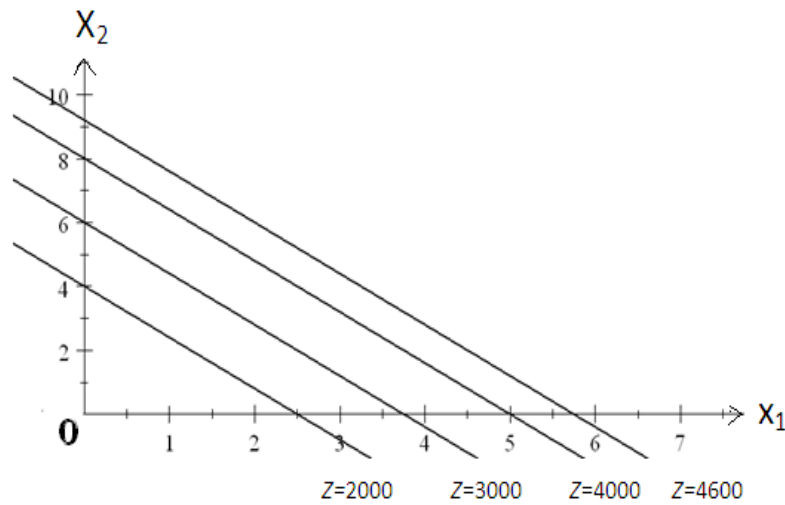


FIGURE 2.3 – Représentation de la fonction objectif

Pour minimiser le problème précédent, c'est-à-dire résoudre le problème P1 :

$$(P1) \begin{cases} \min Z = 800x_1 + 500x_2 \\ 10x_1 + 5x_2 \leq 50 \\ 15x_1 + 10x_2 \leq 90 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Ce problème de minimisation ne se diffère pas du problème de maximisation que par la recherche de la courbe de niveau qui donne la plus petite valeur à  $Z$ , tout en satisfaisant toutes les contraintes du modèle.



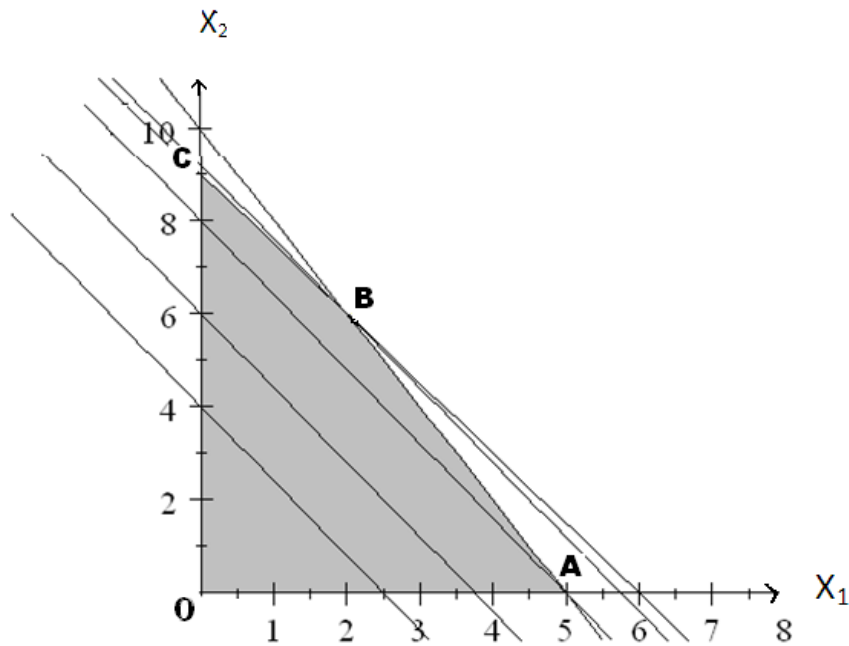


FIGURE 2.4 – Localisation de la solution optimale.

**3. Le calcul de la solution optimale :** On a localisé graphiquement la solution optimale, qui correspond au point d'intersection B des deux droites D et D' d'équation respectives :

$$10x_1 + 5x_2 = 50 \quad \text{et} \quad 15x_1 + 10x_2 = 90.$$

Donc :  $Z(x^*) = \max Z(x) = Z(x_1^* = 2, x_2^* = 6)^T = 4600$ .

● **Deuxième méthode :**

**Théorème 2.1 :** *La fonction objectif d'un PL atteint son maximum (ou minimum) en un point extrême de l'ensemble S des solution réalisable.*

Ce théorème nous assure que la solution optimale ne peut être que sur le bord du domaine des solutions réalisables, de plus, elle est dans le cas générale donné par un des points extrêmes correspondant aux intersections des droites de contraintes, ceci nous amène à présenter une deuxième méthode qui consiste à :

1. Représenter les lignes de contraintes et l'ensemble des solutions réalisables.
2. Localiser tous les points extrêmes (les points d'intersection des droites de contraintes).

3. Calculer la valeur de la fonction objectif en chacun de ces points, et sélectionner la solution optimale.

Dans l'exemple précédant, les quatre points extrêmes correspondent aux points suivante :

$$\begin{pmatrix} O(0,0) & Z = 0 \\ A(5,0) & Z = 4000 \\ B(2,6) & Z = 4600 \\ C(0,9) & Z = 4500 \end{pmatrix},$$

donc la solution optimale est  $x^* = (2,6)$  avec  $Z^* = 4600$ .

**Théorème 2.2** : *Le domaine admissible  $S$  d'un PL peut être :*

- *Vide* : Dans un tel cas le problème est non réalisable (et ne possède évidemment pas de solution optimale).
- *Borné (et non vide)* : Le problème possède toujours au moins une solution optimale quelle que soit la fonction objectif.
- *Non borné* : Dans ce cas, selon la fonction objectif choisie :  
 -Le problème peut posséder des solutions optimales infinie.  
 -Il peut exister des solution admissibles de valeur arbitrairement grande (ou petite) dans un tel cas le PL n'admet pas de solution.

**Théorème 2.3** : *Si la fonction objectif atteint son maximum en plusieurs points extrêmes, elle prendra alors cette même valeur maximale en tout point qui est combinaison linéaire convexe de ces points extrêmes. Autrement dit, l'ensemble des points maximums est convexe.*

**Preuve :**

On a la fonction  $Z(x) = c^T x$  est concave (car elle est linéaire) ; supposons  $(x^1, x^2) \in S^2$  deux points maximums de  $Z$  :

$$\Rightarrow Z(x^1) = Z(x^2) = \max_{x \in S} Z(x).$$

Soit  $y = \lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2$ ,  $\lambda \in [0, 1]$ , alors :

$$\begin{aligned} Z(\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2) &\geq \lambda Z(x^1) + (1 - \lambda)Z(x^2). \\ &\geq \lambda Z(x^1) + (1 - \lambda)Z(x^1) = Z(x^1). \\ \Rightarrow Z(y) &\geq Z(x^1) \Rightarrow y \text{ est un point maximum de } Z. \end{aligned}$$

En effet, l'ensemble des points maximums forme un ensemble convexe.

## 2.3 Méthode du simplexe

La méthode du simplexe à été créée par l'américain George Danzig (1914-2005) en 1947 et elle a été connue en 1951.

Le mot "simplexe" dans l'appellation de la méthode est dit :

- soit au fait que l'ensemble des contraintes  $S$  a toutes les propriétés mathématiques des simplexes.
- soit au fait que l'algorithme utilise les points sommets simples (non dégénérés) du polytope  $S$ .

### Définitions et résultats fondamentaux

Considérons le problème linéaire suivant :

$$(p) \begin{cases} \max Z(x) = c^T x \\ Ax = b \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, n}. \end{cases}$$

où :  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $c \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ ,  $A(m \times n)$  matrices réelles.

Soit :  $I = \{1, 2, \dots, m\}$  ensemble des indices lignes de  $A$  (les indices des contraintes) ;

$J = \{1, 2, \dots, n\}$  ensemble des indices colonnes de  $A$  (les indices des variables) ;

$A = A(I, J) = (a_1, a_2, \dots, a_n) = (a_j, j \in J)$  ie :  $a_j$  sont les colonnes de  $A$ .

avec  $\text{rang } A = m \leq n$ .

On pose :  $S = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b, x_j \geq 0, \forall j = \overline{1, n}\}$ .

$S$  est appelée l'ensemble des solutions réalisables (ensemble des contraintes), et  $Z(x)$  est la fonction objectif.

Le problème  $(P)$  consiste à trouver un point  $x^* \in S$  tel que :

$$Z(x^*) \geq Z(x), \forall x \in S \iff Z(x^*) = \max_{x \in S} Z(x)$$

(ie :  $x^*$  est la solution optimale de  $(P)$ ).

**Définition 2.4** : On appelle base du problème  $(P)$  toute sous-matrice carrée  $A_B = A(I, J_B)$  où  $J_B = \{j_1, j_2, \dots, j_m\} \subset J$ , tel que :  $\det(A_B) \neq 0$ .

Soit  $A_B$  une base du problème  $(P)$ , posons :  $J_N = J \setminus J_B$  ;

Donc :  $A = [A_B \mid A_N]$ , tel que :  $A_N = A(I, J_N)$  est une sous-matrice de  $A$  de type  $(m, (n - m))$ , formée des vecteurs de  $A$  qui ne sont pas dans la base  $A_B$ , ces vecteurs s'appellent les vecteurs non basique (ou bien hors base).

De même on peut partitionner  $x$  et  $c$  comme suit :

$$x^T = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}.$$

$x_B$  : est le vecteur de variables de base ;

$x_N$  : est le vecteur de variables hors base.

$$c^T = (c_1, c_2, \dots, c_n), \quad c = \begin{pmatrix} c_B \\ c_N \end{pmatrix},$$

tel que  $c_B$  et  $c_N$  sont les vecteurs correspond aux vecteurs de variables de base et hors base respectivement.

En effet on aura :

$$A_B x_B + A_N x_N = b. \quad (2.1)$$

On appelle *solution de base* (associée à la base  $A_B$ ), la solution particulière de l'équation (2.1) obtenue en posant  $x_N = 0$ .

$x_B$  est alors déterminé d'une façon unique en résolvant le système :  $A_B x_B = b$ .

Ce qui donne :  $x_B = A_B^{-1}b$ , donc :

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} \text{ est la solution de base.}$$

Une solution de base est dite réalisable si  $x_B \geq 0$ , c'est-à-dire :  $A_B^{-1}b \geq 0$ .

La base correspondante à la solution de base réalisable est appelée base réalisable.

Une solution de base réalisable est dite *dégénéré* si le vecteur  $x_B = A_B^{-1}b$  a des composantes nulles, et elle est dite *non dégénéré* ou bien *simple* si :  $x_B = A_B^{-1}b > 0$ .

### 2.3.1 Caractérisation des points extrêmes

**Théorème 2.4** Soit le programme linéaire :

$$(p) \quad \begin{cases} \max Z(x) = c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Soit le polyèdre convexe  $S = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b, x \geq 0\}$ , alors :  
 $(x \in S \text{ est solution de base réalisable}) \Leftrightarrow (x \in S \text{ est point sommet de } S)$ .

### Corollaire :

Le polyèdre convexe  $S = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b, x \geq 0, \}$  a un nombre fini de points extrêmes qui ne dépasse pas  $C_n^m$ .

Autrement dit, le nombre de points extrêmes de  $S \leq C_n^m$ , où  $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ .

### 2.3.2 Critère d'optimalité

#### Formule de l'accroissement de la fonction objectif :

Considérons le problème de programmation linéaire suivant :

$$(P) \begin{cases} \max Z(x) = c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

avec :  $A = A(I, J)$ ;  $I = \{1, 2, \dots, m\}$ ;  $J = \{1, 2, \dots, n\}$  et  $\text{rang } A = m$ .

Soit  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  une solution de base réalisable, et  $A_B = A(I, J_B)$  la matrice de base associée, avec  $J_B$  est les indice de base.

Soient  $J_N = J \setminus J_B$ ,  $A_N = A(I, J_N)$ , et  $x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$  tel que :  
 $x_B = \{x_j, j \in J_B\} = x(J_B)$ ,  $x_N = \{x_j, j \in J_N\} = x(J_N)$ .  
 $c = \begin{pmatrix} c_B \\ c_N \end{pmatrix}$ , tel que :  $c_B = \{c_j, j \in J_B\} = c(J_B)$ ,  $c_N = \{c_j, j \in J_N\} = c(J_N)$ .

Introduisons une autre solution de base réalisable  $\bar{x}$  quelconque tel que :

$$\bar{x} = x + \Delta x \text{ alors : } \Delta Z = c^T \bar{x} - c^T x = c^T (x + \Delta x) - c^T x,$$

alors on aura :

$$\Delta Z = c^T \Delta x. \quad (2.2)$$

Comme  $x$  et  $\bar{x}$  sont tout les deux des solutions réalisables alors :

$$\begin{cases} Ax = b \\ A\bar{x} = b \end{cases} \Rightarrow A(\bar{x} - x) = 0 \Rightarrow A \Delta x = 0$$

$$A \Delta x = A_B \Delta x_B + A_N \Delta x_N = 0 \quad (2.3)$$

$$\Rightarrow \Delta x_B = -A_B^{-1} A_N \Delta x_N. \quad (2.4)$$

De (2.2) et (2.3) on aura :  $\Delta Z = c^T \Delta x = c_B^T (-A_B^{-1} A_N \Delta x_N) + c_N^T \Delta x_N$

$$\Rightarrow \Delta Z = -(c_B^T A_B^{-1} A_N - c_N^T) \Delta x_N. \quad (2.5)$$

Construisons le vecteur des potentiels  $U = U(I) \in \mathbb{R}^m$ , donné par :

$$U^T = c_B^T A_B^{-1}, \quad (2.6)$$

et le vecteur des estimations  $E = E(J) \in \mathbb{R}^n$  donné par  $E^T = U^T A - c^T$ , en effet, on aura :

$$\begin{cases} E_B^T = E(J_B) = U^T A_B - c_B^T = 0, \\ E_N^T = E(J_N) = U^T A_N - c_N^T. \end{cases} \quad (2.7)$$

De (2.6) et (2.7) on aura :

$$\Delta Z = -(U^T A_N - c_N^T) \Delta x_N = E_N^T \Delta x_N$$

,  
donc :

$$\Delta Z = - \sum_{j \in J_N} E_j \Delta x_j. \quad (2.8)$$

### Critère d'optimalité :

Soit  $x$  solution de base réalisable du problème  $(P)$  avec  $A_B = A(I, J_B)$  la base associée.

### Théorème 2.5 (*Critère d'optimalité*) :

1) *L'inégalité :*

$$E_N = E(J_N) \geq 0, \quad (2.9)$$

*est suffisante pour l'optimalité de la solution de base réalisable  $x$ .  
ie :  $E_N \geq 0 \Rightarrow x$  est une solution optimale.*

2) *Cette même condition est aussi nécessaire si  $x$  est non dégénérée.*

### Preuve :

1) On montre que si " $E_N \geq 0 \Rightarrow x$  est une solution optimale", on a  $x$  est une solution de base réalisable  $\Rightarrow x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$ ,  $x_B \geq 0$  et  $x_N = 0$ .

Soit  $\bar{x}$  une solution de base réalisable quelconque et  $\bar{x}_N \geq 0$  alors :

$$\Delta x_N = \bar{x}_N - x_N = \bar{x}_N \geq 0.$$

De (2.8) on a :  $\Delta Z = Z(\bar{x}) - Z(x) = -E_N^T \Delta x_N$ .

si :  $E_N \geq 0 \Rightarrow \Delta Z = -E_N^T \Delta x_N \leq 0$ .

$$\Rightarrow Z(x) \geq Z(\bar{x}), \forall \bar{x} \in S.$$

$\Rightarrow x$  est une solution optimale du problème  $(P)$ .

2) On montre que si  $x$  est une solution optimale non dégénéré du  $(P) \Rightarrow E_N \geq 0$  :

On a :  $x$  est une solution optimale non dégénéré c'est-à-dire :

$$x_j > 0, \forall j \in J_B. \quad (2.10)$$

Démontrons par absurde l'implication ( " $\Leftarrow$ " ) :

Alors supposons que  $E_N \not\geq 0$ , c'est-à-dire :  $\exists j_0 \in J_N$  tel que  $E_{j_0} < 0$ .

Construisons alors un vecteur  $\bar{x}$  de la forme :

$\bar{x} = x + \theta l$  avec :  $\theta \geq 0 \in \mathbb{R}$  et  $l \in \mathbb{R}^n$  tel que :

$$Al = 0. \quad (2.11)$$

$$l_j = \begin{cases} 1 & \text{si } j = j_0 \\ 0 & \text{si } j \neq j_0 \end{cases}, \quad j \in J_N.$$

$l = \begin{pmatrix} l_B \\ l_N \end{pmatrix}$ , tel que :  $l_B = l(J_B), l_N = l(J_N)$ .

On a :  $A\bar{x} = Ax + \theta Al = Ax = b$ . (car  $Al = 0$ ).

$\bar{x}_B = x_B + \theta l_B \bar{x}$  vérifie les contraintes.

De (2.11) on aura :  $Al = A_B l_B + A_N l_N = 0$

$\Rightarrow l_B = -A_B^{-1} A_N l_N$ , on a :  $A_N l_N = a_{j_0}$ .

$$\Rightarrow l_B = -A_B^{-1} a_{j_0}. \quad (2.12)$$

Donc :

$$\begin{aligned} \bar{x}_B &= x_B + \theta l_B \\ &= x_B - \theta A_B^{-1} a_{j_0}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\bar{x}_N = x_N + \theta l_N = \theta l_N \geq 0. \quad (2.14)$$

De (2.13) et (2.10) on déduit que pour un  $\theta$  suffisamment petit,  $\bar{x}_B \geq 0$ .

Donc on a :

$$\begin{cases} A\bar{x} = b \\ \bar{x} \geq 0 \end{cases} \implies \bar{x} \text{ est une solution réalisable de (P).}$$

De (2.8) on aura :

$$\begin{aligned} \Delta Z &= c^T \bar{x} - c^T x = - \sum_{j \in J_N} E_j \Delta x_j \\ &= -\theta \sum_{j \in J_N} E_j l_j = -\theta E_{j_0} > 0. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Alors  $\exists \bar{x} \in S$ , tel que :  $Z(\bar{x}) > Z(x)$ ;  $\forall x \in S$ , donc :

$x$  n'est pas une solution optimale de (P).

$E_N \not\geq 0 \Rightarrow x$  n'est pas optimale.

En effet, si  $x$  est une solution optimale non dégénéré  $\Rightarrow E_N \geq 0$ .

### Condition suffisante pour l'existence d'une solution optimale non borné :

Soit le problème :

$$(P) \begin{cases} \max Z(x) = c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Admettons que pour une solution réalisable de base  $x$ , le critère d'optimalité (2.9) n'est pas vérifié, c'est-à-dire :  $\exists j_0 \in J_N$  tel que :  $E_{j_0} < 0$ .

On utilise les relations (2.13) et (2.14), si :  $A_B^{-1}a_{j_0} \leq 0$  on aura :

$$\begin{cases} \bar{x}_B = x_B - \theta A_B^{-1}a_{j_0} \geq 0, & \forall \theta \geq 0. \\ \bar{x}_N = x_N + \theta l_N \geq 0. \end{cases}$$

Alors  $\bar{x}$  est une solution réalisable.

De (2.15) on a :

$$\Delta Z = -\theta E_{j_0} \geq 0, \forall \theta \geq 0 \Rightarrow \quad \text{si } \theta \nearrow \quad \text{alors} \quad \Delta Z \nearrow.$$

**Théorème 2.6** : *Si parmi les composantes non basiques du vecteur d'estimation  $E_N$ , il existe une composante  $E_{j_0} < 0$  qui correspond au vecteur  $A_B^{-1}a_{j_0} \leq 0$ , alors la fonction objectif n'atteint pas son maximum c'est-à-dire : le problème est non borné.*

### 2.3.3 Algorithme du simplexe :

#### Principe de la méthode :

Géométriquement, l'algorithme du simplexe s'interprète comme un cheminement d'un point extrême à un autre point extrême adjacent de long de la frontière de  $S$  ( $S$  est l'ensemble des solutions réalisables).

Algébriquement, la procédure s'interprète comme la détermination d'une suite de bases adjacentes  $A_{B_0}, A_{B_1}, \dots, A_{B_k}$  et de solution de base réalisable  $x^0, x^1, \dots, x^k$ , jusqu'à l'obtention d'une base optimale et ainsi une solution optimale.

#### Amélioration de la fonction objectif

Soit  $x$  une solution de base réalisable du problème  $(P)$  et  $A_B = A(I, J_B)$  la base associée.

- 1) Si le critère d'optimalité (2.9) est vérifié alors  $x$  est solution optimale de problème  $(P)$ .



2) Sinon, deux cas peuvent se représenter :

i)  $\exists j_0 \in J_N$  telle que :  $E_{j_0} < 0$  et  $A_B^{-1}a_{j_0} \leq 0$ , alors le problème (P) est non borné (d'après le théorème(2.3)).

ii) Pour  $j_0 \in J_N$  tel que :  $E_{j_0} < 0$  et le vecteur  $A_B^{-1}a_{j_0}$  possède des composantes positives alors avec l'algorithme du simplexe on construit une nouvelle solution, qui assure un accroissement maximal de la fonction objectif d'après la relation (2.15).

Alors, il faudra choisir le nombre  $\theta$  aussi grand que possible et l'indice  $j_0$  tel que :

$$E_{j_0} = \min[E_j, j \in J_N]. \quad (2.16)$$

On prend  $\theta$  le plus grand possible tel que le vecteur  $\bar{x}$  donné par les relations (2.13) et (2.14) soit une solution réalisable :

$$\begin{cases} \bar{x}_B = x_B - \theta A_B^{-1}a_{j_0}, \\ \bar{x}_N = x_N + \theta l_N \geq 0. \end{cases}$$

Pour cela il faut avoir :

$$\bar{x}_B = x_B + \theta l_B \geq 0 \Rightarrow \bar{x}_j = x_j + \theta l_j \geq 0, \quad \forall j \in J_B. \quad (2.17)$$

En posant :  $A_B^{-1}a_{j_0} = X(J_B) = \{x_{jj_0}, j \in J_B\}$ .

De (2.13) on aura :

$$\bar{x}_j = x_j - \theta x_{jj_0}, \quad \forall j \in J_B. \quad (2.18)$$

Pour les  $x_{jj_0} > 0$  on doit avoir :

$$\theta \leq \frac{x_j}{x_{jj_0}} \quad \text{pour } j \in J_B. \quad (2.19)$$

Les composantes de  $\bar{x}_j$  sont tous positives  $\bar{x}_j \geq 0$  (si  $x_{jj_0} < 0$ ).

Si  $\theta \leq \min\{\theta_j = \frac{x_j}{x_{jj_0}}, x_{jj_0} > 0, j \in J_B\}$ , alors le vecteur  $\bar{x}$  construit avec (2.13) et (2.14) sera une solution réalisable du problème (P).

Remarquons que pour  $\theta > \min\{\theta_j = \frac{x_j}{x_{jj_0}}, x_{jj_0} > 0, j \in J_B\}$  le vecteur  $\bar{x}$  aura des composantes négatives, donc il ne sera pas une solution réalisable.

Par conséquent la plus grande valeur  $\theta^0$  telle que :  $\bar{x} = x + \theta^0 l$  soit solution réalisable est égale :

$$\theta^0 = \theta_{j_1} = \frac{x_{j_1}}{x_{jj_0}} = \min\{\theta_j = \frac{x_j}{x_{jj_0}}, x_{jj_0} > 0, j \in J_B\}. \quad (2.20)$$

Dans le cas où  $x$  est une solution de base réalisable non dégénéré, la valeur de  $\theta^0$  sera strictement positive et en vertu de la relation (2.15) on aura :

$$Z(\bar{x}) = Z(x) - \theta^0 E_N > Z(x).$$

*Montrons que le vecteur  $\bar{x} = x + \theta^0 l$  est solution de base réalisable :*  
Remarquons que :

$$\bar{x}_j = x_j = 0, j \neq j_0, j \in J_N.$$

$$\begin{aligned} \bar{x}_{j_1} &= x_{j_1} - \theta^0 A_B^{-1} x_{j_0} = x_{j_1} - \theta^0 x_{j_1 j_0} \\ &= x_{j_1} - \frac{x_{j_1}}{x_{j_1 j_0}} x_{j_1 j_0} = 0. \end{aligned}$$

Le vecteur  $\bar{x}$  à  $(n - m)$  composantes nulles.

$$\begin{aligned} \bar{x}_j &= 0, j \in \bar{J}_N \text{ tel que : } \bar{J}_N = \{(J_N/j_0) \cup j_1\}. \\ \bar{A}_B &= A(I, \bar{J}_B) \quad \text{avec } \bar{J}_B = \{(J_B/j_1) \cup j_0\} = J/\bar{J}_N. \end{aligned}$$

Pour que  $\bar{A}_B$  (matrice associé à  $\bar{x}_B$ ) soit une base réalisable on doit démontrer que les vecteurs  $a_j, j \in \bar{J}_B$  sont linéairement indépendants.

Posons :

$$\begin{aligned} A_B &= A_B(I, J_B) \\ A_B^{-1} &= A_B^{-1}(J_B, I) = (u_{ij}, i \in J_B, j \in I) \\ A_B A_B^{-1} &= I_m = \sum_{i \in J_B} a_i u_{ij} = e_j, j \in I. \end{aligned} \tag{2.21}$$

On va faire sortir le vecteur  $a_{j_1}$  et rentrer  $a_{j_0}$ .

$$\begin{aligned} A_B^{-1} a_{j_0} &= X(J_B) \Leftrightarrow a_{j_0} = A_B X(J_B) \\ a_{j_0} &= \sum_{i \in J_B} a_i x_{ij_0}. \end{aligned} \tag{2.22}$$

$x_{j_1 j_0}$  par construction (2.20), alors de (2.22) on déduit :

$$\begin{aligned} a_{j_0} &= \sum_{i \in J_B} a_i x_{ij_0} = a_{j_1} x_{j_1 j_0} + \sum_{i \in J_B/j_1} a_i x_{ij_0} \\ \Rightarrow a_{j_1} &= \frac{a_{j_0}}{x_{j_1 j_0}} - \frac{\sum_{i \in J_B/j_1} a_i x_{ij_0}}{x_{j_1 j_0}}. \end{aligned}$$

De (2.21) on aura :

$$\frac{a_{j_0}}{x_{j_1 j_0}} u_{j_1 j} + \sum_{i \in J_B/j_1} a_i (u_{ij} - \frac{x_{ij}}{x_{j_1 j_0}}) = e_j, j \in I. \tag{2.23}$$

Formons la matrice  $\bar{u} = \bar{u}(\bar{J}_B, I) = (\bar{u}_{ij}, i \in \bar{J}_B, j \in I)$  ;

où :

$$\bar{u}_{ij} = \begin{cases} u_{ij} - \frac{x_{ij_0}}{x_{j_1 j_0}}, & i \neq j_0, i \in \bar{J}_B, j \in I, \\ \frac{u_{j_1 j}}{x_{j_1 j_0}} & \text{si } i = j_0, j \in I. \end{cases} \quad (2.24)$$

De (2.24) on aura :  $\sum_{i \in J_B} a_i \bar{u}_{ij} = e_j, j \in I$ , c'est-à-dire :  $A(I, \bar{J}_B) \bar{u} = I_m$ .

Ce qui montre que  $\bar{A}_B = A(I, \bar{J}_B)$  est inversible et que :

$$\bar{A}_B^{-1} = \bar{u}. \quad (2.25)$$

**Remarque 2.2** Les éléments  $\bar{u}_{ij}$  de la matrice inverse de  $\bar{A}_B = A(I, \bar{J}_B)$  sont calculés en fonction de ceux de  $A_B^{-1}$  et des composants du vecteur  $A_B^{-1} a_{j_0}$ .

On peut encore calculer  $\bar{A}_B^{-1}$  de la manière suivante :

$$\bar{A}_B^{-1} = A_B^{-1}(\bar{J}_B, I) = D(\bar{J}_B, J_B) A_B^{-1}(J_B, I). \quad (2.26)$$

$$\text{Où : } D = D(\bar{J}_B, J_B) = (d_{ij}, i \in \bar{J}_B, j \in J_B), d_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j, j \neq j_1, \\ \frac{-x_{ij_0}}{x_{j_1 j_0}} & \text{si } i \neq j_0, j = j_1, \\ \frac{1}{x_{j_1 j_0}} & \text{si } i = j_0, j = j_1. \end{cases}$$

En posant :

$$J_B = \{i_1, i_2, \dots, i_{k-1}, i_k = j_1, i_{k+1}, \dots, i_m\}.$$

$$\bar{J}_B = \{i_1, i_2, \dots, i_{k-1}, i_k = j_0, i_{k+1}, \dots, i_m\}.$$

$$D = D(\bar{J}_B, J_B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{-x_{1j_0}}{x_{j_1 j_0}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \frac{-x_{2j_0}}{x_{j_1 j_0}} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{x_{j_1 j_0}} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \frac{-x_{mj_0}}{x_{j_1 j_0}} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

En utilisant tous les résultats précédant, l'algorithme du simplexe s'écrit :

### Schéma de l'algorithme :

Soit  $J_B$  les indices de base, avec  $A_B$  est inversible et  $x$  est une solution de base réalisable.

**Etape1 :** Calculons  $U^T = c_T^B A_B^{-1}$ .

**Etape2 :** Calculons  $E_j = U^T a_j - c_j$ ,  $j \in J_N$ .

**Etape3 :** Il y a deux cas :

1. Si :  $E_j \geq 0$ ,  $\forall j \in J_N$ , alors  $x$  est une solution optimale du problème  $(P)$ , et le processus de résolution est terminé.
2. Sinon :  $\exists j_0 \in J_N$  tel que :  $E_{j_0} < 0$ ,  $E_{j_0} = \min\{E_j, j \in J_N\}$  et calculons le vecteur  $A_B^{-1} a_{j_0} = X(J_B) = (x_{jj_0}, j \in J_B)$  :
  - a) Si le vecteur  $A_B^{-1} a_{j_0} \leq 0$  alors : le problème  $(P)$  est non borné ie :

$$\sup_{x \in S} Z(x) = +\infty, \text{ et le processus est arrêté.}$$

b) Sinon :

- Calculons :  $\theta^0 = \theta_{j_1} = \min\left\{\frac{x_j}{x_{jj_0}}, x_{jj_0} > 0, j \in J_B\right\} = \frac{x_{j_1}}{x_{j_1 j_0}}$ .
- Calculons :  $\bar{x} = (\bar{x}_B, \bar{x}_N)$ , tel que :

$$\begin{cases} \bar{x}(J_B) = x(J_B) - \theta^0 A_B^{-1} a_{j_0} \\ \bar{x}_j = x_j = 0, j \in (J_N/j_0) \\ \bar{x}_{j_0} = \theta^0. \end{cases}$$

– Posons :

$$\begin{aligned} \bar{J}_B &= (J_B/j_1) \cup j_0; \\ \bar{J}_N &= (J_N/j_0) \cup j_1. \end{aligned}$$

À l'aide de la relation suivante calculons :

$$\bar{A}_B^{-1} = A_B^{-1}(\bar{J}_B, I) = D(\bar{J}_B, J_B) A_B^{-1}(J_B, I),$$

$$\text{où } D = D(\bar{J}_B, J_B) = d_{ij}, i \in \bar{J}_B, j \in J_B.$$

$$\text{Avec : } d_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ \frac{1}{x_{jj_0}} & \text{si } i = j_0, j = j_1, \\ 0 & \text{si } i \neq j, j \neq j_1, \\ \frac{-x_{ij_0}}{x_{j_1 j_0}} & \text{si } i \neq j_0 \text{ et } j = j_1. \end{cases}$$

En posant :

$$\begin{aligned} J_B &= \{i_1, i_2, \dots, i_{k-1}, i_k = j_1, i_{k+1}, \dots, i_m\}; \\ \overline{J}_B &= \{i_1, i_2, \dots, i_{k-1}, i_k = j_0, i_{k+1}, \dots, i_m\}. \end{aligned}$$

**Etape4 :** Aller a l'étape 1 avec  $J_B = \overline{J}_B$ .

**Théorème 2.7 :** *Sous l'hypothèse de non dégénérescence, l'algorithme du simplexe converge en un nombre finie d'itérations (qui ne peut pas dépasser le nombre de sommet de  $S$ ).*

**Preuve :** Il suffit d'observer qu'il existe un nombre finie de point sommet de  $S (\leq C^m)$ , et que la croissance stricte de la fonction objectif  $Z$  interdit de passer deux fois même point sommet ( $Z(x^0) < Z(x^1) < \dots$ ).

**Exemple :**

Soit le problème (l'exemple précédent) :

$$(PL) \begin{cases} \max Z = 800x_1 + 500x_2 \\ 10x_1 + 5x_2 \leq 50 \\ 15x_1 + 10x_2 \leq 90 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Le programme standard de  $(PL)$  est : 
$$\begin{cases} \max Z = 800x_1 + 500x_2 + 0e_1 + 0e_2 \\ 10x_1 + 5x_2 + e_1 = 50 \\ 15x_1 + 10x_2 + e_2 = 90 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, e_1 \geq 0, e_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 10 & 5 & 1 & 0 \\ 15 & 10 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 50 \\ 90 \end{pmatrix}; \quad c^T = (800, 500, 0, 0).$$

On a :  $\text{rang } A = 2$ .  $x^T = (x_1, x_2, e_1, e_2)$ ;  $J = \{1, 2, 3, 4\}$ ;  $I = \{1, 2\}$ ,

$$A_{B_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ est la base de départ } \Rightarrow A_{B_0}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$J_B = \{3, 4\}, J_N = \{1, 2\}.$$

$$A_N = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 15 & 10 \end{pmatrix}, c_B = (0, 0), c_N = (800, 500).$$

$$\text{On a : } x_B = A_B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50 \\ 90 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 90 \end{pmatrix}.$$

Donc :  $x^0 = (0, 0, 50, 90)^T$  est la solution de base réalisable de départ associée à  $A_{B_0}$ .

**Itération 1 :**

**Etape1 :** Calculons  $U^T$  :

$$U^T = c_B^T A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 0, 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, 0 \end{pmatrix}.$$

**Etape2 :** Calculons  $E_N$  :

$$E_N = U^T A_N - c_N = \begin{pmatrix} 0, 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 15 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 800 \\ 500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -800 \\ -500 \end{pmatrix} < 0.$$

**Etape3 :** On a :  $E_{j_0} = \min\{E_j, j \in J_N\} = \min\{-800, -500\} = -800 \Rightarrow j_0 = 1$ .

Calculons le vecteur  $A_B^{-1} a_{j_0} = A_B^{-1} a_1$  :

$$A_B^{-1} a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

On a :  $A_B^{-1} a_1 = \{x_{j_1}, j \in J_B\} > 0$  donc :

– Calculons :

$$\begin{aligned} \theta_{j_1} &= \frac{x_{j_1}}{x_{j_1}} = \min \left\{ \frac{x_j}{x_{j_1}}, x_{j_1} > 0, j \in J_B \right\} = \min \left\{ \frac{50}{10}, \frac{90}{15} \right\} \\ &= \min\{5, 6\} = 5. \end{aligned}$$

$$\theta_3 = 5 \Rightarrow j_1 = 3.$$

– Calculons :  $\bar{x} = (\bar{x}_B, \bar{x}_N)$ .

$$\text{on a : } \bar{x}_B = x_B - \theta_3 A_B^{-1} a_1 = \begin{pmatrix} 50 \\ 90 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

$$\bar{x}_j = x_j = 0, j \in (J_N / \{1\}) \Rightarrow \bar{x}_2 = 0.$$

$$\bar{x}_1 = \theta_3 = 5 \Rightarrow \bar{x}_N = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc : } \bar{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

– Posons :

$$\bar{J}_B = (J_B / j_1) \cup j_0 = \{1, 4\};$$

$$\bar{J}_N = (J_N / j_0) \cup j_1 = \{3, 2\}.$$

Donc :  $\bar{A}_B = A(\bar{J}_B) = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 15 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\bar{A}_N = A(\bar{J}_N) = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$ .  
 $\bar{c}_B^T = c^T(\bar{J}_B) = (800, 0)$ ,  $\bar{c}_N^T = c^T(\bar{J}_N) = (0, 500)$ .  
On a :  $\det(\bar{A}_B) = 10 - 0 = 10 \neq 0$ .

$$\text{Alors : } \bar{A}_B^{-1} = \frac{1}{\det(\bar{A}_B)}(\text{conv}\bar{A}_B)^T = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -15 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & 0 \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

**Itération 2 :**

On pose :  $J_B = \bar{J}_B = \{1, 4\}$ ,  $J_N = \bar{J}_N = \{3, 2\}$ .  
 $A_B^{-1} = \bar{A}_B^{-1}$ ,  $A_N = \bar{A}_N$ ,  $c_B^T = \bar{c}_B^T$ ,  $c_N^T = \bar{c}_N^T$ ,  $x = \bar{x}$ .

**Etape1 :** Calculons  $U^T$  :

$$U^T = c_B^T A_B^{-1} = (800, 0) \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & 0 \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} = (80, 0).$$

**Etape2 :** Calculons  $E_N$  :

$$E_N = U^T A_N - c_N = (80, 0) \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} - (0, 500) = (80, -100) < 0.$$

**Etape3 :** On a :  $E_{j_0} = \min\{E_j, j \in J_N\} = \min\{80, -100\} = -100 \Rightarrow j_0 = 2$ .

Calculons le vecteur  $A_B^{-1}a_{j_0} = A_B^{-1}a_2$  :

$$A_B^{-1}a_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & 0 \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

On a :  $A_B^{-1}a_2 = \{x_{j_2}, j \in J_b\} > 0$  donc :

– calculons :

$$\begin{aligned} \theta_{j_1} = \frac{x_{j_1}}{x_{j_12}} &= \min \left\{ \frac{x_j}{x_{j_2}}, x_{j_2} > 0, j \in J_B \right\} = \min \left\{ \frac{5}{\frac{1}{2}}, \frac{15}{\frac{5}{2}} \right\} \\ &= \min\{10, 6\} = 6. \end{aligned}$$

$$\theta_4 = 6 \Rightarrow j_1 = 4.$$

– Calculons :  $\bar{x} = (\bar{x}_B, \bar{x}_N)$  :

$$\text{On a : } \bar{x}_B = x_B - \theta_4 A_B^{-1}a_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 15 \end{pmatrix} - 6 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\bar{x}_j = x_j = 0, j \in (J_N/2) \Rightarrow \bar{x}_3 = 0.$$

$$\bar{x}_2 = \theta_4 = 6 \Rightarrow \bar{x}_N = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc : } \bar{x} = \begin{pmatrix} 2, 6, 0, 0 \end{pmatrix}^T.$$

$$- \text{Posons : } \bar{J}_B = (J_B/j_1) \cup j_0 = \{1, 2\}.$$

$$\bar{J}_N = (J_N/j_0) \cup j_1 = \{3, 4\}.$$

$$\text{Donc : } \bar{A}_B = A(\bar{J}_B) = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 15 & 10 \end{pmatrix}, \bar{A}_N = A(\bar{J}_N) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\bar{c}_B^T = c^T(\bar{J}_B) = \begin{pmatrix} 800, 500 \end{pmatrix}, \bar{c}_N^T = c^T(\bar{J}_N) = \begin{pmatrix} 0, 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{On a : } \det(\bar{A}_B) = 100 - 75 = 25 \neq 0.$$

$$\bar{A}_B^{-1} = \frac{1}{\det(\bar{A}_B)}(\text{conv} \bar{A}_B)^T = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ -15 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

### Itération 3 :

On pose :

$$J_B = \bar{J}_B = \{1, 2\}, J_N = \bar{J}_N = \{3, 4\}.$$

$$A_B^{-1} = \bar{A}_B^{-1}, A_N = \bar{A}_N, c_B^T = \bar{c}_B^T, c_N^T = \bar{c}_N^T, x = \bar{x}.$$

**Etape1** : Calculons  $U^T$  :

$$U^T = c_B^T A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 800, 500 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20, 40 \end{pmatrix}.$$

**Etape2** : Calculons  $E_N$  :

$$E_N = U^T A_N - c_N^T = \begin{pmatrix} 20, 40 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0, 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20, 40 \end{pmatrix} > 0$$

$$E_j > 0, \forall j \in \{3, 4\}.$$

Donc :  $x^* = (2, 6)$  est une solution optimale de  $Z$ , et la valeur optimale  $Z(x^*) = \max Z(x) = 800(2) + 500(6) = 4600$ .



### 2.3.4 Algorithme du simplexe en tableau :

Le tableau simplexe est un tableau qui rassemble tous les éléments nécessaires pour faire marcher l'algorithme manuellement, en essayant d'éviter le calcul de l'inverse de la matrice de base  $A_B$  dans chaque itération, en utilisant à chaque itération la base unité.

La méthode du simplexe consiste à transiter d'un sommet du polyèdre convexe à un autre, en améliorant la valeur de la fonction objectif, jusqu'à l'obtention du sommet qui assure une valeur optimale. Or, comme chaque nouveau sommet correspond à une nouvelle base réalisable, il est nécessaire de pouvoir effectuer algébriquement le changement de base grâce au pivotage, afin, d'avoir une base unité.

-Dans chaque itération simplexe il faut :

1. Choisir une variable entrante.
2. Choisir une variable sortante.
3. Faire le pivotage pour que la variable entrante prend la colonne de la variable sortante dans le système d'équations.

Le premier tableau du simplexe reprend les éléments du programme linéaire standard (PLS), supposons que les variables de base (VB) sont  $x_j, j \in J_B$  et les variables hors base (VHB) sont  $x_j, j \in J_N$ . le premier tableau du simplexe est représenté comme suit :

| Base  | $x_B^T$     | $x_N^T$                   | $b$   | $\theta$ |
|-------|-------------|---------------------------|-------|----------|
| $x_B$ | $A_B = I$   | $A_N$                     |       |          |
| $Z$   | $E_B^T = 0$ | $E_N^T = U^T A_N - c_N^T$ | $Z =$ |          |

TABLE 2.1 – Le premier tableau du simplexe.

L'intérêt du tableau simplexe est de rassembler de façons condensée tous les éléments nécessaires au déroulement de l'algorithme du simplexe. En effet, la solution de base réalisable s'obtient par lecture directe du tableau, comme les (VHB)  $x_j, j \in J_N$  sont nulles, c'est-à-dire :  $x_N = 0$ .

En outre, le vecteur de variable de base :  $x_B = A_B^{-1}b = Ib = b$ , alors :

$$Z = c_B^T x_B + c_N^T x_N = c_B^T x_B = c_B^T b.$$

En fin, le vecteur des estimations  $E_N$  est obtenue par lecture directe de la dernier ligne du tableau, il permet en particulier de voir immédiatement si la solution

de base courante est optimale ( $E_N \geq 0$ ) ou non.

### 2.3.5 Changements de bases

#### a) Critère d'entrée dans la base :

Une variable hors base  $x_j$  candidate à entre en base est celle qui possède le coefficient le plus petit dans la fonction objectif. Il est définie par l'indice  $j_0$  tel que :

$$j_0 = \arg \min_{j \in J_N} E_j.$$

#### b) Critère de sortie de la base :

Une variable de base  $x_j$  quitte la base c'est-à-dire, sera hors base, celle définie par l'indice  $j_1$  qui s'obtient par :

$$j_1 = \arg \min_{j \in J_B} \theta_j.$$

Tel que :  $\theta_j = \min\{\frac{x_j}{x_{jj_0}}, x_{jj_0} > 0, j \in J_B\}$ ;  $x_{j_1j_0}$  est le pivot.

#### Critère d'arrêt :

La solution de base courante est optimale si tous les coefficients  $E_j \geq 0, j \in J_N$ .

#### Renouvellement des tableaux (opération de pivotage)

Soient  $j_0$  et  $j_1$  les indices des variables entrantes et sortantes, soit  $a_{ij}^{(k)}$  l'élément de la  $i^{\text{ème}}$  ligne et la  $j^{\text{ème}}$  colonne du  $k^{\text{ème}}$  tableau et  $a_{j_1j_0}^{(k)}$  le pivot du  $k^{\text{ème}}$  tableau.

- Ligne pivot (Diviser sur le pivot)  $a_{j_1j}^{(k+1)} = \frac{a_{j_1j}^{(k)}}{a_{j_1j_0}^{(k)}};$
- Règle Z :  $a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - (a_{j_1j}^{(k)} \times a_{ij_0}^{(k)}) / (a_{j_1j_0}^{(k)}); i \neq j_0; j = 1, \dots, n+1.$

nouveau élément =

ancien élément -  $\frac{\text{élément correspond dans la ligne du pivot} \times \text{élément de la colonne du pivot}}{\text{pivot}}$

**Exemple :**

Soit le problème (l'exemple précédent) :

$$(PL) \quad \begin{cases} \max Z = 800x_1 + 500x_2 \\ 10x_1 + 5x_2 \leq 50 \\ 15x_1 + 10x_2 \leq 90 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Le programme standard du (PL) est : 
$$\begin{cases} \max Z = 800x_1 + 500x_2 + 0e_1 + 0e_2 \\ 10x_1 + 5x_2 + e_1 = 50 \\ 15x_1 + 10x_2 + e_2 = 90 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, e_1 \geq 0, e_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 10 & 5 & 1 & 0 \\ 15 & 10 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 50 \\ 90 \end{pmatrix}, \quad c^T = (800, 500, 0, 0).$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}, \quad J = \{1, 2, 3, 4\}, \quad I = \{1, 2\}, \quad \text{on a : } \text{rang } A = 2.$$

$$J_B = \{3, 4\}, J_N = \{1, 2\} \Rightarrow \text{la base initiale est : } A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{et } A_N = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 15 & 10 \end{pmatrix}, \quad c_B = (0, 0), \quad c_N = (800, 500).$$

$$\text{On a : } x_B = A_B^{-1}b = \begin{pmatrix} 50 \\ 90 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 90 \end{pmatrix}.$$

$$E_N = U^T A_N - c_N = c_B^T A_B^{-1} A_N - c_N = -c_N = (-800, -500) = (E_1, E_2).$$

La solution de base réalisable associé à la base  $A_B = I_2$  est  $x^0 = (0, 0, 50, 90)^T$ ,  
avec :  $Z(x^0) = 0$ .

| base  | $x_1$ | $x_2$ | $e_1$ | $e_2$ | $b$     | $\theta$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|---------|----------|
| $e_1$ | 10    | 5     | 1     | 0     | 50      | 5        |
| $e_2$ | 15    | 10    | 0     | 1     | 90      | 6        |
| $Z$   | -800  | -500  | 0     | 0     | $Z = 0$ |          |

$\min\{-800, -500\} = -800 \Rightarrow x_1$   
rentre dans la base.

$\min\{5, 6\} = 5 \Rightarrow e_1$  sorte de la base.

| base  | $x_1$ | $x_2$ | $e_1$ | $e_2$ | $b$        | $\theta$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|------------|----------|
| $x_1$ | 1     | 1/2   | 1/10  | 0     | 5          | 10       |
| $e_2$ | 0     | 5/2   | -3/2  | 1     | 15         | 6        |
| $Z$   | 0     | -100  | 80    | 0     | $Z = 4000$ |          |

$\min\{-100\} = -100 \Rightarrow x_2$   
rentre dans la base.

$\min\{10, 6\} = 6 \Rightarrow e_2$  sorte de la base.

| base  | $x_1$ | $x_2$ | $e_1$ | $e_2$ | $b$        | $\theta$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|------------|----------|
| $x_1$ | 1     | 0     | 2/5   | -1/5  | 2          |          |
| $x_2$ | 0     | 1     | -3/5  | 2/5   | 6          |          |
| $Z$   | 0     | 0     | 20    | 40    | $Z = 4600$ |          |

Le critère d'optimalité est vérifié, la solution optimale est d'optimalité  $x^* = (2, 6)$  avec  $Z(x^*) = 4600$ .

## Problèmes linéaires particuliers

### Le problème non réalisable :

Un programme linéaire est dit non réalisable si certaines de ses contraintes sont contradictoires, lorsque un tel cas se présente, la formulation doit être revue on reconnaît tel modèle, à la fin de la phase 1 de la méthode des deux phases ou la méthode du big M par la présence d'une variable artificielle non nulle.

### Le problème non borné :

Un programme linéaire est dit non borné si son optimum est infini. On reconnaît un tel cas, lorsqu'à une itération donnée du simplexe, tous les éléments de la colonne de la variable entrante sont négatifs ou nuls.

### Le problème linéaire a infinité de solutions optimales :

Ce type de modèle apparaît lorsqu'à la fin de la résolution par la méthode du simplexe, une variable hors base possède un coefficient nul dans la fonction objectif. Dans ce cas une itération supplémentaire donnera le second point extrême.

## 2.4 Obtention d'une base réalisable de départ :

En principe dans l'algorithme du simplexe on peut prendre n'importe quelle base réalisable comme base de départ.

Généralement, on s'arrange pour avoir une matrice unité comme base de départ, en transformant le problème initial par l'ajoute des variables artificielles (supplémentaires)  $y_i \geq 0$  et appliquer, en suite, l'algorithme du simplexe en deux phases appelé méthode de deux phases ou encore utiliser la méthode du Big M (pénalité).

### 2.4.1 La méthode des deux phases

Lorsque les problèmes de PL ne permettent pas de mettre une solution de base réalisable en évidence, nous pouvons utiliser la méthode des deux phases pour essayer d'en générer une. Comme son nom l'indique, la méthode des deux phases est composée de deux étapes.

Mais avant de lancer la première phase, il faut d'abord transformer le problème de programmation linéaire sous forme standard, en ajoutant des variables d'écart et des variables artificielles nécessaires, et construire la fonction objectif artificielle  $\varphi$  en changeant les coefficients de la fonction objectif originale de la manière suivante :

$$(PLS) \begin{cases} \max Z = c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0, \end{cases} \longrightarrow (PLA) \begin{cases} \max \varphi = - \sum_{k=1}^{nbr} y_k \\ Ax + y = b \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

Tel que : le (PLS) est le programme linéaire standard et son PL auxiliaire associé (PLA), et  $nbr$  est le nombre de variables artificielles ajoutées, le vecteur  $x$  est constitué des variables de décision et de variables d'écart et le vecteur  $y$  des variables artificielles.

Le principe de la méthode des deux phases consiste à appliquer le simplexe en deux phases :

- **Phase 1** : Résoudre le Problème auxiliaire (PLA) par la méthode du simplexe. Si le problème possède une solution optimale finie, alors cette solution est de base réalisable pour le (PLS).
- **Phase 2** : Résoudre le (PLS) en utilisant la solution obtenue à la fin de la première phase comme solution de base réalisable de départ.

**Algorithme du simplexe en deux phases :**

1. Mettre les contraintes sous forme d'égalités.
2. Rendre positif le second membre des contraintes.
3. Introduire les variables artificielles dans les contraintes.
4. Phase 1 : résoudre le (PLA)

- ✓ Si tous  $y_i = 0$  ( $\varphi = 0$ ) passer à 5.
- ✓ Sinon FIN. Le problème est non réalisable.

5. Phase 2 : Résoudre le (PLS) en utilisant la solution obtenue en 4.

### Remarque 2.3

1. *Il n'est pas toujours nécessaire d'introduire  $m$  variables artificielles pour les contraintes, il suffit de les introduire en nombre suffisant pour avoir une première solution de base réalisable.*
2. *Lorsqu'une variable artificielle sort de la base, elle ne doit plus être prise en considération dans la suite de la procédure.*
3. *Dans la méthode des deux phases, le premier tableau du simplexe de la phase 2 est identique au dernier tableau du simplexe de la phase 1, à l'exception de la ligne des  $E_j$ , qui est modifiée.*

**Exemple :** Résoudre par la méthode des deux phases le PL suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max Z = 5x_1 + 6x_2 \\ -x_1 + x_2 \leq 4 \\ 5x_1 + 3x_2 = 60 \\ x_2 \geq 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{array} \right. \xrightarrow{\text{Forme standard}} \left\{ \begin{array}{l} \max Z = 5x_1 + 6x_2 \\ -x_1 + x_2 + e_1 = 4 \\ 5x_1 + 3x_2 = 60 \\ x_2 - e_2 = 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, e_1 \geq 0, e_2 \geq 0. \end{array} \right.$$

$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ , donc il faut ajouter deux variables artificielles à la deuxième et la troisième contrainte. Le PL auxiliaire (PLA) associé est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \varphi = -y_1 - y_2 \\ -x_1 + x_2 + e_1 = 4 \\ 5x_1 + 3x_2 + y_1 = 60 \quad \dots\dots (1) \\ x_2 - e_2 + y_2 = 5 \quad \dots\dots (2) \\ x_i \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, 2; \\ e_i \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, 2; \\ y_i \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, 2. \end{array} \right.$$

de (1)  $\Rightarrow y_1 = 60 - 5x_1 - 3x_2$

de (2)  $\Rightarrow y_2 = 5 - x_2 + e_2$

Alors :

$$\varphi = -60 + 5x_1 + 3x_2 - 5 + x_2 - e_2 = -65 + 5x_1 + 4x_2 - e_2.$$

**Phase I :**

| Base      | $x_1$                                           | $x_2$ | $e_1$ | $e_2$ | $y_1$ | $y_2$ | $P_0$           | $\theta$ |
|-----------|-------------------------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-----------------|----------|
| $e_1$     | -1                                              | 1     | 1     | 0     | 0     | 0     | 4               | -        |
| $y_1$     | <span style="border: 1px solid black;">5</span> | 3     | 0     | 0     | 1     | 0     | 60              | 12       |
| $y_2$     | 0                                               | 1     | 0     | -1    | 0     | 1     | 5               | -        |
| Z         | -5                                              | -6    | 0     | 0     | 0     | 0     | Z= 0            |          |
| $\varphi$ | -5                                              | -4    | 0     | 1     | 0     | 0     | $\varphi = -65$ |          |

$\min\{-5, -4\} = -5 \Rightarrow x_1$   
rentre dans la base.  
 $\min\{-, 12, -\} = 12 \Rightarrow y_1$  sort  
de la base.

| Base      | $x_1$ | $x_2$                                           | $e_1$ | $e_2$ | $y_1$ | $y_2$ | $P_0$          | $\theta$ |
|-----------|-------|-------------------------------------------------|-------|-------|-------|-------|----------------|----------|
| $e_1$     | 0     | 8/5                                             | 1     | 0     | -     | 0     | 16             | 10       |
| $x_1$     | 1     | 3/5                                             | 0     | 0     | -     | 0     | 12             | 20       |
| $y_2$     | 0     | <span style="border: 1px solid black;">1</span> | 0     | -1    | -     | 1     | 5              | 5        |
| Z         | 0     | -3                                              | 0     | 0     | -     | 0     | Z= 60          |          |
| $\varphi$ | 0     | -1                                              | 0     | 1     | -     | 0     | $\varphi = -5$ |          |

$\min\{-1\} = -1 \Rightarrow x_2$  rentre  
dans la base.  
 $\min\{10, 20, 5\} = 5 \Rightarrow y_2$  sort de  
la base.

| Base      | $x_1$ | $x_2$ | $e_1$ | $e_2$ | $y_1$ | $y_2$ | $P_0$         | $\theta$ |
|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|---------------|----------|
| $e_1$     | 0     | 0     | 1     | 8/5   | -     | -     | 8             |          |
| $x_1$     | 1     | 0     | 0     | 3/5   | -     | -     | 9             |          |
| $x_2$     | 0     | 1     | 0     | -1    | -     | -     | 5             |          |
| Z         | 0     | 0     | 0     | -3    | -     | -     | Z= 75         |          |
| $\varphi$ | 0     | 0     | 0     | 0     | -     | -     | $\varphi = 0$ |          |

Le critère d'optimalité est vérifié ; de plus on a  $\varphi = 0$ , donc on déduit que  $x^T = (x_1, x_2, e_1, e_2) = (9, 5, 8, 0)$  est une solution de base réalisable pour le problème standard, donc on passe à la phase II.

**Phase II :**

| Base  | $x_1$ | $x_2$ | $e_1$ | $e_2$                                             | $P_0$ | $\theta$ |
|-------|-------|-------|-------|---------------------------------------------------|-------|----------|
| $e_1$ | 0     | 0     | 1     | <span style="border: 1px solid black;">8/5</span> | 8     | 5        |
| $x_1$ | 1     | 0     | 0     | 3/5                                               | 9     | 15       |
| $x_2$ | 0     | 1     | 0     | -1                                                | 5     | -        |
| Z     | 0     | 0     | 0     | -3                                                | Z= 75 |          |

$\min\{-3\} = -3 \Rightarrow e_2$  rentre dans  
la base.  
 $\min\{5, 15, -\} = 5 \Rightarrow e_1$  sort de  
la base.

| Base  | $x_1$ | $x_2$ | $e_1$ | $e_2$ | $P_0$ | $\theta$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|
| $e_2$ | 0     | 0     | 5/8   | 1     | 5     |          |
| $x_1$ | 1     | 0     | -3/8  | 0     | 6     |          |
| $x_2$ | 0     | 1     | 5/8   | 0     | 10    |          |
| Z     | 0     | 0     | 15/8  | 0     | Z= 90 |          |

Le critère d'optimalité est vérifié, donc on déduit que la solution optimale du problème initial est  $x^* = (6, 10)$  avec  $Z^* = 90$ .

## 2.4.2 La méthode du Big M (Pénalité)

La méthode de Pénalité consiste à choisir un paramètre  $M > 0$  suffisamment grand pour que toutes les variables artificielles sortent de la base (c'est-à-dire  $y_i = 0$ ). On obtient, ainsi, la solution optimale du problème linéaire si une telle solution existe.

Supposons que dans un problème de programmation linéaire sous forme standard (PLS), la matrice  $A$  ne contient pas de sous-matrice identité, on considère, alors, le problème linéaire auxiliaire (PLA) :

$$(PLS) \begin{cases} \max Z = c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0, \end{cases} \rightarrow \text{associé } (PLA) \begin{cases} \max \varphi = c^T x - M \sum_{k=1}^{nbr} y_k \\ Ax + y = b \\ x \geq 0, y \geq 0, \end{cases}$$

où  $nbr$  est le nombre de variables artificielles ajoutées, le vecteur  $x$  est constitué des variables de décisions et de variables d'écarts, et le vecteur  $y$  est constitué des variables artificielles, et on résout le (PLA) par la méthode du simplexe :

- Si tous  $y_i = 0$  Fin. La solution optimale du PL de départ est atteinte.
- Sinon, le problème original est non réalisable.

**Remarque 2.4** Les remarques annoncées précédemment dans la remarque (2.3) (à l'exception de la 3<sup>ème</sup>) pour le cas de la méthode des deux phases restent valables pour le cas de la méthode du Big M.

**Exemple :** Résoudre par la méthode des Big M le PL suivant :

$$\begin{cases} \max Z = 5x_1 + 6x_2 \\ -x_1 + x_2 \leq 4 \\ 5x_1 + 3x_2 = 60 \\ x_2 \geq 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases} \xrightarrow{\text{Forme standard}} \begin{cases} \max Z = 5x_1 + 6x_2 \\ -x_1 + x_2 + e_1 = 4 \\ 5x_1 + 3x_2 = 60 \\ x_2 - e_2 = 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, e_1 \geq 0, e_2 \geq 0. \end{cases}$$

$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ , donc, il faut ajouter deux variables artificielles à la

deuxième et la troisième contrainte. Le PL auxiliaire (PLA) associé est :

$$\begin{cases} \max \varphi = 5x_1 + 6x_2 - My_1 - My_2 \\ -x_1 + x_2 + e_1 = 4 \\ 5x_1 + 3x_2 + y_1 = 60 \\ x_2 - e_2 + y_2 = 5 \\ x_i \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, 2; \\ e_i \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, 2; \\ y_i \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, 2. \end{cases} \begin{matrix} \dots\dots\dots (1) \\ \dots\dots\dots (2) \end{matrix}$$



De (1) on a :  $y_1 = 60 - 5x_1 - 3x_2$ .

De (2) on a :  $y_2 = 5 - x_2 + e_2$ .

Alors :

$$\begin{aligned}\varphi = 5x_1 + 6x_2 - My_1 - My_2 &= 5x_1 + 6x_2 - M(60 - 5x_1 - 3x_2) - M(5 - x_2 + e_2) \\ &= -65M + (5 + 5M)x_1 + (6 + 4M)x_2 - Me_2.\end{aligned}$$

| Base      | $x_1$                                           | $x_2$ | $e_1$ | $e_2$ | $y_1$ | $y_2$ | $P_0$            | $\theta$ |
|-----------|-------------------------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|------------------|----------|
| $e_1$     | -1                                              | 1     | 1     | 0     | 0     | 0     | 4                | -        |
| $y_1$     | <span style="border: 1px solid black;">5</span> | 3     | 0     | 0     | 1     | 0     | 60               | 12       |
| $y_2$     | 0                                               | 1     | 0     | -1    | 0     | 1     | 5                | -        |
| $\varphi$ | -5-5M                                           | -6-4M | 0     | M     | 0     | 0     | $\varphi = -65M$ |          |

$\min\{-5 - 5M, -6 - 4M\} = -5 - 5M \Rightarrow x_1$   
rentre dans la base.  
 $\text{Min}\{-, 12, -\} = 12 \Rightarrow y_1$  sort de la base.

| Base      | $x_1$ | $x_2$                                           | $e_1$ | $e_2$ | $y_1$ | $y_2$ | $P_0$               | $\theta$ |
|-----------|-------|-------------------------------------------------|-------|-------|-------|-------|---------------------|----------|
| $e_1$     | 0     | 8/5                                             | 1     | 0     | -     | 0     | 16                  | 10       |
| $x_1$     | 1     | 3/5                                             | 0     | 0     | -     | 0     | 12                  | 20       |
| $y_2$     | 0     | <span style="border: 1px solid black;">1</span> | 0     | -1    | -     | 1     | 5                   | 5        |
| $\varphi$ | 0     | -3-M                                            | 0     | M     | -     | 0     | $\varphi = 60 - 5M$ |          |

$\min\{-3 - M\} = -3 - M \Rightarrow x_2$  rentre dans la base.  
 $\min\{10, 20, 5\} = 5 \Rightarrow y_2$  sort de la base.

| Base      | $x_1$ | $x_2$ | $e_1$ | $e_2$                                             | $y_1$ | $y_2$ | $P_0$          | $\theta$ |
|-----------|-------|-------|-------|---------------------------------------------------|-------|-------|----------------|----------|
| $e_1$     | 0     | 0     | 1     | <span style="border: 1px solid black;">8/5</span> | -     | -     | 8              | 5        |
| $x_1$     | 1     | 0     | 0     | 3/5                                               | -     | -     | 9              | 15       |
| $x_2$     | 0     | 1     | 0     | -1                                                | -     | -     | 5              | -        |
| $\varphi$ | 0     | 0     | 0     | -3                                                | -     | -     | $\varphi = 75$ |          |

$\min\{-3\} = -3 \Rightarrow e_2$  rentre dans la base.  
 $\text{Min}\{5, 15, -\} = 5 \Rightarrow e_1$  sort de la base.

| Base      | $x_1$ | $x_2$ | $e_1$ | $e_2$ | $y_1$ | $y_2$ | $P_0$          | $\theta$ |
|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------------|----------|
| $e_2$     | 0     | 0     | 5/8   | 1     | -     | -     | 5              |          |
| $x_1$     | 1     | 0     | -3/8  | 0     | -     | -     | 6              |          |
| $x_2$     | 0     | 1     | 5/8   | 0     | -     | -     | 10             |          |
| $\varphi$ | 0     | 0     | 15/8  | 0     | -     | -     | $\varphi = 90$ |          |

Le critère d'optimalité est vérifié, et on a  $y_1 = 0, y_2 = 0$ , donc on déduit que la solution optimale du problème initial est  $x^* = (6, 10)$  avec  $Z^* = 90$ .

### 2.4.3 La Dualité en programmation linéaire

Nous allons voir qu'il est possible à partir d'un programme linéaire d'en former un autre directement lié au premier. Celui-ci est appelé primal et le second dual. La notion de dualité a été introduite par Von Neumann en 1947, puis développée par Gal, Kuhn et Tucker en 1951.

Elle est un concept fondamental on programmation linéaire et conduit a un résultat de grande importance théorique et pratique (théorème du dualité).

Les méthodes primales se caractérisent par le fait qu'elles opèrent directement sur le problème primale, elles engendrent une suite de solutions en assurant une amélioration de la fonction objectif, elles représentent donc avantage important : si le processus itératif est interrompu (arrêt), alors elle nous donne une solution approchée de la solution optimale satisfaisant les contraintes, par contre, elles ont généralement l'inconvénient de la mise au point délicate et la propriété de convergence globale est souvent difficile à obtenir. Par opposition, les méthodes duales sont plus robustes et la convergence globale est souvent plus facile à obtenir.

### Formulation du dual d'un programme linéaire :

Considérons le programme linéaire sous forme générale suivant :

$$(P) \quad \begin{cases} \max Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \forall i = 1, \dots, h \leq m \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \forall i = h+1, \dots, m \\ x_j \geq 0, \forall j = 1, \dots, k \leq n. \\ x_j \in \mathbb{R}, \forall j = k+1, \dots, n. \end{cases}$$

Alors, le dual du problème (P) par définition est le programme linéaire suivant :

$$(D) \quad \begin{cases} \min \varphi = \sum_{i=1}^m b_i y_i \\ \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j, \forall j = 1, \dots, k \leq n \\ \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i = c_j, \forall j = k+1, \dots, n \\ y_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, h \leq m. \\ y_i \in \mathbb{R}, \forall i = h+1, \dots, m. \end{cases}$$

La variable  $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)^T$  est appelée variable dual.

Le programme linéaire (P) est très lié au programme linéaire (D), en effet :

1. Le problème de maximisation dans le primale (P) devient un problème de minimisation dans le dual (D).

2. La matrice des contraintes de (D) est la transposée de la matrice des contraintes de (P).
3. Les coefficients économiques  $c_j$  dans (P) deviennent les seconds membres des contraintes dans le (D).
4. A chaque contraintes de (P) de type  $(\leq)$  lui correspond une variable dual de signe  $(\geq 0)$ .
5. A chaque contraintes de (P) de type  $(=)$ , on lui correspond une variable dual  $\in \mathbb{R}$ .
6. A chaque variables de décision positive dans (P), on lui correspond une contrainte de type  $(\geq)$  dans (D).
7. A chaque variables de décision de signe  $(\in \mathbb{R})$  dans (P), on lui correspond une contrainte de type  $(=)$  dans (D).

### Propriétés de la dualité

Un problème primaire et son dual ne sont pas distincts mais ils constituent deux facettes du même problème. En fait, quand on résoud l'un deux, on résoud également l'autre.

**Remarque 2.5** : *le dual de dual est le primaire.*

**Théorème 2.8** : *Si  $x$  et  $y$  deux solutions réalisables du primaire et dual respectivement, alors :*

$$Z(x) = c^T x \leq \varphi(y) = b^T y.$$

**Théorème 2.9** : *Une solution réalisable du primaire  $x$  est optimale si et seulement s'il existe une solution réalisable du dual  $y$  pour laquelle  $c^T x = b^T y$ .*

**Théorème 2.10** : *(Théorème de de la dualité) Étant donné un programme linéaire (P) et le programme dual (D) de (P) alors on a :*

- a) *si (P) et (D) ont des solutions, alors chacun d'eux a une solution optimale  $x^*$  et  $y^*$  respectivement et  $\max Z(x) = c^T x^* = b^T y^* = \min \varphi(y)$ .*
- b) *si l'un d'eux a un optimum non borné l'autre n'a pas de solution ie :*
  - *si (P) admet une solution  $x$  et  $c^T x$  est non borné alors (D) n'a pas de solution.*
  - *si (D) admet une solution  $y$  et  $b^T y$  est non borné alors (P) n'a pas de solution.*

**Théorème 2.11 (Théorème des écarts complémentaires) :**

Une condition nécessaire et suffisante pour que les vecteurs réalisables  $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  et  $Y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*)$  soient optimaux (dans les programmes primal et dual respectivement) est que leurs composantes vérifient les relations :

$$\begin{cases} x_j^* \left( \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* - c_j \right) = 0, & \forall j = 1, \dots, n \\ y_i^* \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* - b_i \right) = 0, & \forall i = 1, \dots, m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_j^* v_j^* = 0, & \forall j = 1, \dots, n \\ y_i^* e_i^* = 0, & \forall i = 1, \dots, m \end{cases}$$

Autrement dit, à l'optimum :

1. À toute variable d'écart primale (duale) positive correspond une variable de décision duale (primale) nulle.
2. À toute variable de décision primale (duale) positive correspond une variable d'écart duale (primale) nulle.

| Primal                       |               | Dual                         |
|------------------------------|---------------|------------------------------|
| <u>variables de décision</u> |               | <u>variables d'écarts</u>    |
| • $x_j > 0$                  | $\Rightarrow$ | • $v_j = 0$                  |
| • $x_j = 0$                  | $\Leftarrow$  | • $v_j > 0$                  |
| <u>variables d'écarts</u>    |               | <u>variables de décision</u> |
| • $e_i > 0$                  | $\Rightarrow$ | • $y_i = 0$                  |
| • $e_i = 0$                  | $\Leftarrow$  | • $y_i > 0$                  |

TABLE 2.2 – La relation entre les variables dual et primal.

### Algorithme dual du simplexe

L'algorithme dual du simplexe permet de résoudre un PL sans avoir recours aux variables artificielles. Ainsi, on réduit le nombre de variable dans le modèle et le nombre d'itérations nécessaire pour l'obtention de la solution optimale.

Cette méthode, qui a été développée par **C.E.Lemke**, utilise le fait qu'à chaque tableau, la solution du dual doit être réalisable. L'algorithme démarre avec une solution de base non réalisable mais optimale ( $E_j \geq 0$ ), et un changement de base correspond au passage vers une solution de base non réalisable plus proche de la solution réalisable optimale.

L'algorithme dual du simplexe s'applique à tout programme linéaire dont :

- ✓ la solution de base de départ du primal n'est pas réalisable ( $x_B < 0$ ) ;
- ✓ et le dual à une solution réalisable.

### Algorithme dual-simplexe

1. Mettre les contraintes du PL sous forme égalité, trouver une solution de base non réalisable et optimale de départ ( $E_j \geq 0 \quad \forall j$ ) et poser  $k = 1$ .
2. Si  $\forall i \in I_B$  (I indice de base) on a  $b_i^{(k)} > 0$ , alors  $x^{(k)}$  est une solution réalisable optimale. Aller en 8.
3. Sinon sélectionner la variable sortante  $x_s$  telle que :  $b_s^{(k)} = \min_{i \in I_B} \{b_i^{(k)}\}$ , avec  $b_i < 0$ .
4. Si  $a_{sj}^{(k)} > 0, \quad \forall j \in J_N$ , alors le problème est non réalisable. Aller en 8.
5. Sinon Sélectionner la variable entrante  $x_r$  telle que :

$$\frac{E_r^{(k)}}{a_{sr}^{(k)}} = \max_j \left\{ \frac{E_j^{(k)}}{a_{sj}^{(k)}} \quad \text{tel que } a_{sj}^{(k)} < 0 \right\}.$$

$a_{sr}$  est dit le pivot.

6. Utiliser le changement de base par opérations de pivotage (voir algorithme du simplexe) pour passer à la nouvelle base.
7.  $k = k + 1$ , aller en 2.
8. FIN.

**Exemple :** Résoudre avec l'algorithme dual-simplexe le programme linéaire dual de l'exemple précédant :

$$(D) \begin{cases} \min Z = 50x_1 + 90x_2 \\ 10x_1 + 15x_2 \geq 800 \\ 5x_1 + 10x_2 \geq 500 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \max -Z = -50x_1 - 90x_2 \\ 10x_1 + 15x_2 - e_1 = 800 \\ 5x_1 + 10x_2 - e_2 = 500 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, e_1 \geq 0, e_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \max -Z = -50x_1 - 90x_2 \\ -10x_1 - 15x_2 + e_1 = -800 \\ -5x_1 - 10x_2 + e_2 = -500 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, e_1 \geq 0, e_2 \geq 0. \end{cases}$$

On dispose d'une solution de base non réalisable optimale  $(0, 0, -800, -500)$ .

| Base  | $x_1$ | $x_2$ | $e_1$ | $e_2$ | $P_0$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $e_1$ | -10   | -15   | 1     | 0     | - 800 |
| $e_2$ | - 5   | -10   | 0     | 1     | - 500 |
| -Z    | 50    | 90    | 0     | 0     | -Z= 0 |

On a  $\min\{-800, -500\} = -800$  donc  $e_1$  sort de la base.  
 $\max\{\frac{50}{-10}, \frac{90}{-15}\} = -5$ ; donc  $x_1$  entre dans la base.

| Base  | $x_1$ | $x_2$ | $e_1$ | $e_2$ | $P_0$       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------------|
| $x_1$ | 1     | 3/2   | -1/10 | 0     | 80          |
| $e_2$ | 0     | -5/2  | -1/2  | 1     | -100        |
| -Z    | 0     | 15    | 5     | 0     | - Z= - 4000 |

On a  $\min\{80, -100\} = -100$  donc  $e_2$  sort de la base.  
 $\max\left\{\frac{15}{-\frac{5}{2}}, \frac{5}{-\frac{1}{2}}\right\} = -6$ ; donc  $x_2$  entre dans la base.

| Base  | $x_1$ | $x_2$ | $e_1$ | $e_2$ | $P_0$      |
|-------|-------|-------|-------|-------|------------|
| $x_1$ | 1     | 0     | 1/5   | -3/5  | 20         |
| $x_2$ | 0     | 1     | 5     | -2/5  | 40         |
| -Z    | 0     | 0     | 2     | 6     | -Z= - 4600 |

Tous les  $b_i \geq 0$ ; le critère d'optimalité est vérifié.  
 La solution optimale est :  $(x_1^*, x_2^*, e_1^*, e_2^*) = (20, 40, 0, 0)$   
 avec  $-Z^* = -4600$  et donc  $Z^* = 4600$ .

## Conclusion

Dans ce chapitre, on a vu quelques méthodes de résolution d'un problème linéaire. Premièrement, nous avons présenté la méthode graphique pour résoudre un problème linéaire à deux variables de décision, la solution optimale obtenue par cette méthode est un point d'intersection des droites de contraintes qui donne la meilleure évaluation de la fonction objectif. En suite, nous avons exposé la méthode du simplexe qui est la méthode la plus courante et la plus connue, elle est basée sur un processus itératif de construction des solutions qui améliore la valeur de la fonction objectif. Puis, nous avons illustré la méthode de deux phases, la méthode de pénalité et la méthode duale du simplexe qui sont utilisées lorsque on n'a pas une base unité de départ.

# Chapitre 3

## Méthode adaptée pour la résolution d'un programme linéaire

### Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons la méthode adaptée développée par R. Gabasov et F.M.Kirillova pour un problème de programmation linéaire avec contraintes d'égalité à variables bornées. Cette méthode est une généralisation de la méthode du simplexe. Elle utilise une métrique différente de celle du simplexe, dite adaptée.

### 3.1 Position du problème et définitions

Les problèmes de programmation linéaire dans la pratique sont, généralement, à variables bornées, ainsi, le problème de programmation linéaire à variables bornées se présente sous la forme canonique suivante :

$$\begin{cases} \max Z(x) = c^T x \\ Ax = b \\ d^- \leq x \leq d^+. \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $c, x, d^-, d^+$ , sont des vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ , et  $b \in \mathbb{R}^m$  ;

$A$  est une matrice d'ordre  $(m \times n)$ , avec  $\text{rang} A = m \leq n$ .

$I = \{1, 2, \dots, m\}$  est l'ensemble des indices lignes de  $A$  (indices des contraintes).

$J = \{1, 2, \dots, n\}$  est l'ensemble des indices colonnes de  $A$  (indices des variables).

Nous pouvons alors écrire les vecteurs de la manière suivante :

$$d^- = d^-(j) = (d_j^-, j \in J), \quad d^+ = d^+(j) = (d_j^+, j \in J); \quad x = x(j) = (x_j, j \in J).$$

$$c = c(j) = (c_j, j \in J)$$

Soit l'ensemble des solutions réalisables (ensemble des contraintes) :

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b, d^- \leq x \leq d^+\}$$

**Définition 3.1** : Un vecteur  $x$  vérifiant les contraintes générales  $Ax = b$  et les contraintes simples  $d^- \leq x \leq d^+$  est appelé **plan** ou **solution réalisable** du problème (3.1).

Le problème (3.1) consiste à trouver un **plan optimal**  $x^0 \in X$ , tel que :

$$Z(x^0) \geq Z(x), \forall x \in X \Leftrightarrow Z(x^0) = \max_{x \in X} Z(x).$$

**Définition 3.2** : Soit  $\varepsilon$  un nombre positif ou nul choisi à l'avance, un plan  $x^\varepsilon$  est appelée  $\varepsilon$ -**optimal** ou **suboptimal** si :

$$Z(x^0) - Z(x^\varepsilon) = c^T x^0 - c^T x^\varepsilon \leq \varepsilon.$$

où  $x^0$  est une solution optimale.

**Définition 3.3** : l'ensemble de  $m$  indices  $J_{sup} \subset J$  est appelé support du problème (3.1) si la sous-matrice  $A_{sup} = A(I, J_{sup})$  est inversible.

Le support  $J_{sup}$  est le sous-ensemble des indices de  $J$ , telle que quelle que soit le choix des composantes de  $x_N = (x_j, j \in J_N)$ ,  $J_N = J \setminus J_{sup}$ , les contraintes générales restent satisfaites pour les composantes du  $x_{sup} = (x_j, j \in J_{sup})$ .

Réellement, les contraintes générales  $Ax = b$  peut être écrit comme suit :

$$A_{sup}x_{sup} + A(I, J_N)x_N = b,$$

alors cette égalité reste vérifiée pour :

$$x_{sup} = A_{sup}^{-1}(b - A_N x_N), \text{ avec } A_N = A(I, J_N). \quad (3.2)$$

**Définition 3.4** : La paire  $\{x, J_{sup}\}$  formée du plan  $x$  et du support  $J_{sup}$  est appelé **plan de support** ou bien **solution réalisable de support**.

Le plan de support  $\{x, J_{sup}\}$  est dit non dégénéré si :

$$d_j^- < x_j < d_j^+, \forall j \in J_{sup}.$$



## 3.2 Critère d'optimalité

**Formule d'accroissement de la fonction objectif :**

Soit  $\{x, J_{sup}\}$  un plan de support et considérons un autre plan quelconque  $\bar{x} = x + \Delta x$ . L'accroissement de la fonction objectif s'écrit comme suit :

$$\Delta Z = Z(\bar{x}) - Z(x) = c^T \bar{x} - c^T x = c^T \Delta x. \quad (3.3)$$

On a :

$$A \Delta x = A(\bar{x} - x) = A\bar{x} - Ax = b - b = 0. \quad (3.4)$$

$$\Delta x = \begin{pmatrix} \Delta x_{sup} \\ \Delta x_N \end{pmatrix}, \quad \Delta x_N = (\Delta x_j, j \in J_N), \quad \Delta x_{sup} = (\Delta x_j, j \in J_{sup}).$$

Alors, on aura :

$$A_{sup} \Delta x_{sup} + A_N \Delta x_N = 0.$$

En effet :

$$\Delta x_{sup} = -A_{sup}^{-1} A_N \Delta x_N. \quad (3.5)$$

En substituant le vecteur  $\Delta x$  dans (3.3) on obtient :

$$\Delta Z = c_{sup}^T \Delta x_{sup} + c_N^T \Delta x_N = -(c_{sup}^T A_{sup}^{-1} A_N - c_N^T) \Delta x_N. \quad (3.6)$$

Définissons le vecteur des potentiels  $U$  donnée par :

$$U^T = c_{sup}^T A_{sup}^{-1} \in \mathbb{R}^m.$$

Ainsi que le vecteur des estimations  $E$  donnée par :

$$E^T = (E_j, j \in J) = c_{sup}^T A_{sup}^{-1} A - c^T = U^T A - c^T. \quad (3.7)$$

Il est clair que toutes les composantes support de  $E^T$  sont nulles :

$$E_{sup}^T = c_{sup}^T A_{sup}^{-1} A_{sup} - c_{sup}^T = 0.$$

Les composantes non-support de  $E^T$  sont définie comme suit :

$$E_j = U^T a_j - c_j, \quad j \in J_N, \quad (3.8)$$

où  $a_j$  est la  $j^{\text{ème}}$  colonne de  $A$ . De (3.6) et (3.7) on a :

$$\Delta Z = -E_N^T \Delta x_N = - \sum_{j \in J_N} E_j \Delta x_j. \quad (3.9)$$

### Le critère d'optimalité :

Soit  $\{x, J_{sup}\}$  une solution réalisable de support du problème (3.1),  $E_N$  est le vecteur des estimation non-support.

### Théorème 3.1 :

1. Les relations suivantes sont suffisantes pour l'optimalité d'une solution réalisables  $x$  :

$$\begin{cases} E_j \geq 0, & \text{si } x_j = d_j^-, \\ E_j \leq 0, & \text{si } x_j = d_j^+, \\ E_j = 0, & \text{si } d_j^- < x_j < d_j^+. \end{cases} \quad j \in J_N; \quad (3.10)$$

2. Ces même relations sont aussi nécessaires dans le cas où la solution réalisable de support  $\{x, J_{sup}\}$  est non-dégénéré.

### Preuve :

1. **Suffisance :** Soit  $\{x, J_{sup}\}$  un plan de support vérifiant (3.10), pour tout plan  $\bar{x}$  du problème (3.1), la formule d'accroissement (3.9) nous donne :

$$\Delta Z = Z(\bar{x}) - Z(x) = - \sum_{E_j > 0, j \in J_N} E_j(\bar{x}_j - d_j^-) - \sum_{E_j < 0, j \in J_N} E_j(\bar{x}_j - d_j^+)$$

et comme on a :

$$d_j^- \leq \bar{x}_j \leq d_j^+ \Rightarrow \bar{x}_j - d_j^- \geq 0 \text{ et } \bar{x}_j - d_j^+ \leq 0.$$

Donc, on déduit que :

$$Z(\bar{x}) - Z(x) \leq 0 \Rightarrow Z(\bar{x}) \leq Z(x), \forall \bar{x} \text{ plan}$$

alors, le vecteur  $x$  est donc un plan (solution) optimal du problème (3.1).

### 2. Nécessité :

Soit  $\{x, J_{sup}\}$  un plan de support optimal non dégénéré, et supposons que les relations (3.10) ne sont pas vérifiées. Alors, il existe au moins un indice  $j_0 \in J_N$  tel que  $E_{j_0} > 0$  et  $x_{j_0} > d_{j_0}^-$  ou bien  $E_{j_0} < 0$  et  $x_{j_0} < d_{j_0}^+$ .

Construisons alors un autre plan (solution réalisable)  $\bar{x} = x + \Delta x = x + \theta l$ , où  $\theta$  est un nombre réel strictement positif et  $l = l(J)$  un vecteur vérifiant :

$$\begin{cases} l_{j_0} = -\text{sign} E_{j_0} \\ l_j = 0, j \neq j_0, j \in J_N \\ l(J_{sup}) = -A_{sup}^{-1} A_N l(J_N) = -A_{sup}^{-1} a_{j_0} l_{j_0} = A_{sup}^{-1} a_{j_0} \text{sign} E_{j_0}. \end{cases}$$

On a :

$$A_{sup}l(J_{sup}) + A_Nl(J_N) = Al = 0 \quad \text{et} \quad A\bar{x} = A(x + \theta l) = Ax + \theta Al = b.$$

Le vecteur  $\bar{x}$  vérifie, ainsi, les contraintes générales, donc pour que  $\bar{x}$  soit un plan du problème (3.1), il doit aussi vérifier les contraintes simples.

$$d^- \leq \bar{x} \leq d^+ \Leftrightarrow d^- \leq x + \theta l \leq d^+ \Leftrightarrow d^- - x \leq \theta l \leq d^+ - x.$$

En écrivant composante par composante, on obtient

$$\begin{cases} d_j^- - x_j \leq \theta l \leq d_j^+ - x_j, & j \in J_{sup}; \\ d_{j_0}^- - x_{j_0} \leq -\theta \text{sign} E_{j_0} \leq d_{j_0}^+ - x_{j_0}. \end{cases} \quad (3.11)$$

Puisque le plan de support  $\{x, J_{sup}\}$  est non dégénéré, on a alors :

$$d_j^- < x_j < d_j^+ \Leftrightarrow d_j^- - x_j < 0 < d_j^+ - x_j, j \in J_{sup}.$$

De plus, on a :

$$\begin{cases} d_{j_0}^- - x_{j_0} < 0, & \text{si } E_{j_0} > 0; \\ d_{j_0}^+ - x_{j_0} > 0, & \text{si } E_{j_0} < 0. \end{cases}$$

Pour un nombre strictement positif assez petit, les relations (3.11) seront vérifiées, et le vecteur  $\bar{x}$  sera un plan du problème (3.1).

La formule d'accroissement (3.9) nous donne alors :

$$\begin{aligned} Z(\bar{x}) - Z(x) &= - \sum_{j \in J_N} E_j(\bar{x}_j - x_j) = -\theta \sum_{j \in J_N} E_j l_j \\ &= -\theta E_{j_0}(-\text{sign} E_{j_0}) = \theta |E_{j_0}| > 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

On en déduit que  $Z(\bar{x}) > Z(x)$ , ceci contredit le fait que  $x$  est un plan optimal du problème (3.1).

Par conséquent, si  $\{x, J_{sup}\}$  est un plan optimal non dégénéré, alors les relations (3.10) seront forcément vérifiées.

**Définition 3.5 :** La paire  $\{x^0, J_{sup}^0\}$  qui vérifie les relations (3.10) est une solution réalisable de support optimal.

### 3.3 Critère de suboptimalité

#### Estimation de suboptimalité

Soit  $\{x, J_{sup}\}$  un plan de support et choisissons un autre plan  $\bar{x} = x + \Delta x$ , tel que les composantes non-support de  $\bar{x}$  vérifient les contraintes simples :

$$d_j^- \leq \bar{x}_j = x_j + \Delta x_j \leq d_j^+, \quad j \in J_N.$$

d'où :

$$d_j^- - x_j \leq \Delta x_j \leq d_j^+ - x_j, \quad j \in J_N.$$

Pour estimer l'écart qui existe entre la valeur optimale  $Z(x^0)$  et la valeur  $Z(x)$  d'un plan de support quelconque, remplaçons dans la formule d'accroissement (3.3) le vecteur  $\bar{x}$  par  $x^0$ , et majorons la valeur de l'expression (3.9) :

$$\begin{aligned} \max \Delta Z(x) &= \max_{\substack{d_j^- - x_j \leq \Delta x_j \leq d_j^+ - x_j \\ j \in J_N}} \left( - \sum_{j \in J_N} E_j \Delta x_j \right) \\ &= \sum_{j \in J_N} \left( \max_{d_j^- - x_j \leq \Delta x_j \leq d_j^+ - x_j} (-E_j \Delta x_j) \right) \\ &= \sum_{E_j > 0, j \in J_N} E_j(x_j - d_j^-) + \sum_{E_j < 0, j \in J_N} E_j(x_j - d_j^+). \end{aligned}$$

Posons :

$$\beta(x, J_{sup}) = \sum_{E_j > 0, j \in J_N} E_j(x_j - d_j^-) + \sum_{E_j < 0, j \in J_N} E_j(x_j - d_j^+). \quad (3.13)$$

Par conséquent, on obtient une majoration de l'écart qui existe entre la valeur optimale  $Z(x^0)$  et la valeur  $Z(x)$ , qui est donnée par :

$$Z(x^0) - Z(x) \leq \beta(x, J_{sup}). \quad (3.14)$$

Le nombre réelle  $\beta(x, J_{sup})$  défini par (3.11), est appelé *estimation de suboptimalité* du plan de support  $\{x, J_{sup}\}$ .

### **Théorème 3.2 (Condition suffisante de suboptimalité) :**

*Soit  $\{x, J_{sup}\}$  un plan de support du problème (3.1), et  $\varepsilon \geq 0$  un nombre arbitraire. Si  $\beta(x, J_{sup}) \leq \varepsilon$ , alors le plan  $x$  est suboptimal ( $\varepsilon$  – optimal).*

## **3.4 Algorithme de la méthode**

Étant donnée un nombre réel positif ou nul quelconque  $\varepsilon$  et un plan de support initial  $\{x, J_{sup}\}$ , le but de l'algorithme est de construire un plan optimal  $x^0$  ou carrément un plan  $\varepsilon$ -optimal  $x^\varepsilon$ . Une itération de la méthode adaptée consiste à passer d'un plan (solution réalisable)  $x$  à un autre  $\bar{x}$  telle que :  $Z(\bar{x}) \geq Z(x)$ . Pour le faire on construit le nouveau plan  $\bar{x} = x + \theta l$ ,  $\theta \geq 0$ ,

où  $l$  est la direction d'amélioration ( $l \in \mathbb{R}^n$ ) avec  $Al = 0$ , et  $\theta$  le pas le long de cette direction.

Pour que l'accroissement  $\triangle Z = - \sum_{j \in J_N} E_j(\bar{x}_j - x_j) = -\theta \sum_{j \in J_N} E_j l_j$  soit maximale, il faut choisir  $\theta$  aussi grand que possible et choisir  $j_1$  tel que :

$$|E_{j_1}| = \max_{j \in J_{NN}} |E_j|,$$

avec  $J_{NN}$  représente le sous ensemble de  $J_N$  des indices non optimaux (ne vérifient pas le critère d'optimalité), alors  $j_1$  sera indice de support.

### Construction d'une direction d'amélioration adaptée

Considérons la métrique suivante pour les composantes non supports de la direction admissible  $l$  :

$$d_j^- - x_j \leq l_j \leq d_j^+ - x_j, \quad j \in J_N. \quad (3.15)$$

Cette métrique dépend du plan courant  $x$ , et de ce fait, elle est dite **adaptée**. Les composantes (3.15) se calculent en rendant maximal l'accroissement de la fonction objectif dans l'espace des variables non supports.

Ainsi, en tenant compte de la métrique (3.15), l'accroissement de la fonction objectif atteint son maximum pour les valeurs des composantes non supports suivantes :

$$l_j = \begin{cases} d_j^- - x_j & \text{si } E_j > 0, \\ d_j^+ - x_j & \text{si } E_j < 0, \\ 0 & \text{si } E_j = 0. \end{cases} \quad j \in J_N. \quad (3.16)$$

On a aussi :

$$Al = A_{sup}l_{sup} + A_N l_N = 0 \Rightarrow A_{sup}l_{sup} = -A_N l_N.$$

Alors on aura :

$$l_{sup} = -A_{sup}^{-1} A_N l_N. \quad (3.17)$$

### Calcul du pas maximale $\theta^0$

Construisons un nouveau plan  $\bar{x}$  sous la forme :

$$\bar{x} = x + \theta^0 l,$$

où  $l$  est la direction d'amélioration définie par (3.16),(3.17) et le nombre  $\theta^0$  est le pas le long de cette direction ; ce dernier se calcule de façon à ce que les contraintes générales et simples soient satisfaites. Pour les contraintes simples on doit avoir :

$$d_j^- - x_j \leq \theta^0 l_j \leq d_j^+ - x_j, \quad j \in J_{sup}. \quad (3.18)$$

$$d_j^- - x_j \leq \theta^0 l_j \leq d_j^+ - x_j, \quad j \in J_N. \quad (3.19)$$

De (3.16) et (3.19) nous déduisons que :

$$\theta^0 \leq 1. \quad (3.20)$$

En outre, pour satisfaire les contraintes (3.18) . On doit choisir  $\theta^0$  tel que :

$$\theta^0 \leq \theta_{j_0}, \quad \theta_{j_0} = \min_{j \in J_{sup}} \theta_j, \quad (3.21)$$

o   :

$$\theta_j = \begin{cases} (d_j^+ - x_j)/l_j & \text{si } l_j > 0, \\ (d_j^- - x_j)/l_j & \text{si } l_j < 0, \\ \infty & \text{si } l_j = 0. \end{cases} \quad (3.22)$$

De (3.20),(3.21) la valeur de  $\theta^0$  choisie comme suit :

$$\theta^0 = \min\{\theta_{j_0}, 1\}. \quad (3.23)$$

Ce choix va nous assurer que lors du déplacement le long de la direction  $l$ , les contraintes (3.18) (3.19) ne seront pas violées, c'est-  dire il va nous garantir l'admissibilité du nouveau plan  $\bar{x}$ . Dans ce cas l'écart qui existe entre la valeur optimale  $Z(x^0)$  et la valeur de  $Z(\bar{x})$  sera majoré comme suit :

$$Z(x^0) - Z(\bar{x}) = c^T x^0 - c^T \bar{x} = c^T x^0 - c^T x - \theta^0 c^T l \leq \beta(x, J_{sup}) - \theta^0 c^T l. \quad (3.24)$$

De plus, nous avons :

$$\begin{aligned} \beta(x, J_{sup}) - \theta^0 c^T l &= \beta(x, J_{sup}) - \theta^0 (u^T A_{sup} - E^T) l(j) \\ &= \beta(x, J_{sup}) + \theta^0 (E^T l - u^T A_{sup} l) \\ &= \beta(x, J_{sup}) - \theta^0 \beta(x, J_{sup}) = (1 - \theta^0) \beta(x, J_{sup}). \end{aligned}$$

Finalement, nous aurons :

$$Z(x^0) - Z(\bar{x}) \leq (1 - \theta^0) \beta(x, J_{sup}). \quad (3.25)$$

De l  , trois cas peuvent se présenter :

1.  $\theta^0 = 1$  : le plan  $\bar{x} = x + l$  vérifie le critère d'optimalité, il est donc optimal et le processus de résolution est terminé.
2.  $(1 - \theta^0) \beta(x, J_{sup}) \leq \varepsilon$  : le plan  $\bar{x}$  est donc  $\varepsilon$ -optimal et le processus de résolution peut être arrêté.
3.  $(1 - \theta^0) \beta(x, J_{sup}) > \varepsilon$  : poser  $\bar{J}_{sup} = (J_{sup} \setminus j_0) \cup j_1$ ,  $\bar{J}_N = (J_N \setminus j_1) \cup j_0$  et passer à l'itération suivante avec  $x = \bar{x}$ ,  $J_{sup} = \bar{J}_{sup}$ .

### 3.5 Exemple numérique

Soit le problème linéaire étudié dans le chapitre deux :

$$\begin{cases} \max Z = 800x_1 + 500x_2 \\ 10x_1 + 5x_2 + x_3 = 50 \\ 15x_1 + 10x_2 + x_4 = 90 \\ 1 \leq x_1 \leq 5 \\ 2 \leq x_2 \leq 10 \\ 0 \leq x_3 \leq 7 \\ 0 \leq x_4 \leq 3. \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 10 & 5 & 1 & 0 \\ 15 & 10 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 50 \\ 90 \end{pmatrix}, \quad c^T = (800, 500, 0, 0).$$

$$d^{-T} = (1, 2, 0, 0), \quad d^{+T} = (5, 10, 7, 3), \quad x^T = (x_1, x_2, x_3, x_4).$$

$$J = \{1, 2, 3, 4\}, \quad I = \{1, 2\}, \quad \text{rang} A = 2.$$

**Itération 1 :**

$$J_{sup} = \{2, 3\}, \quad J_N = \{1, 4\};$$

$$A_{sup} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 10 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A_{sup}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/10 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix}; \quad A_N = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 15 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{on prend } x_N^T = (1, 0) = (d_1^-, d_4^-)$$

$$x_{sup} = A_{sup}^{-1}(b - A_N x_N)$$

$$\text{alors, } A_N x_N = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 15 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$b - A_N x_N = \begin{pmatrix} 50 \\ 90 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 75 \end{pmatrix}$$

$$x_{sup} = \begin{pmatrix} 0 & 1/10 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 40 \\ 75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 75/10 \\ 5/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Donc  $x^T = (1, 75/10, 5/2, 0)$  est une solution réalisable.

$$c_{sup}^T = (500, 0), \quad c_N^T = (800, 0).$$

$$\begin{aligned}
E_N^T &= c_{sup}^T A_{sup}^{-1} A_N - c_N^T = 0. \\
c_{sup}^T A_{sup}^{-1} &= (500, 0) \begin{pmatrix} 0 & 1/10 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix} = (0, 50). \\
E_N^T &= (0, 50) \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 15 & 1 \end{pmatrix} - (800, 0) = (750, 50) - (800, 0) = (-50, 50) = (E_1, E_4).
\end{aligned}$$

On a :  $E_1 < 0$ ,  $x_1 = 1 = d_1^-$ ,  $j = 1 = j_1$  ne vérifie pas le critère d'optimalité,

$$E_4 > 0, \quad x_4 = 0 = d_4^-, \quad j = 4 \text{ vérifie le critère d'optimalité.}$$

Calculons la direction  $l$  :

$$\begin{cases} l_1 = d_1^+ - x_1 = 5 - 1 = 4 \\ l_4 = d_4^- - x_4 = 0 - 0 = 0. \end{cases} \Rightarrow l_N^T = (4, 0).$$

$$l_{sup} = -A_{sup}^{-1} A_N l_N$$

$$-A_{sup}^{-1} A_N = \begin{pmatrix} 0 & -1/10 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 15 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/2 & -1/10 \\ -5/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

$$l_{sup} = \begin{pmatrix} -3/2 & -1/10 \\ -5/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_2 \\ l_3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Alors } l^T = (4, -6, -10, 0).$$

Calculons le pas maximale  $\theta^0$  :

On a :  $\theta^0 = \min\{\theta_{j_0}, 1\}$ , tel que :

$$\theta_{j_0} = \min_{j \in J_{sup}} \theta_j = \min\{\theta_2, \theta_3\}.$$

$$\begin{cases} \theta_2 = \frac{d_2^- - x_2}{l_2} = \frac{2 - 75/10}{-6} = 55/6 \\ \theta_3 = \frac{d_3^- - x_3}{l_3} = \frac{0 - 5/2}{-10} = 1/4. \end{cases}$$

Alors :  $\theta_{j_0} = 1/4 = \theta_3 = \theta^0$ ,  $j_0 = 3$  sorte le support (sera indice non support).

Calculons le nouveau plan  $\bar{x}$  :

$$\bar{x} = x + \theta^0 l = \begin{pmatrix} 1 \\ 75/10 \\ 5/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$



Donc la nouvelle solution réalisable est  $\bar{x}^T = (2, 6, 0, 0)$  avec le nouveau support  $\bar{J}_{sup} = \{2, 1\}$  et  $\bar{J}_N = \{3, 4\}$ .

### Itération 2 :

On pose :  $x^T = \bar{x}^T = (2, 6, 0, 0)$ ,  $J_{sup} = \bar{J}_{sup} = \{2, 1\}$ ,  $J_N = \bar{J}_N = \{3, 4\}$ .

$$A_{sup} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 15 \end{pmatrix} \Rightarrow A_{sup}^{-1} = \begin{pmatrix} -3/5 & 2/5 \\ 2/5 & -1/5 \end{pmatrix}.$$

$$A_N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad c_{sup}^T = (500, 800), \quad c_N^T = (0, 0).$$

$$E_N^T = (500, 800) \begin{pmatrix} -3/5 & 2/5 \\ 2/5 & -1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - (0, 0) = (20, 160) = (E_3, E_4).$$

$$E_3 = 20 > 0, \quad x_3 = 0 = d_3^-.$$

$$E_4 = 160 > 0, \quad x_4 = 0 = d_4^-.$$

Le critère d'optimalité est vérifié, par suite  $x^{*T} = (2, 6, 0, 0)$  est une solution optimale, avec  $Z^* = 4600$ .

**Remarque 3.1** : La résolution de l'exemple précédent par la méthode du simplexe et la méthode adaptée, nous confirme que la méthode adaptée converge plus rapidement que la méthode du simplexe, ce résultat reste à confirmer en programmant ces deux méthodes, et de les tester sur plusieurs exemples.

## Conclusion

La méthode que nous avons présentée a la particularité de tenir compte des spécificités des problèmes tels qu'ils sont formulés lors de leur modélisation première.

Outre la méthode du simplexe, la méthode adaptée possède une autre métrique pour le choix de la direction d'amélioration, elle à aussi un critère d'arrêt, si une certaine précision obtenue est satisfaisante : en effet, le calcul d'un nombre appelé estimation de suboptimalité permet d'estimer l'écart entre la valeur de la fonction objectif à une itération donnée et sa valeur optimale ; si cet écart est inférieur à  $\varepsilon$  ( $\varepsilon$  est un nombre positif ou nul donné à l'avance), on dit que la solution réalisable obtenue est  $\varepsilon$ -optimale ou suboptimale.

En pratique, on peut alors arrêter le processus de résolution dès que la précision obtenue sera suffisante, cela évitera de faire encore de nombreuses itérations pour obtenir qu'une amélioration négligeable de la fonction objectif.

# Conclusion générale

Notre travail consiste à étudier une méthode de résolution d'un problème de programmation linéaire, en particulier, la méthode adaptée pour résoudre un programme linéaire avec contraintes d'égalité à variables bornées. Pour cela nous avons donné dans le premier chapitre des rappelés et des notions fondamentales sur l'algèbre linéaire, qui seront utilisées dans le reste du travail.

Le deuxième chapitre, traite quelques méthodes de résolution d'un problème linéaire, dont nous avons vu : au premier lieu, la résolution graphique ; en suite nous avons présenté la méthode du simplexe, qui est la méthode la plus connue et la plus utilisée dans le domaine de programmation linéaire, elle permet de résoudre un problème linéaire écrit sous une forme standard, dans le cas où le problème est sous la forme canonique on doit faire des transformations et le rendre standard puis, nous avons exposé la méthode des deux phases et la méthode de pénalité qui sont employées pour trouver une base unité de départ, par l'ajoute des variables artificielles ; finalement, on a abordé la méthode duale du simplexe qui est un autre outil de résolution.

Dans le troisième chapitre nous avons étudié la méthode adaptée pour résoudre un programme linéaire avec contraintes d'égalité à variables bornées, le principe de cette méthode est simple : partant d'un plan de support initial (constitué d'une solution réalisable et d'un support), chaque itération de l'algorithme de la méthode consiste à trouver une direction d'amélioration et un pas maximal le long de cette direction, de façon à améliorer la valeur de la fonction objectif, tout en s'assurant de ne pas sortir du domaine admissible déterminé par les contraintes du problème.

Dans l'algorithme du simplexe nous travaillons avec des solutions réalisables basiques qui sont très particulières, de plus l'algorithme ne peut indiquer que si une solution basique donnée est proche ou non de la solution optimale, par contre la méthode adaptée permet de voir si une résolution est proche ou non, en calculant d'estimation de suboptimalité. Contrairement aux solutions réalisables de base les plans de support admettent d'autre métrique pour la direction admissible dite

adaptée. De plus la méthode adaptée s'applique sur le problème initial directement par contre la méthode du simplexe suppose que le problème linéaire est sous la forme standard.

# Table des figures

|     |                                                  |    |
|-----|--------------------------------------------------|----|
| 1.1 | Ensembles convexes et non convexes . . . . .     | 9  |
| 1.2 | Fonctions convexes et non convexes. . . . .      | 10 |
| 1.3 | Les demi-plans de $\mathbb{R}^2$ . . . . .       | 12 |
| 2.1 | Principe de la programmation linéaire . . . . .  | 17 |
| 2.2 | Ensemble des solutions réalisables . . . . .     | 21 |
| 2.3 | Représentation de la fonction objectif . . . . . | 22 |
| 2.4 | Localisation de la solution optimale. . . . .    | 23 |

# Liste des tableaux

|     |                                                         |    |
|-----|---------------------------------------------------------|----|
| 2.1 | Le premier tableau du simplexe. . . . .                 | 39 |
| 2.2 | La relation entre les variables dual et primal. . . . . | 50 |

# Bibliographie

- [1] M. AZI, Support du cours de programmation linéaire, Centre Universitaire de Mila 2012 – 2013.
- [2] S. BOUKAROURA, Support du cours de Programmation linéaire, Centre Universitaire de Mila 2011 – 2012.
- [3] B. BRAHMI, Méthodes primale et duale pour la résolution des problèmes de programmation quadratique convexe, Mémoire de magister, Béjaïa 2006.
- [4] C. BREZINSKI, Initiation à la programmation linéaire et à l'algorithme du simplexe, Ellipses Édition Marketing S.A 2002.
- [5] D. DE WOLF : Recherche opérationnelle, Dunkerque, Septembre 2006.
- [6] Y. DODGE, Optimisation appliquée, Verlag France 2005.
- [7] R. FAURE, Précis de recherche opérationnelle, France 1996.
- [8] R. GBASOV, F.M.KRILLOVA et S.V.PRISCHPOVA, Optimal feedback control, M.Thoma Springer Verlage London 1995.
- [9] K. HASSAINI, Méthode adaptée pour la résolution d'un problème de programmation quadratique avec des M-matrices, Mémoire de magister, Béjaïa, 2008.
- [10] N. HEMRI, Support du cours de l'analyse numérique, Centre Universitaire de Mila 2009 – 2010.
- [11] J. JAVET, Programmation lineaire, 2MSPM-2004.
- [12] B. KORTE et J.VYGEN, Optimisation combinatoire théorie et algorithmes, Springer-Verlag France 2010.
- [13] A. ZAATRI, Les techniques de la recherche opérationnelle, la collection mathématique de l'université mentouri constantine Mars 2002.

# *Résumé*

La programmation linéaire est une technique mathématique qui permet de résoudre des problèmes linéaires précis. Parmi les méthodes qui sont utilisées pour la résolution de ces problèmes, nous avons présentées : la méthode graphique dans le cas où le problème linéaire a deux variables de décision ; ainsi, la méthode du simplexe qui est la méthode la plus connue et la plus utilisée, elle converge en un nombre finie d'itérations sous l'hypothèse de non dégénérescence. Finalement, nous avons étudiée la méthode adaptée qui est connue par son efficacité, rapidité de convergence, simplicité algorithmique et capacité de résoudre des problèmes de grande taille ; de plus, la méthode adaptée est une généralisation et amélioration en même temps de la méthode du simplexe, elle utilise une métrique différente de celle du simplexe dite adaptée. La particularité de cette méthode réside dans le fait qu'elle évite toute transformation préliminaire du problème, et elle possède un critère de suboptimalité qui permet d'arrêter l'algorithme avec une précision désirée.

**Mots clés :** Programmation linéaire, solution optimale, méthode du simplexe, méthode adaptée.

# *Abstract*

Linear programming is a mathematical technique to solve a linear problem. In this work, the following methods are treated : The graphical method where the linear problem has two decision variables ; the simplex method which is the most known and most used method, it converges in a finite number of iterations under the assumption of non-degeneracy number. Finally, we studied the adapted method which is known for its effectiveness, speed of convergence, computational simplicity and ability to solve large problems, in addition, this method is a generalization of the simplex method, it uses an adapted metric different from that of the simplex. The particularity of this method is the fact that it avoids the preliminary transformation of the problem, and he has a suboptimal criterion which stops the algorithm with the desired accuracy.

**Key words :** Linear programming, optimal solution, the simplex method, the adapted method.

# **Résumé**

*La programmation linéaire est une technique mathématique qui permet de résoudre des problèmes linéaires précis. Parmi les méthodes qui sont utilisées pour la résolution de ces problèmes, nous avons présentées : la méthode graphique dans le cas où le problème linéaire a deux variables de décision; ainsi, la méthode du simplexe qui est la méthode la plus connue et la plus utilisée, elle converge en un nombre fini d'itérations sous l'hypothèse de non dégénérescence.*

*Finalement, nous avons étudiée la méthode adaptée qui est connue par son efficacité, rapidité de convergence, simplicité algorithmique et capacité de résoudre des problèmes de grande taille; de plus, la méthode adaptée est une généralisation et amélioration en même temps de la méthode du simplexe, elle utilise une métrique différente de celle du simplexe dite adaptée. La particularité de cette méthode réside dans le fait qu'elle évite toute transformation préliminaire du problème, et elle possède un critère de suboptimalité qui permet d'arrêter l'algorithme avec une précision désirée.*

**Mots clés:** *Programmation linéaire, solution optimale, méthode du simplexe, méthode adaptée.*

# **Abstract**

*Linear programming is a mathematical technique to solve a linear problem. In this work, the following methods are treated: The graphical method where the linear problem has two decision variables; the simplex method which is the most known and most used method, it converges in a finite number of iterations under the assumption of non-degeneracy number.*

*Finally, we studied the adapted method which is known for its effectiveness, speed of convergence, computational simplicity and ability to solve large problems, in addition, this method is a generalization of the simplex method, it uses an adapted metric different from that of the simplex. The particularity of this method is the fact that it avoids the preliminary transformation of the problem, and he has a suboptimal criterion which stops the algorithm with the desired accuracy.*

**Key words:** *Linear programming, optimal solution, the simplex method, the adapted method.*





## ملخص:

البرمجة الخطية تقنية رياضية تسمح بحل مشاكل خطية محددة بعد تحويلها إلى نموذج رياضي، من بين الطرق المستعملة لأجل حل هذه المشاكل، قدمنا الطريقة البيانية التي تستعمل في حالة ما إذا كان الشكل الخطي من البعد الثاني، كذلك الطريقة المشهورة  $\text{simplexe}$ . الأكثر استعمالاً، تقترب في عدد منتهي من المراحل التكرارية تحت خاصية عدم الانحلال في الأخير درسنا الطريقة الموافقة المعروفة بفاعليتها، سرعة تقاربها، بساطة برمجتها و قدرتها على حل المشاكل الضخمة، زيادة على هذا، الطريقة الموافقة تعتبر تعميم و تحسين لطريقة  $\text{simplexe}$ .  
أهم خاصية تميز هذه الطريقة هي تفادي تحويل الشكل المطروح قبل حله.  
**الكلمات المفتاحية:** البرمجة الخطية، الحل المثالي، طريقة  $\text{simplexe}$ ، الطريقة الموافقة.