الجمهوريـة الجزائـريـة الديمقراطيـة الشعبيـة
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليـم العالـي والبحـث العلمـي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

N° Ref :……………

Centre Universitaire de Mila

Institut des sciences et de la technologie **Département de Mathématiques et Informatique**

Résolution numérique des équations différentielles fractionnaires

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques

Spécialité: Mathématiques appliquées et fondamentales

Préparé par :

Boumelit Imane **Belmerabet Meriem**

Soutenu le... Juin 2013 devant le jury composé de :

Mr. Nasr-Eddine Hamri	**C.U. Mila**	**Président**
Mr. Abdelouahab Mohammed Salah	**C.U. Mila**	**Encadreur**
Mme. Laouira Widad	**C.U. Mila**	**Examinateur**

Année universitaire : 2012/2013

Remerciements

Louange à dieu tout puissant de nous avoir aidé, éclairer le chemin pour achever notre travail et nos études.

Nos remerciements à nos très chers parents, frères, sœurs, collègues et amis respectives qui nous ont encouragés, soutenu durant tout notre parcours.

Un remerciement particulier à notre encadreur Mr Mohamed-Salah Abdelouahab pour sa présence, son aide et surtout pour ses précieux conseils qui nous ont assistés pour l'accomplissement de notre projet malgré les préoccupations administratives.

Nous remercions vivement le professeur Nasr-Eddine Hamri et madame Laouira Widad membres de jury pour l'honneur qu'ils nous ont accordé en acceptant de juger notre travail.

Enfin nous remercions toutes personnes qui ont contribué de prés ou de loin à l'achèvement de ce travail.

Merci

MERIEM, IMANE.

Dédicace

Avec l'aide de dieu tout puissant est achevé le présent travail que je dédie:

A mes espoirs dans la vie, les plus chères personnes que je n'arrive pas et je n'arriverai jamais à rendre ce qu'ils m'ont donnés, les plus beaux personnes du monde, mes parents, pour ses dévouements, ses compréhensions, ses grandes tendresses et ses prières pour moi. Que dieu tout puissant les garde pour moi.

A mon encadreur Mohamed Salah Abdelouahab et toutes mes enseignants.

Mes chères frères pour leur soutient physique et moral.

Ma chère sœur pour son soutient et encouragement.

Les roses de la famille : Abdelghafour, Yahia et Aya

A ma grande famille, a tous mes amies sans exception plus précisément « IMANE, SIHAM ».

A tous ceux que j'aime et m'aime, je dédie ce modeste mémoire qui j'espère être à la hauteur de leur espérance.

MERIEM

Dédicace

Avec l'aide de dieu tout puissant est achevé le présent travail que je dédie:

A mes espoirs dans la vie, les plus chères personnes que je n'arrive pas et je n'arriverai jamais à rendre ce qu'ils m'ont donnés, les plus beaux personnes du monde, mes parents, pour ses dévouements, ses compréhensions, ses grandes tendresses et ses prières pour moi. Que dieu tout puissant les garde pour moi.

A mon encadreur Mohammed Salah Abdelouahab et toutes mes enseignants.

Mon chère frère YAKOUB pour son soutient physique et moral.

Mes chères sœurs: IBTISSAM, HALLA, MAYA pour leur soutient et encouragement.

A mes grandes parents, et ma grande famille.

A tous mes amies : WARDA, MERJEM, SANA,…

A tous ceux que j'aime et m'aime, je dédie ce modeste mémoire qui j'espère être à la hauteur de leur espérance.

IMANE

Table des matières

Table des figures **3**

Introduction **4**

1 Dérivées et intégrales d'ordre fractionnaire **5**
1.1 Dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov 5
1.1.1 L'unification des dérivées et des intégrales d'ordre entier . . 5
1.1.2 Intégrale d'ordre arbitraire 9
1.1.3 Dérivées d'ordre arbitraire 11
1.1.4 La dérivée fractionnaire de $(t-a)^v$ 14
1.1.5 Composition avec les dérivées d'ordre entier 15
1.1.6 Composition avec des dérivées fractionnaires 17
1.2 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville 18
1.2.1 Intégrale d'ordre arbitraire 19
1.2.2 Dérivée d'ordre arbitraire 20
1.2.3 Dérivée fractionnaire de $(t-a)^v$ 22
1.2.4 Composition avec les dérivées d'ordre entier 23
1.2.5 Composition avec les dérivées fractionnaires 24
1.3 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo 25
1.4 Dérivée fractionnaire séquentielle 27
1.5 Quelques propriétés des dérivées fractionnaires 28
1.5.1 Linéarité 28
1.5.2 La règle de Leibniz pour les dérivées fractionnaires 29
1.6 Transformée de Laplace des dérivées fractionnaires 30

2 Equations différentielles d'ordre fractionnaire **34**
2.1 Existence et unicité 34
2.2 Equations différentielles linéaires d'ordre fractionnaire 37
2.3 Systèmes linéaires d'ordre fractionnaire 38

3 Quelques méthodes de résolution numérique **42**
3.1 Méthode basée sur la définition de Grünwald-Letnikov 43
3.2 Méthode de Diethelm basée sur la quadrature 45
3.3 Méthode de Prédiction-Correction 49
3.4 Méthode de Lubich 51
3.5 Le principe de la mémoire courte pour une équation différentielle fractionnaire 53

4 Applications **54**

Conclusion **60**

Annexe **61**

Bibliographie **69**

Table des figures

1.1 ${}_0\mathbf{D}_t^p t^3$ pour quelques valeurs de p. 23

4.1 Solution de (4.1) par GL pour $\alpha = 0.1$ et $h = 0.008$ 56
4.2 Solution de (4.1) par D pour $\alpha = 0.1$ et $h = 0.004$ 56
4.3 Solution de (4.1) par PECE pour $\alpha = 0.8$ et $h = 0.004$ 56
4.4 La dynamique de (4.2) pour $q = 0.985$ 58
4.5 La dynamique de (4.2) pour $q_1 = 0.69$ 58
4.6 La dynamique de (4.2) pour $q_3 = 0.6$ 59

Introduction

Dans la littérature, on attribue souvent le nom de la dérivation fractionnaire à la généralisation de la dérivation à un ordre quelconque, entier, réel ou complexe.

Le concept de calcul fractionnaire revient à la fin du $17^{ème}$ siècle [1, 2, 6, 9], l'époque où Newton et Leibniz on développé les fondements de calcul différentiel et intégral, Leibniz a présenté le symbole $\frac{d^n f}{dt^n}$ pour désigner la $n^{ème}$ dérivée d'une fonction f où $n \in \mathbb{N}$, et l'Hôpital est interpolé en 30 septembre 1695 [2] sur le sens et la possibilité de la dérivée fractionnaire d'ordre $\frac{1}{2}$.

Les dérivées non entières possèdent un effet de mémoire, cette effet est une raison pour laquelle le calcul fractionnaire a connu un intérêt considérable.

Une des branches émergeant de cette étude est la théorie des équations différentielles d'ordre fractionnaire et ses résolutions lorsqu'elles admettent des solutions.

Dans ce mémoire, on s'intéresse à la résolution numérique des équations différentielles d'ordre fractionnaire et la présentation d'un certain nombre des méthodes numériques permettant de résoudre ces équations.

Nous commençons par rappeler, dans le chapitre 1, les notions de dérivation et intégration fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov, Riemman-Liouville et Caputo avec leurs propriétés.

Dans le chapitre 2, nous étudions l'existence et l'unicité de solution pour un problème aux valeurs initiales, ensuite, nous donnons la solution analytique de l'équation différentielle linéaire d'ordre fractionnaire, unidimensionnelle et multidimensionnelle.

On consacre le $3^{ème}$ chapitre à la résolution du problème aux valeurs initiales par différentes méthodes numériques et nous donnons les principes et les techniques de chaque méthode. En fin, on termine notre travail par un chapitre consacré à l'application des résultats théoriques qu'on a vu précédemment.

Chapitre 1

Dérivées et intégrales d'ordre fractionnaire

Dans ce chapitre nous allons étudier quelques approches qui généralisent les notions de différentiation et intégration à l'ordre arbitraire [10] ; ces approches sont les définitions de Grünwald-Letnikov, Riemman-Liouville et Caputo.

1.1 Dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov

1.1.1 L'unification des dérivées et des intégrales d'ordre entier

Dans cette section nous décrivons une approche à l'unification des deux notions, qui sont souvent présentées séparément dans l'analyse classique : dérivées d'ordre entier n et l'intégrale répétée n fois [5]. Comme il sera montré ci-dessous, ces notions sont proches l'une de l'autre que celles qu'on suppose habituellement.

Considérons une fonction continue $y = f(t)$. Selon la définition bien connue, la dérivée première de la fonction $f(t)$ est définie par :

$$f'(t) = \frac{df(t)}{dt} = \lim_{h \to 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h}. \tag{1.1}$$

L'application de cette définition deux fois nous donne la dérivée seconde

$$\begin{aligned} f''(t) = \frac{d^2 f(t)}{dt^2} &= \lim_{h\to 0} \frac{f'(t) - f'(t-h)}{h}, \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left\{ \frac{f(t) - f(t-h)}{h} - \frac{f(t-h) - f(t-2h)}{h} \right\}, \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)}{h^2}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

En utilisons (1.1) et (1.2) on obtient

$$f'''(t) = \frac{d^3 f(t)}{dt^3} = \lim_{h\to 0} \frac{f(t) - 3f(t-h) + 3f(t-2h) - f(t-3h)}{h^3},$$

et par récurrence

$$f^{(n)}(t) = \frac{d^n f(t)}{dt^n} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^n} \sum_{r=0}^{n} (-1)^n \binom{n}{r} f(t-rh), \tag{1.3}$$

où

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!},$$

est la notation habituelle des coefficients de binôme.

Considérons maintenant l'expression suivante généralisant les fractions (1.1) et (1.2) :

$$f_h^{(p)}(t) = \frac{1}{h^p} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{p}{r} f(t-rh), \tag{1.4}$$

où p est un entier positif ; n est aussi un entier

Evidemment pour $p \leqslant n$ on a :

$$\lim_{h\to 0} f_h^{(p)}(t) = f^{(p)}(t) = \frac{d^p f(t)}{dt^p},$$

car tout les coefficients du numérateur après $\binom{p}{p}$ sont nuls

Considérons les valeurs négatives de p, on note :

$$\begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} = \frac{p(p+1)\cdots(p+r-1)}{r!},$$

on a alors :

$$\binom{-p}{r} = \frac{-p(-p-1)\cdots(-p-r+1)}{r!} = (-1)^r \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix}.$$

En remplaçant p dans (1.3) par $-p$ on a

$$f_h^{(-p)}(t) = \frac{1}{h^{-p}} \sum_{r=0}^{n} \left[\begin{array}{c} p \\ r \end{array} \right] f(t - rh),$$

où p est un entier positif.

Si p est fixé, alors $f_h^{(-p)}(t) \longrightarrow 0$ quand $h \to 0$. Pour arriver à une limite non nulle, on suppose que $n \longrightarrow \infty$ quand $h \to 0$. On peut prendre $h = \frac{t-a}{n}$, $a \in \mathbb{R}$, et on considère la valeur limite, soit finie ou infinie de $f_h^{-p}(t)$ que l'on notera comme suit :

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ nh = t-a}} f_h^{(-p)}(t) = {}_a\mathcal{D}_t^{-p} f(t). \tag{1.5}$$

Considérons maintenant quelques cas particuliers :
Pour $p = 1$ on a

$$f_h^{(-1)}(t) = h \sum_{r=0}^{n} f(t - rh).$$

En tenant compte de $t - a = nh$ et que f est supposée continue, on conclut que :

$$\lim_{h \to 0} f_h^{(-1)}(t) = {}_a\mathcal{D}_t^{-1} f(t) = \int_0^{t-a} f(t-z)dz = \int_a^t f(\tau)d\tau.$$

Pour $p = 2$ on a

$$\left[\begin{array}{c} 2 \\ r \end{array} \right] = \frac{2 \times 3 \times \cdots \times (2 + r - 1)}{r!} = r + 1,$$

et on a

$$f_h^{(-2)}(t) = h \sum_{r=0}^{n} (r+1) h f(t - rh),$$

et posons $t + h = y$ on peut écrire

$$f_h^{(-2)}(t) = h \sum_{r=1}^{n+1} (rh) f(y - rh).$$

En faisant tendre $h \to 0$, nous aurons

$$\lim_{h \to 0} f_h^{(-2)}(t) = {}_a\mathcal{D}_t^{-2} f(t) = \int_0^{t-a} z f(t-z)dz = \int_a^t (t-\tau) f(\tau)d\tau,$$

car $y \to t$ quand $h \to 0$.
Le troisième cas particulier, à savoir $p = 3$, nous arrivons à l'expression générale

de ${}_a\mathcal{D}_t^{-p}$. En tenant compte de :

$$\begin{bmatrix} 3 \\ r \end{bmatrix} = \frac{3 \times 4 \times \cdots \times (3+r-1)}{r!} = \frac{(r+1)(r+2)}{1.2},$$

on a

$$f_h^{(-3)}(t) = \frac{h}{1.2}\sum_{r=0}^{n}(r+1)(r+2)h^2 f(t-rh),$$

et en notant par $t+2h=y$ on écrit

$$\begin{aligned} f_h^{(-3)}(t) &= \frac{h}{1\times 2}\sum_{r=1}^{n+1} r(r+1)h^2 f(y-rh) \\ &= \frac{h}{1\times 2}\sum_{r=0}^{n+1}(rh)^2 f(y-rh) + \frac{h^2}{1\times 2}\sum_{r=0}^{n+1}(rh)f(y-rh). \end{aligned}$$

Si $h \to 0$, nous obtenons :

$${}_a\mathcal{D}_t^{-3}f(t) = \frac{1}{2!}\int_0^{t-a} z^2 f(t-z)dz = \frac{1}{2!}\int_a^t (t-\tau)^2 f(\tau)d\tau.$$

car $y \to t$ quand $h \to 0$ et

$$\lim_{h\to 0}\frac{h^2}{1\times 2}\sum_{r=0}^{n+1}(rh)f(y-rh) = \lim_{h\to 0}\frac{h}{2!}\int_a^t (t-\tau)f(\tau)d\tau = 0.$$

Les relations précédentes suggèrent l'expression générale suivante :

$${}_a\mathcal{D}_t^{-p}f(t) = \lim_{h\to 0} h^p \sum_{r=0}^{n}\begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} f(t-rh) = \frac{1}{(p-1)!}\int_a^t (t-\tau)^{p-1}f(\tau)d\tau. \tag{1.6}$$

Montrons maintenant que la formule (1.4) est une représentation d'une intégrale répétée n fois.

En intégrant la relation

$$\frac{d}{dt}({}_a\mathcal{D}_t^{-p}f(t)) = \frac{1}{(p-2)!}\int_a^t (t-\tau)^{p-2}f(\tau)d\tau = {}_a\mathcal{D}_t^{-p+1}f(t),$$

de a à t nous obtenons :

$${}_a\mathcal{D}_t^{-p}f(t) = \int_a^t ({}_a\mathcal{D}_t^{-p+1}f(\tau))d\tau, \qquad {}_a\mathcal{D}_t^{-p+1}f(t) = \int_a^t ({}_a\mathcal{D}_t^{-p+2}f(\tau))d\tau, \ldots$$

et ainsi

$$\begin{aligned} {}_a\mathcal{D}_t^{-p} f(t) &= \int_a^t dt \int_a^t ({}_a\mathcal{D}_t^{-p+2} f(t)) dt, \\ &= \int_a^t dt \int_a^t dt \int_a^t ({}_a\mathcal{D}_t^{-p+3} f(t)) dt, \\ &= \underbrace{\int_a^t dt \int_a^t dt \cdots \int_a^t}_{p-fois} f(t) dt. \end{aligned}$$

On voit que la dérivée d'ordre entier n (1.3) et l'intégrale répétée p fois (1.6) d'une fonction continue $f(t)$ sont des cas particuliers de l'expression

$$ {}_a\mathcal{D}_t^{p} f(t) = \lim_{h \to 0} h^{-p} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{p}{r} f(t - rh), \tag{1.7}$$

qui représente la dérivée d'ordre m si $p = m$ et l'intégrale répétée m-*fois* si $p = -m$. Cette observation entraîne naturellement l'idée d'une généralisation des notions de différentiation et d'intégration en imposant à p, dans (1.7) d'être un nombre réel ou même complexe, arbitraire. On se restreindra aux valeurs réelles de p.

1.1.2 Intégrale d'ordre arbitraire

Considérons le cas $p < 0$, remplaçons par $-p$ dans l'expression (1.7). Alors (1.7) prend la forme :

$$ {}_a\mathcal{D}_t^{-p} f(t) = \lim_{h \to 0} h^{p} \sum_{r=0}^{n} \left[\begin{array}{c} p \\ r \end{array} \right] f(t - rh), \tag{1.8}$$

avec $nh = t - a$. Pour prouver l'existence de le la limite dans (1.8) et évaluer cette limite on a besoin du théorème suivant

Théorème 1.1. *Prenons deux suites* (β_k), $(\alpha_{n,k})$, $k = 1, 2, \ldots$*et supposons que :*

$$\lim_{k\to\infty} \beta_k = 1, \tag{1.9}$$

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_{n,k} = 0; \qquad \textit{pour tout } k, \tag{1.10}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{n,k} = A; \qquad \textit{pour tout } k, \tag{1.11}$$

$$\sum_{k=1}^{n} |\alpha_{n,k}| < K; \qquad \textit{pour tout } n, \tag{1.12}$$

alors

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{n,k}\beta_k = A. \tag{1.13}$$

Le théorème (1.1) a une conséquence simple, à savoir, si on prend

$$\lim_{k\to\infty} \beta_k = B \qquad \text{alors} \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{n,k}\beta_k = AB.$$

Pour appliquer le théorème (1.1) afin d'évaluer la limite (1.8) on écrit :

$$\begin{aligned}
{}_a\mathcal{D}_t^{-p} f(t) &= \lim_{h\to 0} h^p \sum_{r=0}^{n} \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} f(t-rh), \\
&= \lim_{h\to 0} \sum_{r=0}^{n} \frac{1}{r^{p-1}} \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} h(rh)^{p-1} f(t-rh), \\
&= \frac{1}{\Gamma(p)} \lim_{h\to 0} \sum_{r=0}^{n} \frac{\Gamma(p)}{r^{p-1}} \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} h(rh)^{p-1} f(t-rh), \\
&= \frac{1}{\Gamma(p)} \lim_{h\to 0} \sum_{r=0}^{n} \frac{\Gamma(p)}{r^{p-1}} \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} \frac{t-a}{n} \left(\frac{t-a}{n}\right)^{p-1} f\left(t - r\frac{t-a}{n}\right).
\end{aligned}$$

$$\text{On prend} \qquad \beta_r = \frac{\Gamma(p)}{r^{p-1}} \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix}; \quad \alpha_{n,r} = \frac{t-a}{n} \left(r\frac{t-a}{n}\right)^{p-1} f\left(t - r\frac{t-a}{n}\right)$$

En utilisant l'identitï£¡ $\qquad \Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)};$

on aura

$$\lim_{r\to\infty} \beta_r = \lim_{r\to\infty} \frac{\Gamma(p)}{r^{p-1}} \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} = 1. \tag{1.14}$$

Evidemment, si la fonction $f(t)$ est continue sur l'intervalle fermé $[a,t]$ alors

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{r=0}^{n}\alpha_{n,r} &= \lim_{n\to\infty}\sum_{r=0}^{n}\frac{t-a}{n}\left(r\frac{t-a}{n}\right)^{p-1} f\left(t-r\frac{t-a}{n}\right),\\ &= \lim_{h\to 0}\sum_{r=0}^{n} h(rh)^{p-1}f(t-rh),\\ &= \int_a^t (t-\tau)^{p-1}f(\tau)d\tau. \qquad (1.15)\end{aligned}$$

En tenant compte de (1.14) et (1.15) et en appliquant le théorème (1.1), on conclut que :

$$_a\mathcal{D}_t^{-p}f(t) = \lim_{h\to 0} h^p \sum_{r=0}^{n}\left[\begin{array}{c} p \\ r \end{array}\right] f(t-rh) = \frac{1}{\Gamma(p)}\int_a^t (t-\tau)^{p-1}f(\tau)d\tau. \qquad (1.16)$$

Si la fonction $f(t)$ est de classe $C^{m+1}([a,b])$, alors en intégrant par parties , on pourra écrire (1.16) sous la forme

$$_a\mathcal{D}_t^{-p}f(t) = \sum_{k=0}^{m}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{p+k}}{\Gamma(p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(p+m+1)}\int_a^t (t-\tau)^{p+m}f^{(m+1)}(\tau)d\tau. \qquad (1.17)$$

1.1.3 Dérivées d'ordre arbitraire

Commençons par considérer le cas $p > 0$. Notre but, comme ci-dessus est d'évaluer la limite

$$_a\mathcal{D}_t^{p}f(t) = \lim_{h\to 0} h^{-p}\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{p}{r}f(t-rh) = \lim_{h\to 0} f_h^{(p)}(t). \qquad (1.18)$$

Afin de calculer la limite (1.18), nous commençons par transformer tout d'abord l'expression de $f_h^{(p)}(t)$ comme suit :
En utilisant la propriété connue des coefficients de binôme

$$\binom{p}{r} = \binom{p-1}{r} + \binom{p-1}{r-1}, \qquad (1.19)$$

$$
\begin{aligned}
f_h^{(p)}(t) &= h^{-p}\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{p-1}{r}f(t-rh) + h^{-p}\sum_{r=1}^{n}(-1)^r\binom{p-1}{r-1}f(t-rh),\\
&= h^{-p}\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{p-1}{r}f(t-rh)+\\
&h^{-p}\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^{r+1}\binom{p-1}{r}f(t-(r+1)h),\\
&= (-1)^n\binom{p-1}{n}h^{-p}f(a) + h^{-p}\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r\binom{p-1}{r}\Delta f(t-rh), \qquad (1.20)
\end{aligned}
$$

où nous notons par

$$
\Delta f(t-rh) = f(t-rh) - f(t-(r+1)h).
$$

En appliquant la propriété (1.19) des coefficients de binôme répétée m-fois, en partant de (1.19) on obtient :

$$
\begin{aligned}
f_h^{(p)}(t) = \sum_{k=0}^{m}(-1)^{n-k}\binom{p-k-1}{n-k}h^{-p}\Delta^k f(a+kh)+\\
h^{-p}\sum_{r=0}^{n-m-1}(-1)^r\binom{p-m-1}{r}\Delta^{m+1}f(t-rh). \qquad (1.21)
\end{aligned}
$$

Calculons la limite du k-ième terme de la première somme de (1.21)

$$
\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}(-1)^{n-k}\binom{p-k-1}{n-k}h^{-p}\Delta^k f(a+kh)\\
&= \lim_{h\to 0}(-1)^{n-k}\binom{p-k-1}{n-k}(n-k)^{p-k}\\
&\times\left(\frac{n}{n-k}\right)^{p-k}(nh)^{-p+k}\frac{\Delta^k f(a+kh)}{h^k},\\
&= (t-a)^{-p+k}\lim_{n\to\infty}(-1)^{n-k}\binom{p-k-1}{n-k}(n-k)^{p-k}\\
&\times\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n-k}\right)^{p-k}\times\lim_{h\to 0}\frac{\Delta^k f(a+kh)}{h^k},\\
&= \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)}. \qquad (1.22)
\end{aligned}
$$

Car

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^{n-k}\binom{p-k-1}{n-k}(n-k)^{p-k} = \lim_{n\to\infty}\frac{(-p+k+1)\cdots(-p+n)}{(n-k)^{-p+k}(n-k)!},$$
$$= \frac{1}{\Gamma(-p+k+1)},$$
$$\text{et} \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n-k}\right)^{p-k} = 1, \quad \lim_{h\to 0}\frac{\Delta^k f(a+kh)}{h^k} = f^{(k)}(a).$$

Pour calculer la limite de la seconde somme dans (1.21), écrivons la sous la forme :

$$\frac{1}{\Gamma(-p+m+1)}\sum_{r=0}^{n-m-1}(-1)^r\Gamma(-p+m+1)\binom{p-m-1}{r}r^{-m+p}$$
$$\times h(rh)^{m-p}\frac{\Delta^{m+1}f(t-rh)}{h^{m+1}}.$$

Pour appliquer le théorème (1.1) on prend

$$\beta_r = (-1)^r\Gamma(-p+m+1)\binom{p-m-1}{r}r^{-m+p},$$
$$\alpha_{n,r} = h(rh)^{m-p}\frac{\Delta^{m+1}f(t-rh)}{h^{m+1}}; \quad h = \frac{t-a}{n}.$$

En s'aidant toujours de l'identité

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty}\frac{n!n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}.$$

On peut vérifier que

$$\lim_{r\to\infty}\beta_r = 1. \tag{1.23}$$

On résumé, si $m-p>-1$ alors

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=0}^{n-m-1}\alpha_{n,r} = \int_a^t (t-\tau)^{m-p}f^{(m+1)}(\tau)d\tau. \tag{1.24}$$

En tenant compte de (1.23) et (1.24) et en appliquant le théorème (1.1) on conclut que

$$\lim_{h\to 0}h^{-p}\sum_{r=0}^{n-m-1}(-1)^r\binom{p-m-1}{r}\Delta^{m+1}f(t-rh)$$
$$= \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)}\int_a^t (t-\tau)^{m-p}f^{(m+1)}(\tau)d\tau. \tag{1.25}$$

De (1.22) et (1.25), on obtient finalement la limite (1.18) :

$$\begin{aligned} {}_a\mathcal{D}_t^p f(t) &= \lim_{h\to 0} f_h^{(p)}(t), \\ &= \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} \\ &+ \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f^{(m+1)}(\tau)d\tau. \end{aligned} \tag{1.26}$$

La formule (1.26) est obtenue sous l'hypothèse que les dérivées $f^{(k)}(t)$, $(k = 1, \cdots, m+1)$ sont continues dans $[a, t]$ et que m est un entier vérifiant $m > p-1$. La petite valeur de m est déterminée par l'inégalité :

$$m < p < m+1.$$

1.1.4 La dérivée fractionnaire de $(t-a)^v$

Calculons la dérivée fractionnaire ${}_a\mathcal{D}_t^p f(t)$ au sens de Grünwald-Letnikov de la fonction polynôme $f(t) = (t-a)^v$ où $v \in \mathbb{R}$. On va commencer par considérer des valeurs négatives de p, ce qui veut dire qu'on utilisons la formule (1.16) :

$${}_a\mathcal{D}_t^p (t-a)^v = \frac{1}{\Gamma(-p)} \int_a^t (t-\tau)^{-p-1}(\tau-a)^v d\tau, \tag{1.27}$$

et supposons que $v > -1$ pour la convergence de l'intégrale. Et posons dans (1.27) $\tau = a + \xi(t-a)$ et en utilisant la définition de la fonction Bêta.

$$\beta(z,\omega) = \int_0^1 \tau^{z-1}(1-\tau)^{\omega-1} d\tau; \qquad (\Re(z) > 0, \Re(\omega) > 0),$$

on obtient :

$$\begin{aligned} {}_a\mathcal{D}_t^p (t-a)^v &= \frac{1}{\Gamma(-p)} (t-a)^{v-p} \int_0^1 \xi^v (1-\xi)^{-p-1} d\xi, \\ &= \frac{1}{\Gamma(-p)} \beta(v+1, -p)(t-a)^{v-p}, \\ &= \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(v-p+1)} (t-a)^{v-p}; \qquad (p < 0, v > -1). \end{aligned} \tag{1.28}$$

Considérons maintenant le cas $0 \leqslant m \leqslant p < m+1$. Pour appliquer la formule (1.26). Il faut imposer $v > m$ pour la convergence de l'intégrale, on a alors

$$ {}_a\mathcal{D}_t^p (t-a)^v = \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} \frac{d^{m+1}(\tau-a)^v}{d\tau^{m+1}} d\tau. $$

En tenant compte de

$$ \begin{aligned} \frac{d^{m+1}(\tau-a)^v}{d\tau^{m+1}} &= v(v-1)\cdots(v-m)(\tau-a)^{v-m-1}, \\ &= \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(v-m)}(\tau-a)^{v-m-1}. \end{aligned} $$

Posons $\tau = a + \xi(t-a)$ on aura :

$$ \begin{aligned} {}_a\mathcal{D}_t^p (t-a)^v &= \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(v-m)\Gamma(-p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p}(t-a)^{v-m-1} d\tau, \\ &= \frac{\Gamma(v+1)\beta(-p+m+1, v-m)}{\Gamma(v-m)\Gamma(-p+m+1)}(t-a)^{v-p}, \\ &= \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(v-p+1)}(t-a)^{v-p}. \end{aligned} \tag{1.29} $$

Notons que l'expression (1.29) est formellement identique à l'expression (1.28), on peut alors conclure que la dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov de la fonction polynôme $f(t) = (t-a)^v$ est donnée par la formule :

$$ {}_a\mathcal{D}_t^p (t-a)^v = \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(v-p+1)}(t-a)^{v-p}, $$

où $\quad (p < 0, v > -1)$ ou bien $(0 \leqslant m \leqslant p < m+1, v > m)$.

1.1.5 Composition avec les dérivées d'ordre entier

Notons que nous avons une seule restriction pour m dans la formule (1.26), à savoir la condition $m > p-1$, écrivons s à la place de m et réécrivons (1.26) comme :

$$ \begin{aligned} {}_a\mathcal{D}_t^p f(t) &= \sum_{k=0}^{s} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(-p+s+1)} \int_a^t (t-\tau)^{s-p} f^{(s+1)}(\tau) d\tau. \end{aligned} \tag{1.30} $$

Dans ce qui suit on suppose que $m < p < m+1$.

Calculons la dérivée d'ordre entier n de la dérivée d'ordre fractionnaire p de la forme (1.30), où on prend $s \geq m+n-1$. Le résultat est :

$$\begin{aligned}\frac{d^n}{dt^n}({}_a\mathcal{D}_t^p f(t)) = \sum_{k=0}^{s} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p-n+k}}{\Gamma(-p-n+k+1)} + \\ \frac{1}{\Gamma(-p-n+s+1)} \int_a^t (t-\tau)^{s-p-n} f^{(s+1)}(\tau) d\tau, \\ ={}_a \mathcal{D}_t^{p+n} f(t). \end{aligned} \tag{1.31}$$

Comme $s \geq m+n-1$ est arbitraire, prenons $s = m+n-1$ ceci donne :

$$\begin{aligned}\frac{d^n}{dt^n}({}_a\mathcal{D}_t^p f(t)) &= {}_a \mathcal{D}_t^{p+n} f(t), \\ &= \sum_{k=0}^{m+n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p-n+k}}{\Gamma(-p-n+k+1)} \\ &+ \frac{1}{\Gamma(m-p)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p-1} f^{(m+n)}(\tau) d\tau. \end{aligned} \tag{1.32}$$

Considérons maintenant l'opération inverse. En utilisant la formule (1.30), nous obtenons :

$$\begin{aligned}{}_a\mathcal{D}_t^p(\frac{d^n}{dt^n} f(t)) = \sum_{k=0}^{s} \frac{f^{(n+k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} + \\ \frac{1}{\Gamma(-p+s+1)} \int_a^t (t-\tau)^{s-p} f^{(n+s+1)}(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

En posant $s = m-1$, on obtient :

$$\begin{aligned}{}_a\mathcal{D}_t^p(\frac{d^n}{dt^n} f(t)) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(n+k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} + \\ \frac{1}{\Gamma(m-p)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p-1} f^{(m+n)}(\tau) d\tau, \end{aligned} \tag{1.33}$$

et en comparant (1.32) et (1.33), on conclut que

$$\frac{d^n}{dt^n}({}_a\mathcal{D}_t^p f(t)) ={}_a \mathcal{D}_t^p(\frac{d^n}{dt^n} f(t)) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p-n+k}}{\Gamma(-p-n+k+1)}. \tag{1.34}$$

La relation (1.34) veut dire que $\frac{d^n}{dt^n}$ et ${}_a\mathcal{D}_t^p$ commutent c'est-à-dire que

$$\frac{d^n}{dt^n}({}_a\mathcal{D}_t^p f(t)) ={}_a \mathcal{D}_t^p(\frac{d^n}{dt^n} f(t)) ={}_a \mathcal{D}_t^{p+n} f(t), \tag{1.35}$$

si et seulement si, en la borne inferieure $t = a$ de la différentiation fractionnaire, on a : $f^{(k)}(a) = 0, \quad (k = 0, \cdots, n-1)$.

1.1.6 Composition avec des dérivées fractionnaires

Considérons maintenant la dérivée fractionnaire d'ordre q d'une dérivée fractionnaire d'ordre p : ${}_a\mathcal{D}_t^q({}_a\mathcal{D}_t^p f(t))$.

Deux cas seront considérés séparément $p < 0$ et $p > 0$.

– Cas $p < 0$: Prenons d'abord $q < 0$, alors on a :

$$\begin{aligned}
{}_a\mathcal{D}_t^q({}_a\mathcal{D}_t^p f(t)) &= \frac{1}{\Gamma(-p)} \int_a^t (t-\tau)^{-q-1}({}_a\mathcal{D}_t^p f(\tau))d\tau, \\
&= \frac{1}{\Gamma(-q)\Gamma(-p)} \int_a^t (t-\tau)^{-q-1} d\tau \int_a^\tau (\tau-\xi)^{-p-1} f(\xi)d\xi, \\
&= \frac{1}{\Gamma(-q)\Gamma(-p)} \int_a^t f(\xi)d\xi \int_\xi^\tau (t-\tau)^{-q-1}(\tau-\xi)^{-p-1} d\tau, \\
&= \frac{1}{\Gamma(-p-q)} \int_a^t (t-\xi)^{-p-q-1} f(\xi)d\xi, \\
&={}_a \mathcal{D}_t^{p+q} f(t).
\end{aligned} \tag{1.36}$$

Supposons maintenant que $0 < q < n+1$, on remarque que $q = (n+1)+(q-n-1)$ où $q-n-1 < 0$ et en utilisant les formules (1.31) et (1.36) on obtient :

$$\begin{aligned}
{}_a\mathcal{D}_t^q({}_a\mathcal{D}_t^p f(t)) &= \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \left\{ {}_a\mathcal{D}_t^{q-n-1} \left({}_a\mathcal{D}_t^p f\,(t)\right) \right\}, \\
&= \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \left\{ {}_a\mathcal{D}_t^{p+q-n-1} f\,(t) \right\}, \\
&={}_a \mathcal{D}_t^{p+q} f\,(t)\,.
\end{aligned} \tag{1.37}$$

De (1.36) et (1.37) on conclut que si $p < 0$ alors pour tout réel q on a

$$_a\mathcal{D}_t^q({}_a\mathcal{D}_t^p f(t)) =_a \mathcal{D}_t^{p+q} f(t).$$

– Cas $p > 0$: Supposons que $0 \leq m < p < m+1$, alors d'après la formule (1.26)

Prenons $q < 0$, on voit que l'intégrale d'ordre $-q$ de $_a\mathcal{D}_t^p f(t)$ existe si et seulement si

$$f^{(k)}(a) = 0; \qquad (k = 1, 2, \cdots, m-1), \tag{1.38}$$

Donc sous les conditions (1.38), on arrive à

$$_a\mathcal{D}_t^q({}_a\mathcal{D}_t^p f(t)) =_a \mathcal{D}_t^{p+q} f(t). \tag{1.39}$$

Prenons maintenant $0 \leq n < q < n+1$ on suppose que $f(t)$ satisfait les conditions (1.38) et en tenant compte du fait que $q - n - 1 < 0$, la formule (1.39) peut ainsi être utilisée, on obtient :

$$\begin{aligned} _a\mathcal{D}_t^q({}_a\mathcal{D}_t^p f(t)) &= \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \left\{ {}_a\mathcal{D}_t^{q-n-1} \left({}_a\mathcal{D}_t^p f(t) \right) \right\}, \\ &= \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \left\{ {}_a\mathcal{D}_t^{p+q-n-1} f(t) \right\} =_a \mathcal{D}_t^{p+q} f(t). \end{aligned}$$

Ainsi on conclut que si $p < 0$, alors (1.39) a lieu pour tout réel arbitraire q, si $0 \leq m < p < m+1$, alors (1.39) a lieu aussi pour tout réel arbitraire q, si la fonction $f(t)$ satisfait les conditions (1.38).

1.2 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

La manipulation avec les dérivées fractionnaires au sens de Grünwald-Letnikov définie comme limite d'une différence d'ordre fractionnaire n'est pas commode.

Considérons l'expression (1.26) comme un cas particulier de l'expression

$$ {}_a\mathbf{D}_t^p f(t) = \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \left(\frac{d}{dt}\right)^{m+1} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f(\tau) d\tau; \qquad m \leq p < m+1. \tag{1.40} $$

L'expression (1.40) est la définition la plus connue de la dérivée fractionnaire, elle est souvent appelée la définition de Riemann-Liouville.

1.2.1 Intégrale d'ordre arbitraire

Supposons que la fonction $f(t)$ est continue sur tout intervalle fini $[a,t]$ on définit la formule de Cauchy comme suit :

$$ f^{(-n)}(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau. \tag{1.41} $$

Supposons maintenant que $n \geq 1$ est fixé et prenons un entier $k \geq 0$, évidemment on obtiendra :

$$ f^{(-k-n)}(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} D^{-k} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau, $$

où le symbole D^{-k} $(k \geq 0)$ désigne k-intégrations itérées.

D'autre part, pour un $n \geq 1$, et un entier $k \geq n$ la $(k-n)$-ième dérivée de la fonction $f(t)$ peut s'écrire comme :

$$ f^{(k-n)}(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} D^{k} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau, \tag{1.42} $$

où le symbole D^{k} $(k \geq 0)$ désigne k-différentiations itérées.

Pour étendre la notion n-uple intégration en valeur non entière n, on peut démarrer de la formule de Cauchy (1.41) et remplacer l'entier n par un réel $p > 0$:

$$ {}_a\mathbf{D}_t^{-p} f(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau. \tag{1.43} $$

On a, sous certaines hypothèses raisonnables

$$\lim_{p\to 0} {}_a\mathbf{D}_t^{-p} f(t) = f(t)\,,$$

et on peut alors poser ${}_a\mathbf{D}_t^{0} f(t) = f(t)$.

Si $f(t)$ est continue pour $t \geq a$, alors l'intégration d'ordre réel arbitraire définie par (1.43) possède la propriété importante suivante

$${}_a\mathbf{D}_t^{-p}\left({}_a\mathbf{D}_t^{-q} f(t)\right) = {}_a\mathbf{D}_t^{-p-q} f(t).$$

En effet, nous avons

$$\begin{aligned}
{}_a\mathbf{D}_t^{-p}\left({}_a\mathbf{D}_t^{-q} f(t)\right) &= \frac{1}{\Gamma(p)}\int_a^t (t-\tau)^{p-1}\ {}_a\mathbf{D}_t^{-q} f(\tau)d\tau,\\
&= \frac{1}{\Gamma(p)\Gamma(q)}\int_a^t (t-\tau)^{p-1}\,d\tau\int_a^\tau (\tau-\xi)^{q-1} f(\xi)\,d\xi,\\
&= \frac{1}{\Gamma(p)\Gamma(q)}\int_a^t f(\xi)\,d\xi\int_\xi^t (t-\tau)^{q-1}(\tau-\xi)^{p-1}\,d\tau,\\
&= \frac{1}{\Gamma(p+q)}\int_a^t (t-\xi)^{p+q-1} f(\xi)\,d\xi,\\
&= {}_a\mathbf{D}_t^{-p-q} f(t).
\end{aligned}$$

Evidemment, on peut inter changer p et q, nous avons alors

$${}_a\mathbf{D}_t^{-p}\left({}_a\mathbf{D}_t^{-q} f(t)\right) = {}_a\mathbf{D}_t^{-q}\left({}_a\mathbf{D}_t^{-p} f(t)\right) = {}_a\mathbf{D}_t^{-p-q} f(t). \tag{1.44}$$

1.2.2 Dérivée d'ordre arbitraire

La représentation (1.42) pour la dérivée d'ordre entier $k-n$ donne une opportunité pour étendre la notion de différentiation à un ordre non entier.

A savoir, on peut garder l'entier k et remplacer l'entier n par un réel α et alors $k-\alpha > 0$. Ceci donne :

$${}_a\mathbf{D}_t^{k-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{d^k}{dt^k}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)d\tau; \qquad (0<\alpha\leq 1)\,. \tag{1.45}$$

En notant par $p = k - \alpha$ on peut écrire (1.45) comme

$$ {}_a\mathbf{D}_t^p f(t) = \frac{1}{\Gamma(k-p)} \frac{d^k}{dt^k} \int_a^t (t-\tau)^{k-p-1} f(\tau) d\tau; \qquad (k-1 \leq p < k), \quad (1.46) $$

où bien

$$ {}_a\mathbf{D}_t^p f(t) = \frac{d^k}{dt^k} \left({}_a\mathbf{D}_t^{-(k-p)} f(t) \right); \qquad (k-1 \leq p < k). \qquad (1.47) $$

– Considérons maintenant quelques propriétés des dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville.

La première propriété est peut la plus importante de la dérivées au sens de Riemann-Liouville est que pour $p > 0$ et $t > a$:

$$ {}_a\mathbf{D}_t^p \left({}_a\mathbf{D}_t^{-p} f(t) \right) = f(t). \qquad (1.48) $$

Cette dernière propriété est un cas particulier de la propriété générale :

$$ {}_a\mathbf{D}_t^p \left({}_a\mathbf{D}_t^{-q} f(t) \right) = {}_a\mathbf{D}_t^{p-q} f(t), \qquad (1.49) $$

où f est continue et, si $p \geq q \geq 0$ la dérivée ${}_a\mathbf{D}_t^{p-q} f(t)$ existe on a deux cas :

Si $q \geq p \geq 0$ alors en utilisant les propriétés (1.44) et (1.48) on a :

$$ \begin{aligned} {}_a\mathbf{D}_t^p \left({}_a\mathbf{D}_t^{-q} f(t) \right) &= {}_a\mathbf{D}_t^p \left({}_a\mathbf{D}_t^{-p} \, {}_a\mathbf{D}_t^{-(q-p)} f(t) \right), \\ &= {}_a\mathbf{D}_t^{-(q-p)} f(t) = {}_a\mathbf{D}_t^{p-q} f(t). \end{aligned} $$

Si $p > q \geq 0$ notons par n et m deux entiers tels que : $0 \leq m - 1 \leq p < m$ et $0 \leq n - 1 \leq p - q < n$ alors, d'après la définition (1.47) et la propriété (1.44), on obtient :

$$
\begin{aligned}
{}_a\mathbf{D}_t^p\left({}_a\mathbf{D}_t^{-q}f(t)\right) &= \frac{d^m}{dt^m}\left\{{}_a\mathbf{D}_{ta}^{-(m-p)}(\mathbf{D}_t^{-q}f(t))\right\},\\
&= \frac{d^m}{dt^m}\left\{{}_a\mathbf{D}_t^{p-q-m}f(t)\right\},\\
&= \frac{d^n}{dt^n}\left\{{}_a\mathbf{D}_t^{p-q-n}f(t)\right\} = {}_a\mathbf{D}_t^{p-q}f(t).
\end{aligned}
$$

Comme la différentiation et l'intégration conventionnelle d'ordre entier, la différentiation et l'intégration fractionnaire ne commutent pas.

Si la dérivée fractionnaire ${}_a\mathbf{D}_t^p f(t)$, $(k-1 \leq p < k)$ d'une fonction $f(t)$ est intégrable, alors :

$$
{}_a\mathbf{D}_t^{-p}\left({}_a\mathbf{D}_t^p f(t)\right) = f(t) - \sum_{j=1}^{k}\left[{}_a\mathbf{D}_t^{p-j}f(t)\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{p-j}}{\Gamma(p-j+1)}. \tag{1.50}
$$

Cette propriété est un cas particulier de la propriété plus générale

$$
{}_a\mathbf{D}_t^{-p}\left({}_a\mathbf{D}_t^q f(t)\right) = {}_a\mathbf{D}_t^{q-p}f(t) - \sum_{j=1}^{k}\left[{}_a\mathbf{D}_t^{q-j}f(t)\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{p-j}}{\Gamma(p-j+1)}, \tag{1.51}
$$

où $(0 \leq k-1 \leq q < k)$.

1.2.3 Dérivée fractionnaire de $(t-a)^v$

Calculons la dérivée fractionnaire ${}_a\mathbf{D}_t^p f(t)$ de la fonction $f(t) = (t-a)^v$ où $v \in \mathbb{R}$. Supposons que $n-1 \leq p < n$ et rappelons que, d'après la définition de la dérivée au sens de Riemann-Liouville

$$
{}_a\mathbf{D}_t^p f(t) = \frac{d^n}{dt^n}\left\{{}_a\mathbf{D}_t^{-(n-p)}f(t)\right\}; \qquad (n-1 \leq p < n). \tag{1.52}
$$

En appliquant, dans la formule (1.52), l'intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha = n-p$ de cette fonction, que nous avons déjà évaluer (voir la formule (1.29)) :

$$
{}_a\mathbf{D}_t^{-\alpha}((t-a)^v) = \frac{\Gamma(1+v)}{\Gamma(1+v+\alpha)}(t-a)^{v+\alpha}; \qquad v > -1,
$$

nous obtenons :

$$ {}_a\mathbf{D}_t^p((t-a)^v) = \frac{\Gamma(1+v)}{\Gamma(1+v-p)}(t-a)^{v-p}. \tag{1.53}$$

Exemple 1.1. *Prenons la fonction* $f(t) = t^3$ *et calculons* ${}_0\mathbf{D}_t^p f(t)$*. La Figure (1.1) représente la dérivée fractionnaire de* f *pour quelques valeurs de* p*.*

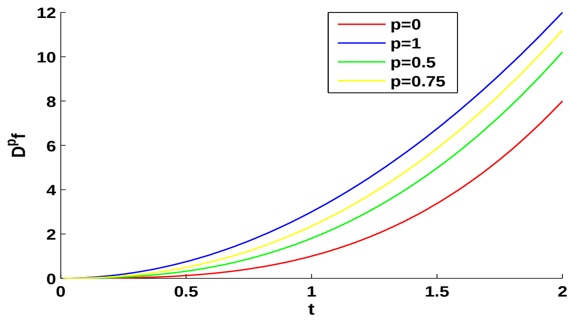

FIGURE 1.1: ${}_0\mathbf{D}_t^p t^3$ pour quelques valeurs de p.

1.2.4 Composition avec les dérivées d'ordre entier

La composition de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville avec des dérivées d'ordre entier apparaît dans plusieurs problèmes appliqués.

En utilisant la définition (1.45) nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dt^n}\left({}_a\mathbf{D}_t^{k-\alpha} f(t)\right) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{d^{n+k}}{dt^{n+k}}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)\, d\tau, \\ &= {}_a\mathbf{D}_t^{n+k-\alpha} f(t); \qquad (0 < \alpha \leq 1), \end{aligned} \tag{1.54}$$

et en notant par $p = k - \alpha$ nous aurons :

$$\frac{d^n}{dt^n}\left({}_a\mathbf{D}_t^p f(t)\right) = {}_a\mathbf{D}_t^{n+p} f(t). \tag{1.55}$$

Afin de considérer les opérations d'ordre inverse, on doit tenir compte du fait que

$$\begin{aligned}{}_a\mathbf{D}_t^{-n}f^{(n)}(t) &= \frac{1}{(n-1)!}\int_a^t (t-\tau)^{n-1}f^{(n)}(\tau)d\tau,\\ &= f(t)-\sum_{j=0}^{n-1}\frac{f^{(j)}(a)(t-a)^j}{\Gamma(j+1)},\end{aligned} \tag{1.56}$$

et que

$$ {}_a\mathbf{D}_t^{p}g(t) = {}_a\mathbf{D}_t^{n+p}({}_a\mathbf{D}_t^{-n}g(t)). \tag{1.57}$$

En utilisant (1.56) et (1.57) et (1.53), nous obtenons

$$\begin{aligned}{}_a\mathbf{D}_t^{p}\left(\frac{d^nf(t)}{dt^n}\right) &= {}_a\mathbf{D}_t^{n+p}({}_a\mathbf{D}_t^{-n}f^{(n)}(t)),\\ &= {}_a\mathbf{D}_t^{n+p}\left\{f(t)-\sum_{j=0}^{n-1}\frac{f^{(j)}(a)(t-a)^j}{\Gamma(j+1)}\right\},\\ &= {}_a\mathbf{D}_t^{n+p}f(t)-\sum_{j=0}^{n-1}\frac{f^{(j)}(a)(t-a)^{j-p-n}}{\Gamma(j+1-p-n)},\end{aligned}$$

qui est identique à la relation (1.34). De plus, comme dans de le cas des dérivées des Grünwald-Letnikov, on voit que

$$\frac{d^n}{dt^n}\left({}_a\mathbf{D}_t^{p}f(t)\right) = {}_a\mathbf{D}_t^{p}\left(\frac{d^nf(t)}{dt^n}\right) = {}_a\mathbf{D}_t^{n+p}f(t),$$

si et seulement si la borne inférieur de la différentiation fractionnaire de la fonction $f(t)$ satisfait les conditions : $f^{(k)}(a)=0, \qquad (k=0,1,\cdots,n-1)$.

1.2.5 Composition avec les dérivées fractionnaires

On s'intéresse maintenant à la composition de deux opérateurs de dérivation fractionnaire ${}_a\mathbf{D}_t^{p}\ \ (m-1\leq p<m)$ et ${}_a\mathbf{D}_t^{q}\ \ (n-1\leq q<n)$.

En utilisant par la suite la définition de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville, la formule (1.50) et la composition (1.55) avec la dérivée d'ordre entier on aura :

$$
\begin{aligned}
{}_a\mathbf{D}_t^p\left({}_a\mathbf{D}_t^q f(t)\right) &= \frac{d^m}{dt^m}\left\{{}_a\mathbf{D}_{ta}^{-(m-p)}(\mathbf{D}_t^q f(t))\right\},\\
&= \frac{d^m}{dt^m}\left\{ {}_a\mathbf{D}_t^{p+q-n} f\left(t\right) - \sum_{j=1}^{n}\left[{}_a\mathbf{D}_t^{q-j} f(t)\right]_{t=a} \frac{(t-a)^{m-p-j}}{\Gamma\left(1+m-p-j\right)}\right\},\\
&= {}_a\mathbf{D}_t^{p+q} f\left(t\right) - \sum_{j=1}^{n}\left[{}_a\mathbf{D}_t^{q-j} f(t)\right]_{t=a} \frac{(t-a)^{-p-j}}{\Gamma\left(1-p-j\right)}. \qquad (1.58)
\end{aligned}
$$

En inter changeant p et q (et donc m et n), on peut écrire :

$$
{}_a\mathbf{D}_t^q\left({}_a\mathbf{D}_t^p f(t)\right) = {}_a\mathbf{D}_t^{p+q} f\left(t\right) - \sum_{j=1}^{m}\left[{}_a\mathbf{D}_t^{p-j} f(t)\right]_{t=a} \frac{(t-a)^{-q-j}}{\Gamma\left(1-q-j\right)}, \qquad (1.59)
$$

La comparaison des relations (1.58) et (1.59) dit que dans le cas général les opérateurs ${}_a\mathbf{D}_t^p$ et ${}_a\mathbf{D}_t^q$ des dérivées fractionnaires, au sens de Riemann-Liouville ne commutent pas avec seulement une seule exception (en plus du cas trivial $p = q$) : à savoir, pour $p \neq q$ on a :

$$
{}_a\mathbf{D}_t^q\left({}_a\mathbf{D}_t^p f(t)\right) = {}_a\mathbf{D}_t^p\left({}_a\mathbf{D}_t^q f(t)\right) = {}_a\mathbf{D}_t^{p+q} f\left(t\right),
$$

si et seulement si les sommes dans deux membres de droite (1.58) et (1.59) sont nulles. Pour cette raison nous demandons la vérification simultanée des conditions :

$$
\left[{}_a\mathbf{D}_t^{p-j} f(t)\right]_{t=a} = 0; \qquad \left(j = 1, \cdots, m\right),
$$

et des conditions

$$
\left[{}_a\mathbf{D}_t^{q-j} f(t)\right]_{t=a} = 0; \qquad \left(j = 1, \cdots, n\right).
$$

1.3 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Parmi d'autres approches de généralisation de la notion de différentiation et d'intégration, on s'intéresse à l'approche proposée par Caputo à cause de son utilité pour la formulation et la résolution des problèmes appliqués.

La définition de Caputo peut être écrite comme :

$$ {}_a^C D_t^p f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)\, d\tau}{(t-\tau)^{p+1-n}}; \qquad (n-1 < p \leq n), \tag{1.60} $$

sous des conditions naturelles sur la fonction $f(t)$.

Pour $p \to n$, la dérivée de Caputo devient une dérivée n-ième conventionnelle de la fonction $f(t)$. En effet supposons que $0 \leq n-1 < p < n$ et que la fonction $f(t)$ admet $(n+1)$ dérivées bornées continues dans $[a, t]$ pour tout $t > a$. Alors

$$ \begin{aligned} \lim_{p \to n} {}_a^C D_t^p f(t) = & \lim_{p \to n} \frac{f^{(n)}(a)\,(t-a)^{n-p}}{\Gamma(n-p+1)} + \\ & \lim_{p \to n} \frac{1}{\Gamma(n-p+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p} f^{(n+1)}(\tau)\, d\tau, \\ & = f^{(n)}(a) + \int_a^t f^{(n+1)}(\tau)\, d\tau = f^{(n)}(t); \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots). \end{aligned} $$

L'avantage principal de l'approche de Caputo est que les conditions initiales des équations différentielles fractionnaires avec la dérivée de Caputo acceptent la même forme pour les équations différentielles d'ordre entier.

Une différence entre la définition de Riemann-Liouville et la définition de Caputo est que la dérivée de Caputo d'un constant est nul. Par contre dans le cas d'une valeur finie de la borne inférieure a, la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'une constante C n'est pas égale à 0, mais

$$ {}_a\mathbf{D}_t^p C = \frac{C\,(t-a)^{-p}}{\Gamma(1-p)}. \tag{1.61} $$

Il y a aussi une autre différence entre ces deux approches, qu'on voudrait mentionner et qui semble importante pour les applications. A savoir, pour la dérivée de Caputo on a

$$ {}_a^C D_t^p ({}_a^C D_t^m f(t)) = {}_a^C D_t^{p+m} f(t); \qquad (m = 0, 1, 2, \cdots; \quad n-1 < p < n), \tag{1.62} $$

quant à la dérivée de Riemann-Liouville :

$$ {}_a\mathbf{D}_t^m({}_a\mathbf{D}_t^p f(t)) = {}_a\mathbf{D}_t^{p+m} f(t); \qquad (m = 0, 1, 2, \cdots; \quad n-1 < p < n), \qquad (1.63) $$

L'inter changement des opérateurs de différentiation dans les formules (1.62) et (1.63) est permis sous différentes conditions :

$$ {}_a^C D_t^p({}_a^C D_t^m f(t)) = {}_a^C D_t^m({}_a^C D_t^p f(t)) = {}_a^C D_t^{p+m} f(t), $$

$$ f^{(s)}(a) = 0, \qquad s = n, n+1, \cdots, n+m; \qquad (m = 0, 1, 2, \cdots; \quad n-1 < p < n), $$

$$ {}_a\mathbf{D}_t^m({}_a\mathbf{D}_t^p f(t)) = {}_a\mathbf{D}_t^p({}_a\mathbf{D}_t^m f(t)) = {}_a\mathbf{D}_t^{p+m} f(t), $$

$$ f^{(s)}(a) = 0, \qquad s = 0, 1, \cdots, m-1, \qquad (m = 0, 1, 2, \cdots; \quad n-1 < p < n). $$

On voit que contrairement à l'approche de Riemann-Liouville, dans le cas de la dérivée de Caputo, il n'y a aucune restriction sur les valeurs $f^{(s)}(a) \quad (s = 0, 1, ..., n-1)$.

1.4 Dérivée fractionnaire séquentielle

L'idée principale de différentiation et d'intégration d'ordre arbitraire est la généralisation d'intégration et de différentiation itérées.

Dans toutes ces approches le but générale est le même : "remplacer" la valeur entière du paramètre n d'une opération notée, par exemple, par le symbole $\frac{d^n}{dt^n}$ par un paramètre non entier. Toutefois, il y a aussi une autre approche qui est moins bien connue, cette approche est basée sur l'observation que, en fait, une différentiation du n-ième ordre est tout simplement une série de différentiations de premier ordre

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} = \underbrace{\frac{d}{dt}\frac{d}{dt}\cdots\frac{d}{dt}}_{n} f(t), \tag{1.64}$$

S'il y a une méthode convenable pour "le remplacement" de la dérivée du premier ordre $\frac{d}{dt}$ par la dérivée D^αd'ordre non entier, où $0 \leq \alpha \leq 1$, alors il serait possible de considérer l'analogue de (1.64) suivant :

$$D^{n\alpha} f(t) = \underbrace{D^\alpha D^\alpha \cdots D^\alpha}_{n} f(t). \tag{1.65}$$

Miller et Ross [8] ont appelé la différentiation généralisée définie par (1.65), *différentiation séquentielle* ; où D^α désigne n'importe quel type de dérivée fractionnaire qu'on a proposé.

Au lieu de (1.65), il est possible de remplacer chaque dérivée de premier ordre dans (1.64) par des dérivées fractionnaires d'ordres qui ne sont pas nécessairement égaux, et de considérer l'expression la plus générale :

$$D^\alpha f(t) = D^{\alpha_1} D^{\alpha_2} \cdots D^{\alpha_n} f(t), \quad \alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n, \tag{1.66}$$

qu'on appellera aussi la *dérivée fractionnaire séquentielle.*

1.5 Quelques propriétés des dérivées fractionnaires

Dans cette section nous introduisons quelques propriétés d'intégration et de différentiation fractionnaire, qui sont souvent utilisées dans les applications.

1.5.1 Linéarité

Similairement à la différentiation d'ordre entier, la différentiation fractionnaire est une opération linéaire :

$$D^p(\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda D^p f(t) + \mu D^p g(t), \tag{1.67}$$

où D^p désigne n'importe quelle mutation de la différentiation fractionnaire. En effet pour les dérivées de Grünwald-Letnikov on a :

$$\begin{aligned}
{}_a\mathcal{D}_t^p(\lambda f(t)+\mu g(t)) &= \lim_{h\to 0} h^{-p}\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{p}{r}(\lambda f(t-rh)+\mu g(t-rh)),\\
&= \lambda \lim_{h\to 0} h^{-p}\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{p}{r} f(t-rh),\\
&+ \mu \lim_{h\to 0} h^{-p}\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{p}{r} g(t-rh),\\
&= \lambda {}_a\mathcal{D}_t^p f(t)+\mu {}_a\mathcal{D}_t^p g(t).
\end{aligned}$$

1.5.2 La règle de Leibniz pour les dérivées fractionnaires

Prenons deux fonctions $\varphi(t)$, $f(t)$ et partant de la règle bien connue de Leibniz pour calculer la dérivée n-ième du produit $\varphi(t)f(t)$:

$$\frac{d^n}{dt^n}\left(\varphi(t)f(t)\right)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\varphi^{(k)}(t)f^{(n-k)}(t). \tag{1.68}$$

Prenons maintenant le membre à droite de la formule (1.68) et remplaçons le paramètre entier n par le paramètre réel p. Ceci signifie que la dérivée d'ordre entier $f^{(n-k)}(t)$ sera remplacée par la dérivée fractionnaire de Grünwald-Letnikov d'ordre fractionnaire ${}_a\mathcal{D}_t^{p-k}f(t)$.

La règle de Leibniz pour la différentiation fractionnaire est la suivante. Si $f(t)$ est continue dans $[a,t]$ et $\varphi(t)$ admet $n+1$ dérivées continues dans $[a,t]$, alors la dérivée fractionnaire du produit $\varphi(t)f(t)$, est donnée par

$${}_a\mathcal{D}_t^p(\varphi(t)f(t))=\sum_{k=0}^{n}\binom{p}{k}\varphi^{(k)}(t){}_a\mathcal{D}_t^{p-k}f(t)-R_n^p(t),$$

où $n\geq p+1$ et

$$R_n^p(t)=\frac{1}{n!\Gamma(-p)}\int_a^t (t-\tau)^{-p-1}f(\tau)d\tau\int_\tau^t \varphi^{(n+1)}(\xi)\left(\tau-\xi\right)^n d\xi,$$

avec

$$\lim_{n\to\infty} R_n^p(t) = 0,$$

si $f(t)$ et $\varphi(t)$ avec toutes ses dérivées sont continues dans $[a,t]$. Sous cette condition, la règle de Leibniz pour la différentiation fractionnaire prend la forme :

$${}_a\mathcal{D}_t^p(\varphi(t)f(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{p}{k} \varphi^{(k)}(t) {}_a\mathcal{D}_t^{p-k} f(t).$$

1.6 Transformée de Laplace des dérivées fractionnaires

Rappelons quelques outils de base de la transformée de Laplace.

La fonction $F(s)$ de la variable complexe s définie par

$$F(s) = L\{f(t); s\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt, \tag{1.69}$$

est appelée *la transformée de Laplace* de la fonction $f(t)$, et pour l'existence de (1.69) $f(t)$ doit être d'ordre exponentiel α, ce qui veut dire qu'il existe deux constantes positives M et T telles que

$$e^{-\alpha t}|f(t)| \leq M, \qquad \text{pour tout} \quad t > T.$$

La transformée de Laplace de la convolution

$$f(t) \star g(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau, \tag{1.70}$$

de deux fonctions $f(t)$ et $g(t)$, qui sont égales à 0 pour $t < 0$, est égale au produit de leurs transformées de Laplace :

$$L\{f(t) \star g(t); s\} = F(s)G(s), \tag{1.71}$$

sous l'hypothèse que $F(s)$ et $G(s)$ existent. On a aussi comme propriété :

$$\begin{aligned} L\left\{f^{(n)}(t);s\right\} &= s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0), \\ &= s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0). \end{aligned} \tag{1.72}$$

Dans ce qui suit, on suppose que $a = 0$.

*** La transformée de Laplace des dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville :**

La transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire d'ordre $p > 0$ de Riemann-Liouville et de Grünwald-Letnikov peut s'écrire comme une convolution de deux fonctions $g(t) = \frac{t^{p-1}}{\Gamma(p)}$ et $f(t)$:

$${}_0\mathbf{D}_t^{-p} f(t) = {}_0\mathcal{D}_t^{-p} f(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau)\, d\tau = g(t) \star f(t),$$

et on a $G(s) = L\left\{t^{p-1}; s\right\} = \Gamma(p)\, s^{-p}$. Donc en utilisant (1.71) on a

$$L\left\{{}_0\mathbf{D}_t^{-p} f(t); s\right\} = L\left\{{}_0\mathcal{D}_t^{-p} f(t); s\right\} = s^{-p} F(s). \tag{1.73}$$

Pour la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville, qui peut s'écrire sous la forme

$${}_0\mathbf{D}_t^{p} f(t) = g^{(n)}(t),$$

$$g(t) = {}_0\mathbf{D}_t^{-(n-p)} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_0^t (t-\tau)^{n-p-1} f(\tau)\, d\tau; \qquad (n-1 \leq p < n).$$

On utilise (1.72) on obtient

$$L\left\{{}_0\mathbf{D}_t^{p} f(t); s\right\} = s^n G(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k g^{(n-k-1)}(0), \tag{1.74}$$

et on a la transformée de Laplace de $g(t)$ est : $G(s) = s^{-(n-p)}F(s)$

et

$$g^{(n-k-1)}(t) = \frac{d^{n-k-1}}{dt^{n-k-1}}\ {}_0\mathbf{D}_t^{-(n-p)}f(t) = {}_0\mathbf{D}_t^{p-k-1}f(t),$$

On arrive à l'expression finale de a transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville

$$L\left\{{}_0\mathbf{D}_t^p f(t); s\right\} = s^p F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \left[{}_0\mathbf{D}_t^{p-k-1}f(t)\right]_{t=0}; \qquad (n-1 \leq p < n).$$

*** La transformée de Laplace des dérivées fractionnaires de Caputo :**

Ecrivons la dérivée de caputo sous la forme

$${}_a^C D_t^p f(t) = {}_0\mathbf{D}_t^{-(n-p)}g(t), \qquad g(t) = f^{(n)}(t), \qquad (n-1 < p \leq n).$$

En utilisant la formule (1.73) on aura

$$L\left\{{}_a^C D_t^p f(t); s\right\} = s^{-(n-p)}G(s), \tag{1.75}$$

où grâce à (1.72)

$$\begin{aligned} G(s) &= s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0), \\ &= s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0). \end{aligned} \tag{1.76}$$

D'après (1.75) et (1.76) on obtient :

$$L\left\{{}_a^C D_t^p f(t); s\right\} = s^p F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{p-k-1} f^{(k)}(0); \qquad (n-1 < p \leq n).$$

*** La transformée de Laplace des dérivées fractionnaires de Grünwald-Letnikov :**

Considérons le cas $0 \leq p < 1$. on peut écrire la dérivée fractionnaire de Grünwald-Letnikov (1.26) avec $a = 0$ de la fonction $f(t)$ comme suit :

$$ {}_0\mathcal{D}_t^p f(t) = \frac{f(0)t^{-p}}{\Gamma(1-p)} + \frac{1}{\Gamma(1-p)} \int_0^t (t-\tau)^{-p} f'(\tau) d\tau, $$

En utilisant la transformée de Laplace de la fonction t^{p-1} et la transformée de Laplace de la convolution (1.71) et la relation (1.72) on obtient :

$$ L\left\{{}_0\mathcal{D}_t^p f(t); s\right\} = \frac{f(0)}{s^{1-p}} + \frac{1}{s^{1-p}}\left(sF(s) - f(0)\right) = s^p F(s). \tag{1.77} $$

La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Grünwald-Letnikov d'ordre $p > 1$ n'existe pas dans le sens classique, car dans un tel cas on a des fonctions non-intégrables dans la somme de la formule (1.26). Les transformées de Laplace de telles fonctions sont données par des intégrales divergentes. Cependant, la formule (1.77) pour $p > 1$ a lieu au sens des fonctions généralisées (distributions).

Chapitre 2

Equations différentielles d'ordre fractionnaire

Dans ce chapitre, nous discutons la question classique concernant les équations différentielles d'ordre fractionnaire [3], c'est-à-dire la question d'existence et unicité des solutions, puis on donne la solution analytique des équations différentielles linéaires d'ordre fractionnaire.

2.1 Existence et unicité

Soit α un réel positif vérifiant $m-1<\alpha\leq m$. ${}_0^C D^\alpha$ désigne l'opérateur de dérivation de Caputo.

Considérons le problème aux valeurs initiales :

$$\begin{cases} {}_0^C D^\alpha y(t) = f(t, y(t)), \\ {}_0^C D^k y(0) = y_0^{(k)}, \qquad k = 0, 1, \cdots, m-1. \end{cases} \tag{2.1}$$

Théorème 2.1. *Soient $K>0$, $h^*>0$ et $y_0^{(0)},\cdots,y_0^{(m-1)}\in\mathbb{R}$. Définissons*

$$G = \left\{(t,y)\in\mathbb{R}^2;\ t\in[0,h^*],\ \left|y-\sum_{k=0}^{m-1}\frac{t^k y_0^{(k)}}{k!}\right|\leq K\right\}$$

Si la fonction $f : G \to \mathbb{R}$ est continue, lipschitzienne par rapport à y c'est-à-dire :

$$\forall (t, y_1), (t, y_2) \in G : |f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L\,|y_1 - y_2|\,.$$

Alors, le problème aux valeurs initiales (2.1) admet une unique solution continue $y \in C\,[0, h]$, où $h = \min\left\{h^*, \left(\frac{\Gamma(\alpha+1)K}{M}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right\}$, avec

$$M = \sup_{(t,y)\in G} |f\,(t, y)|$$

Lemme 2.2. *Sous les mêmes hypothèses du théorème (2.1). La fonction $y \in C\,[0, h]$ est solution du problème (2.1) si et seulement si elle est solution de l'équation intégrale non linéaire de Volterra :*

$$y\,(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} y_0^{(k)} + \frac{1}{\Gamma\,(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f\,(\tau, y\,(\tau))\, d\tau. \tag{2.2}$$

Démonstration. Premièrement supposons que y est une solution de (2.2). On peut écrire (2.2) sous la forme

$$y\,(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} y_0^{(k)} + I_0^{\alpha} f\,(t, y\,(t))\,.$$

Si on applique l'opérateur ${}_0D^{\alpha}$ sur les deux membres de cette relation, on aura immédiatement que y est solution de (2.1).

Appliquons maintenant l'opérateur ${}_0D^{k}$, $0 \leq k \leq m-1$ sur l'équation de Volterra (2.2) :

$${}_0D^k y\,(t) = \sum_{j=0}^{m-1} D^k \frac{t^j}{j!} y_0^{(j)} + \ {}_0D^k I_0^k I^{\alpha-k} f\,(t, y\,(t))\,.$$

Pour $j > \alpha - k$ on a ${}_0D^k t^j = 0$ et pour $j < \alpha - k$ on a ${}_0D^k t^j = 0$ si $t = 0$. Alors

$${}_0D^k y\,(0) = {}_0D^k \frac{t^k}{k!} y_0^{(k)}\bigg|_{t=0} + I_0^{\alpha-k} f\,(t, y\,(t))\big|_{t=0}\,.$$

Puisque $\alpha - k \geq 1$, l'intégrale $I_0^{\alpha-k} f\,(t, y\,(t))\big|_{t=0}$ est nulle.

Par suite : ${}_0D^k y(0) = y_0^{(k)}$.

D'autre part ; définissons $z(t) = f(t, y(t))$ alors $z \in C[0,h]$, réécrivons l'équation sous la forme :

$$\begin{aligned} z(t) = f(t, y(t)) = {}_0D^\alpha y(t) &= {}_0D^\alpha (y - T_{m-1}[y,0])(t), \\ &= {}_0D^m I_0^{m-\alpha} (y - T_{m-1}[y,0])(t), \end{aligned}$$

$T_{m-1}[y,0]$ est le polynôme de Taylor de degré $m-1$ pour la fonction f autour de 0 ; $T_{m-1}[y,0](t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} y_0^{(k)}$

On applique l'opérateur I_0^m on obtient

$$I_0^m z(t) = I_0^{m-\alpha} (y - T_{m-1}[y,0])(t) + q(t),$$

avec q un polynôme d'un degré ne dépasse pas $m-1$.Comme z est continue la fonction $I_0^m z$ a un zéro d'ordre au moins m. De plus, la différence $y - T_{m-1}[y,0]$ a la même propriété par construction. Et alors la fonction $I_0^{m-\alpha}(y - T_{m-1}[y,0])$ doit avoir un zéro d'ordre m aussi. Par suite q a la même propriété, mais comme il est de degré ne dépassant pas $m-1$ il en résulte que $q = 0$.

Par conséquent : $I_0^m z(t) = I_0^{m-\alpha} (y - T_{m-1}[y,0])(t)$.

En appliquant l'opérateur de dérivation de Riemann-Liouville $D_0^{m-\alpha}$ sur les deux membres de cette équation, elle devient :

$$y(t) - T_{m-1}[y,0](t) = I_0^\alpha z(t).$$

Substituons $z(t)$ et $T_{m-1}[y,0](t)$, on retrouve l'équation de Volterra :

$$y(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} y_0^{(k)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, y(\tau))\, d\tau.$$

$\square$

Lemme 2.3. *Sous les mêmes hypothèses du théorème (2.1), l'équation de Volterra*

$$y(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} y_0^{(k)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, y(\tau))\, d\tau,$$

possède une unique solution $y \in C[0,h]$.

Pour prouver le théorème (2.1) ; d'abord il faut transformer le problème aux valeurs initiales (2.1) à une forme équivalente qui est l'équation intégrale de Volterra (lemme (2.1)), puis prouver l'existence et l'unicité de solution de cette équation (lemme (2.3)). Le théorème (2.1) est conséquence immédiate de ces deux lemmes.

2.2 Equations différentielles linéaires d'ordre fractionnaire

Les équations différentielles fractionnaires linéaires apparaissent dans les applications. Pour cette raison, on donne dans le théorème suivant une expression explicite de la solution en utilisant la transformée de Laplace et la fonction de Mittag-Leffler E_α définie par :

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(1+\alpha k)}.$$

Théorème 2.4. *Soit* $\alpha > 0$, m *un entier tel que* $m-1 < \alpha \leq m$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$. *La solution de problème aux valeurs initiales suivant*

$$\begin{cases} {}_0^C D_t^\alpha y(t) = \lambda y(t) + q(t), \\ y^{(k)}(0) = y_0^{(k)}; \qquad k = 0, 1, \cdots, m-1. \end{cases}$$

où $q \in C[0,h]$, *est la fonction donnée par :*

$$y(t) = \sum_{k=0}^{m-1} y_0^{(k)} u_k(t) + \widetilde{y}(t),$$

avec

$$\widetilde{y}(t) = \begin{cases} {}_0^C D_t^{-\alpha} q(t); & si\ \lambda = 0. \\ \frac{1}{\lambda} \int_0^t q(t-\tau)\, u_0'(\tau)\, d\tau; & si\ \lambda \neq 0. \end{cases}$$

et $u_k(t) = {}_0^C D_t^{-k} e_\alpha(t)$, $\quad k = 0, 1, \cdots, m-1$ *et* $e_\alpha(t) = E_\alpha(\lambda t^\alpha)$.

2.3 Systèmes linéaires d'ordre fractionnaire

En plus des équations différentielles fractionnaires, les systèmes fractionnaires ont lieu aussi dans plusieurs applications parce que des nombreux problèmes dans la physique, la chimie, et la géométrie sont modélisés mathématiquement par ces systèmes.

Dans cette section on introduit l'un des méthodes de résolution analytique des systèmes fractionnaires linéaires.

Considérons le système fractionnaire linéaire :

$$D^\alpha X(t) = AX(t), \qquad 0 < t \leq a, \tag{2.3}$$

où : $X \in \mathbb{R}^n$, $a > 0$, $A \in M_n(\mathbb{R})$ et D^α est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre α, avec $0 < \alpha \leq 1$.

Pour construire la solution générale du système (2.3) on fait la même procédée pour les systèmes linéaires d'ordre entier, homogène à coefficient constants où l'exponentiel $Exp(t)$ sera remplacé par la fonction de Mittag-Leffler $E_\alpha(t^\alpha)$. Ceci conduit à la solution de la forme :

$$X(t) = uE_\alpha(\lambda t^\alpha), \tag{2.4}$$

où le constant λ et le vecteur u sont à déterminer, le vecteur X donnée par (2.4) est une solution de (2.3) si λ est une valeur propre de la matrice A et u son vecteur propre associée. Donc la solution générale de (2.3) est donnée par :

$$X(t) = c_1 u^{(1)} E_\alpha(\lambda_1 t^\alpha) + c_2 u^{(2)} E_\alpha(\lambda_2 t^\alpha) + \cdots + c_n u^{(n)} E_\alpha(\lambda_n t^\alpha),$$

où $c_1, \cdots, c_n$ sont des constantes arbitraires, $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ et $u^{(1)}, \cdots, u^{(n)}$ sont les valeurs propres et les vecteurs propres correspondants pour l'équation caractéristique $(A - \lambda I)u = 0$. (C'est le cas où A est diagonalisable).

Si la matrice A admet une valeur propre λ de multiplicité k, alors on a deux possibilités : Soit il existe k vecteurs propres linéairement indépendants correspondant à la valeur propre λ, ou bien il existe moins de k vecteurs propres.

Dans le premier cas, soient $u^{(1)}, u^{(2)}, \cdots, u^{(k)}$ les k-vecteurs propres linéairement indépendants associés à λ de multiplicité k. Alors

$$X^{(1)}(t) = u^{(1)} E_{\alpha}(\lambda t^{\alpha}), \; X^{(2)}(t) = u^{(2)} E_{\alpha}(\lambda t^{\alpha}), \cdots, X^{(k)}(t) = u^{(k)} E_{\alpha}(\lambda t^{\alpha}),$$

sont des k-solutions linéairement indépendants de (2.3).

Cependant, s'il existe moins de k vecteurs propres linéairement indépendants correspondant à λ de multiplicité k, alors il existe moins de k solutions.

Supposons par exemple que λ est une valeur propre double de A, mais elle admet un seul vecteur propre $u^{(1)}$, alors une solution de (2.3) est :

$$X^{(1)}(t) = u^{(1)} E_{\alpha}(\lambda t^{\alpha}).$$

En utilisant les propriétés de la fonction de Mittag-leffler, on peut trouver une deuxième solution de (2.3) de la forme :

$$X^{(2)}(t) = u^{(1)} t^{\alpha} E_{\alpha}^{(1)}(\lambda t^{\alpha}) + u^{(2)} E_{\alpha}(\lambda t^{\alpha}),$$

où $E_{\alpha}^{(1)}(z) = \frac{d}{dz} E_{\alpha}(z)$, le vecteur constant $u^{(1)}$ satisfait l'équation (2.3) et le vecteur constant $u^{(2)}$ se détermine par :

$$(A - \lambda I) u^{(2)} = u^{(1)}.$$

Et on peut montrer facilement que $X^{(1)}(t)$ et $X^{(2)}(t)$ sont deux solutions linéairement indépendantes de (2.3).

Dans le cas général, si la matrice A admet une valeur propre λ de multiplicité k avec m vecteurs propres linéairement indépendants, où $m < k$, alors

$$\begin{cases} X^{(1)}(t) = u^{(1)} E_\alpha(\lambda t^\alpha), \\ X^{(2)}(t) = u^{(1)} t^\alpha E_\alpha^{(1)}(\lambda t^\alpha) + u^{(2)} E_\alpha(\lambda t^\alpha), \\ \vdots \\ X^{(k-m)}(t) = u^{(1)} t^{\alpha(k-m-1)} E_\alpha^{(k-m-1)}(\lambda t^\alpha) + u^{(2)} t^{\alpha(k-m-2)} E_\alpha^{(k-m-2)}(\lambda t^\alpha) \\ + \cdots + u^{(k-m)} E_\alpha(\lambda t^\alpha), \end{cases}$$

sont $k-m$ solutions linéairement indépendantes de (2.3).

Remarque 2.5. Le problème à valeur initiale consistant le système linéaire fractionnaire (2.3) et la condition initiale $X(0) = X_0$ admet une unique solution continue $X(t)$ dans $(0, a]$ qui satisfait la condition initiale.

Remarque 2.6. Soit $[X_1(t), X_2(t), \cdots, X_n(t)]^T$, la solution du problème à valeur initiale consistant le système linéaire fractionnaire (2.3) et la condition initiale $X(0) = X_0$. Alors le problème à valeur initiale pour le système fractionnaire non homogène :

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} X(t) = AX(t) + b(t), \quad 0 < t \leq a; \quad X(0) = X_0.$$

où $b(t) = [b_1(t), b_2(t), \cdots, b_n(t)]^T \in \mathbb{R}^n$, admet la solution

$[Y_1(t), Y_2(t), \cdots, Y_n(t)]^T$ telle que :

$$Y_i(t) = X_i(t) + \int_0^t X_i(\xi - t) b_i(\xi)\, d\xi; \qquad i = 1, \cdots, n.$$

Exemple 2.1. *Considérons le système :*

$$\begin{pmatrix} D^\alpha x \\ D^\alpha y \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}, \qquad \text{où } 0 < \alpha \leq 1.$$

Les valeurs propres de la matrice B sont : $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$ et leurs vecteurs propres associés sont : $u^{(1)} = [1, 1]^T$, $u^{(2)} = [1, 4]^T$ respectivement. Donc la solution générale de (2.5) est :

$$X(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} E_\alpha(t^\alpha) + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} E_\alpha(-2t^\alpha),$$

où c_1 et c_2 sont des constantes arbitraires. En particulier, le problème à valeur initiale :

$$\begin{pmatrix} D^{\alpha}x \\ D^{\alpha}y \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.2 \\ 4.2 \end{pmatrix},$$

admet l'unique solution

$$X(t) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} E_{\alpha}(t^{\alpha}) + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} E_{\alpha}(-2t^{\alpha}).$$

Chapitre 3

Quelques méthodes de résolution numérique

Dans plusieurs applications ; mécaniques des fluides, viscoélasticité, biologie et physique, il y a une intérêt considérable pour les équations différentielles d'ordre fractionnaire, ordinaires ou partielles. Mais malheureusement, il n'y a pas des méthodes générales pour trouver les solutions analytiques exactes, alors on doit utiliser l'approximation et les techniques numériques. Il existe deux types de méthodes pour résoudre les équations différentielles d'ordre fractionnaire : les méthodes fréquentes et les méthodes temporelles [7, 11], et dans notre étude nous intéressons au deuxième type.

L'objectif de ce chapitre est de décrire quelques méthodes permettant de résoudre numériquement les équations différentielles d'ordre fractionnaire de type Riemann-Liouville

$$\begin{gathered} D^{\alpha} y(t) = f(t, y(t)); \qquad D^{\alpha-k} y(0) = b_k, \\ k = 1, 2, \cdots, n-1, \qquad \lim_{z \to 0^+} J^{n-\alpha} y(z) = b_n. \end{gathered} \tag{3.1}$$

ou de type de Caputo

$$^{C}D^{\alpha} y(t) = f(t, y(t)); \qquad D^{k} y(0) = b_k; \qquad k = 1, 2, \cdots, n-1. \tag{3.2}$$

où $\alpha > 0$, $\alpha \notin \mathbb{N}$ et $n = \lceil \alpha \rceil$, $(n-1 < \alpha \leq n)$.

On cherche à déterminer une solution $y(t)$ de l'équation (3.1) ou (3.2) dans un intervalle fermé $[0, T]$ avec $T > 0$. Etant donné une subdivision $t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_N = T$ de $[0, T]$ où $N = T/h$, on note par y_m l'approximation de $y\left(t_m\right)$ et également $f_m = f\left(t_m, y_m\right)$, $m = 0, 1, \cdots, N$.

3.1 Méthode basée sur la définition de Grünwald-Letnikov

Avant de considérer le problème (3.1) ou (3.2), on commence par le problème

$$^{GL}D^{\alpha} y\left(t\right) = f\left(t, y\left(t\right)\right); \qquad y\left(0\right) = 0, \qquad 0 < \alpha < 1, \tag{3.3}$$

où $^{GL}D^{\alpha}$ désigne l'opérateur différentiel de Grünwald-Letnikov. Tant qu'on a un problème aux conditions initiales homogènes avec $0 < \alpha < 1$, alors (3.3) est équivalent aux problèmes (3.1) et (3.2).

Rappelons que la définition de la dérivée de Grünwald-Letnikov est :

$$^{GL}D^{\alpha} y\left(t\right) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ lh = t}} \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{k=0}^{l} (-1)^k \binom{\alpha}{k} y(t - kh), \qquad \alpha > 0.$$

Si on fixe h proche de 0, on a l'opérateur fini de Grünwald-Letnikov

$$^{GL}_{F}D^{\alpha} y\left(t_m\right) = \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{\alpha}{k} y(t_m - kh), \qquad \alpha > 0, \qquad m = 0, 1, \cdots, N.$$

En utilisant les points t_m, $m = 0, 1, \cdots, N$ on a alors le problème discrétisé :

$$\frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{\alpha}{k} y(t_m - kh) = f(t_m, y(t_m)),$$

si on pose : $\omega_k = (-1)^k \binom{\alpha}{k}$ on peut résoudre cet ensemble d'équations une par une à chaque point t_m par :

$$y_m = h^\alpha f(t_m, y_m) - \sum_{k=1}^{m} \omega_k y(t_m - kh), \qquad m = 1, \cdots, N. \tag{3.4}$$

Cette formule calcule la solution numérique de l'équation (3.3), malheureusement ; la solution y_m apparait dans les deux membres de l'équation (3.4), mais dans chaque pas, la m-ième équation contient y_m comme la seule valeur inconnue, car on a déjà calculé $y_1, y_2, \cdots, y_{m-1}$ dans les calculs précédents. Donc on peut résoudre la formule (3.4) pour tout $m = 0, 1, \cdots, N$ d'une manière pas par pas, et dans le cas général, les équations sont non linéaires, et pour les résoudre on doit utiliser des méthodes unidimensionnelles.

Pour le problème (3.3), l'opérateur fini de Grünwald-Letnikov donne une approximation de premier ordre de l'opérateur de Riemann-Liouville, et celle de Caputo par le choix du condition initiale homogène dans (3.3). Par suite la formule (3.4) nous donne une méthode numérique de premier ordre pour résoudre les équations de type (3.3) et de même les équations de type (3.1) et (3.2) avec $0 < \alpha < 1$ et la condition initiale homogène.

On va généraliser le problème (3.3) dans le cas où $0 < \alpha < 1$ et la condition initiale n'est pas nécessairement homogène.

Les coefficients ω_k peuvent être calculés d'une manière récursive (avec $\omega_0 = 1$) comme suit

$$\omega_k = (-1)^k \binom{\alpha}{k} = \left(1 - \frac{\alpha + 1}{k}\right) \omega_{k-1}; \qquad \text{pour } k \in \mathbb{N}.$$

La formule modifiée est donnée par

$$y_m = h^\alpha f(t_m, y_m) - \sum_{k=1}^{m} \omega_k y(t_m - kh) - \omega_m y_0, \qquad m = 1, \cdots, N, \tag{3.5}$$

où

$$\omega_m = \frac{m^{-\alpha}}{\Gamma(m - \alpha)} - \sum_{j=0}^{m} \omega_j.$$

On s'intéresse maintenant à la solution numérique du problème (3.2) (problème générale de Caputo). D'après [11] ; la relation entre l'opérateur de Grünwald-Letnikov et celle de Caputo est

$$\begin{aligned} {}^{C}D^{\alpha}y\left(t\right) &= {}^{GL}D^{\alpha}\left(y\left(t\right)-T_{n-1}\left[y;0\right]\left(t\right)\right), \\ &= {}^{GL}D^{\alpha}y\left(t\right)-D^{\alpha}T_{n-1}\left[y;0\right]\left(t\right). \end{aligned}$$

où $y\left(t\right)$ est supposée n-fois continument différentiable. Donc, on peut écrire la formule (3.5) pour $\alpha>0$ comme suit

$$y_m = h^{\alpha}f(t_m, y_m) - \sum_{k=1}^{m}\omega_k y(t_m-kh) - \omega_m y_0, \tag{3.6}$$

$$+h^{\alpha}D^{\alpha}T_{n-1}\left[y;0\right]\left(t_m\right), \qquad m=1,2,\cdots,N,$$

où

$$D^{\alpha}T_{n-1}\left[y;0\right]\left(t_m\right) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{b_k t_m^{k-\alpha}}{\Gamma\left(k-\alpha+1\right)}, \text{ d'après [11].}$$

dont l'erreur satisfait :

$$\max_{0\leq m\leq N}\left|y(t_m)-y_m\right| = O(h).$$

3.2 Méthode de Diethelm basée sur la quadrature

Dans cette section nous allons décrire une deuxième méthode pour la résolution numérique des équations différentielles fractionnaires.

Lemme 3.1. *soit* $\alpha>0,\ \alpha\notin\mathbb{N}$ *et* $n=\lceil\alpha\rceil$. *Supposons que* $f\in C^n\left[0,T\right]$ *alors*

$$D^{\alpha}f\left(t\right)=\frac{1}{\Gamma\left(-\alpha\right)}\int_0^t\left(t-\tau\right)^{-\alpha-1}f\left(\tau\right)d\tau. \tag{3.7}$$

Lemme 3.2. *sous les mêmes hypothèses du lemme (3.1) on a*

$$ {}^{C}D^{\alpha}f\left(t\right)=\frac{1}{\Gamma\left(-\alpha\right)}\int_0^t\left(t-\tau\right)^{-\alpha-1}\left(f\left(\tau\right)-T_{n-1}\left[f;0\right]\left(\tau\right)\right)d\tau. \tag{3.8}$$

Pour la preuve consulter [11].

Appliquons la transformation linéaire $\tau = tu$ dans (3.7) on trouve :

$$^{C}D^{\alpha} f(t) = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^1 u^{-\alpha-1} g(u) du; \qquad \textit{pour tout } t \in [0, T].$$

où $g(u) = f(t - tu)$.

On s'intéresse maintenant à l'approximation de l'intégral fini

$$\int_0^1 u^{-\alpha-1} g(u) du,$$

qui a une singularité locale à l'origine.

Pour l'approximation numérique de cet intégral, on a besoin d'utiliser la formule quadratique composée de degré $d \in \mathbb{N}_0$, c'est-à-dire on fait le procédé suivant : premièrment, on défini un réseau $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_j = 1$, puis, on construit une fonction $\widetilde{g}_d$ qui interpole la fonction g dans tout sous intervalle $[t_{v-1}, t_v]$ $(v = 1, 2, \cdots, j)$, la fonction $\widetilde{g}_d$ est définie pour être le polynôme de degré d qui interpole g dans les nœuds équidistants $t_{v-1} + \mu(t_v - t_{v-1})/d$, $\mu = 0, \cdots, d$. prises respectivement à la fonction $u^{-\alpha-1}$.

Alors, on obtient notre approximation désirée.

$$Q_j[g] = \int_0^1 u^{-\alpha-1} \widetilde{g}_d(u) du,$$

sous la condition $\alpha < n < d + 1$.

Pour notre étude, on s'intéresse au cas où $d = 1$ (interpolation linéaire par morceaux).

En combinant les résultats obtenus dans cette section, on trouve une approximation pour la dérivée fractionnaire de Caputo comme suit :

$$^{C}D^{\alpha} y(t) \approx \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(-\alpha)} Q_j[g],$$

où : $g(u) = y(t - tu) - T_{n-1}[y; 0](t - tu)$, avec $t > 0$.

Maintenant, on va appliquer les informations précédentes sur le problème de type Caputo (3.2), et discuter le cas $d = 1$ seulement, (quadrature basée sur l'interpolation linéaire par morceaux), α donc satisfait la condition $0 < \alpha < 2$ et on a les conditions initiales :

$$\begin{cases} y(0) = b_0; & \text{si } 0 < \alpha < 1, \\ y(0) = b_0,\ y'(0) = b_1; & \text{si } 1 < \alpha < 2. \end{cases}$$

Supposons que la fonction f dans (3.2) réalise les hypothèses du théorème (2.1) ; l'algorithme de cette méthode est donné comme suit :

Choisir un entier positif N et subdiviser l'intervalle de travaille en N parties de même longueur $h = \frac{T}{N}$, pour obtenir un réseau régulier de points $t_m = mh$, $m = 0, 1, \cdots, N$, en suite on écrit l'équation (3.2) pour $t = t_m$, en utilisant l'identité (3.8) on obtient :

$$\begin{aligned} f(t_m, y(t_m)) &= {}^{C}D^{\alpha} y(t_m) = D^{\alpha} y(t_m) - D^{\alpha} T_{n-1}[y;0](t_m), \\ &= \frac{t_m^{-\alpha}}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^1 u^{-\alpha-1} y(t_m - t_m u)\, du - D^{\alpha} T_{n-1}[y;0](t_m), \\ &= \frac{t_m^{-\alpha}}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^1 u^{-\alpha-1} y(t_m - t_m u)\, du - \frac{b_0 t_m^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} - \frac{b_1 t_m^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}. \end{aligned}$$

dans le cas où $0 < \alpha < 1$ on a $b_1 = 0$.

Dans cette relation, on remplace l'intégral par la formule quadratique Q_m, et introduit l'erreur quadratique R_m, en utilisant l'abréviation $g_m(u) = y(t_m - t_m u)$ on a

$$\frac{t_m^{-\alpha}}{\Gamma(-\alpha)} \left(\sum_{k=0}^{m} \omega_{km} g_m(k,m) + R_m[g_m] \right) - \frac{b_0 t_m^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} - \frac{b_1 t_m^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} = f(t_m, y(t_m)), \tag{3.9}$$

avec la notation $g_m(k,m) = y((m-k)h)$.

en ignorant l'erreur R_m, y_m $(m = 0, 1, \cdots, N)$ est alors la solution de

$$\frac{t_m^{-\alpha}}{\Gamma(-\alpha)}\sum_{k=0}^{m}\omega_{km}y_m(t_m-kh)-\frac{b_0t_m^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}-\frac{b_1t_m^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}=f(t_m,y_m). \tag{3.10}$$

Dans le cas des points équidistants $t_m = mh$, (3.10) devient

$$\sum_{k=0}^{m}\omega_{km}y_m(t_m-kh)=\Gamma(-\alpha)(mh)^{\alpha}f(t_m,y_m)+\frac{\Gamma(-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)}b_0+\frac{mh\Gamma(-\alpha)}{\Gamma(2-\alpha)}b_1,$$

et pour ω_{km} on peut écrire :

$$\omega_{km}=\frac{\widetilde{\omega}_{km}\Gamma(2-\alpha)}{-\alpha(1-\alpha)m^{-\alpha}}.$$

Finalement la solution pour y_m est :

$$y_m=h^{\alpha}f(t_m,y_m)-\sum_{k=0}^{m}\widetilde{\omega}_{km}y_m(t_m-kh)+h^{\alpha}D^{\alpha}T_{n-1}[y;0](t_m), \tag{3.11}$$

où

$$\frac{\widetilde{\omega}_{km}}{\Gamma(2-\alpha)}=\begin{cases}1; & \text{pour } k=0,\\ -\alpha; & \text{pour } k=m=1,\\ 2^{1-\alpha}-2; & \text{pour } k=1 \text{ et } m\geq 2,\\ (k-1)^{1-\alpha}+(k+1)^{1-\alpha}-2k^{1-\alpha}; & \text{pour } 2\leq k\leq m-1,\\ (k-1)^{1-\alpha}-(\alpha-1)k^{-\alpha}-k^{1-\alpha}; & \text{pour } k=m\geq 1.\end{cases}$$

La question importante qui reste pour la formule (3.11) est concernant le comportement de l'erreur de (3.11). La réponse de cette question est donnée dans [11] pour un type spécial de fonction f :

$$f(t,y)=-\mu y+q(t),$$

où $\mu > 0$ et q continue, avec $0 < \alpha < 1$.

Théorème 3.3. *Soit* $0 < \alpha < 1$ *ou* $1 < \alpha < 2$. *Supposons que* $f(t,y) = -\mu y + q(t)$, *avec* q *une fonction continue et* $\mu > 0$. *L'équation (3.11) admet une solution unique pour tout* h.

Théorème 3.4. *Soit* $0 < \alpha < 1$; *Supposons que* $f(t,y) = -\mu y + q(t)$ *avec* q *une fonction continue et* $\mu > 0$ *telles que la solution* $y \in C^2[0,T]$,*alors il existe une constante* λ *dépend que* α *et* y *(et donc de* μ *et* q*) telle que l'erreur de la méthode vérifie :*

$$|y(t_m) - y_m| \leq \lambda m^{\alpha} h^2, \qquad m = 0, 1, \cdots, N.$$

Corollaire 3.5. *Sous les mêmes hypothèses de théorème précédent, l'erreur global de la méthode d'approximation de Diethelm admet l'estimation suivante :*

$$\max_{m=0,\cdots,N} |y(t_m) - y_m| = O(h^{2-\alpha}).$$

3.3 Méthode de Prédiction-Correction

La méthode de Prédiction-Correction (La méthode d'Adams-Bashforth-Moulton) [1, 4, 11] est une méthode numérique pour résoudre les équations différentielles fractionnaires, basée sur l'équation intégrale de volterra (2.2). Elle est considérée la plus adaptée pour les équations non linéaires.

Le principe de cette méthode est de remplacer l'équation (2.1) par l'équation intégrale de volterra (2.2), puis utiliser la formule (produit de quadrature des trapèzes) pour remplacer l'intégral dans les nœuds t_j, $j = 0, 1, \cdots, n+1$ prises respectivement à la fonction $(t_{n+1} - .)^{\alpha-1}$, autrement dit, on applique l'approximation :

$$\int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1} - \tau)^{\alpha-1} g(\tau)\, d\tau \approx \int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1} - \tau)^{\alpha-1} \widetilde{g}_{n+1}(\tau)\, d\tau,$$

où $\widetilde{g}_{n+1}$ est l'interpolation linéaire de g. Le second membre peut s'écrire comme suit :

$$\int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1} - \tau)^{\alpha-1} \widetilde{g}_{n+1}(\tau)\, d\tau = \sum_{j=0}^{n+1} a_{j,n+1} g(t_j),$$

où

$$a_{j,n+1} = \int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1} - \tau)^{\alpha-1} \phi_{j,n+1}(\tau) d\tau,$$

et

$$\phi_{j,n+1}(\tau) = \begin{cases} (\tau - t_{j-1})/(t_j - t_{j-1}); & \text{si } t_{j-1} < \tau \leq t_j, \\ (t_{j+1} - \tau)/(t_{j+1} - t_j); & \text{si } t_j < \tau < t_{j+1}, \\ 0; & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans le cas des nœuds équidistants $t_j = jh$, avec un pas fixé h les dernières relations se réduisent à :

$$a_{j,n+1} = \begin{cases} \frac{h^\alpha}{\alpha(\alpha+1)}(n^{\alpha+1} - (n-\alpha)(n+1)^\alpha); & \text{si } j = 0, \\ \frac{h^\alpha}{\alpha(\alpha+1)}; & \text{si } j = n+1. \end{cases}$$

et pour $1 \leq j \leq n$

$$a_{j,n+1} = \frac{h^\alpha}{\alpha(\alpha+1)} \left[(n-j+2)^{\alpha+1} + (n-j)^{\alpha+1} - 2(n-j+1)^{\alpha+1} \right].$$

Donc, on obtient la formule de correction (corrector) :

$$y_{n+1} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t_{n+1}^k}{k!} y_0^{(k)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\sum_{j=0}^{n} a_{j,n+1} f(t_j, y_j) + a_{n+1,n+1} f(t_{n+1}, y_{n+1}^p) \right),$$

où y_{n+1}^p désigne la formule de prédiction (predictor).

Pour déterminer y_{n+1}^p, on fait la même procédure comme précédemment mais l'intégral sera approximé par la règle des rectangles :

$$\int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1} - \tau)^{\alpha-1} g(\tau) d\tau \approx \sum_{j=0}^{n} b_{j,n+1} g(t_j),$$

où

$$b_{j,n+1} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} (t_{n+1} - \tau)^{\alpha-1} \, d\tau = \frac{1}{\alpha} \left((t_{n+1} - t_j)^{\alpha} - (t_{n+1} - t_{j+1})^{\alpha} \right).$$

De même, pour le cas équidistant on a l'expression simple :

$$b_{j,n+1} = \frac{h^{\alpha}}{\alpha} \left((n+1-j)^{\alpha} - (n-j)^{\alpha} \right),$$

finalement, on obtient la formule de prédiction :

$$y_{n+1}^{p} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t_{n+1}^{k}}{k!} y_0^{(k)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^{n} b_{j,n+1} f(t_j, y_j),$$

L'algorithme est bien déterminé par ces formules, l'erreur est estimé par :

$$\max_{n=0,\cdots,N} |y(t_n) - y_n| = O(h^p), \qquad \text{où } p = \min\{2, 1+\alpha\}.$$

3.4 Méthode de Lubich

Les méthodes de Lubich forment une famille des méthodes linéaires multi pas d'ordre fractionnaire, qui sont premièrement présentées par Lubich et appliquées numériquement par Lubich, Hairer et Schlichte [11] pour un type spécial d'équations intégrales de Volterra.

Considérons le problème de type (3.2) ; comme on a vu précédemment il est possible de transformer l'équation dans (3.2) à une équation intégrale de Volterra :

$$y(t) = T_{n-1}[y;0](t_m) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, y(\tau)) \, d\tau.$$

Théorème 3.6. *Soient $\alpha > 0$ et $n = \lceil \alpha \rceil$. La méthode de Lubich d'ordre $p \in \{1, \cdots, 6\}$ pour une équation différentielle de type Caputo (3.2) écrite comme une équation intégrale de Volterra () est donnée par*

$$y_m = T_{n-1}[y;0](t_m) + h^{\alpha} \sum_{j=0}^{m} \omega_{m-j} f(t_j, y(t_j)) + h^{\alpha} \sum_{j=0}^{s} \omega_{m,j} f(t_j, y(t_j)), \quad (3.12)$$

pour $m = 1, 2, \cdots, N$*, où* ω_m *sont donnés par la fonction générée*

$$\omega^{\alpha}(\varsigma) = \left(\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k} (1-\varsigma)^k \right)^{-\alpha},$$

et $\omega_{m,j}$ *sont donnés par la solution de système d'équations linéaires*

$$\sum_{j=0}^{s} \omega_{m,j} j^{\gamma} = \frac{\Gamma(1+\gamma)}{\Gamma(1+\gamma+\alpha)} m^{\alpha+\gamma} - \sum_{j=1}^{m} \omega_{m-j} j^{\gamma}; \qquad \gamma \in \mathbf{A},$$

avec $\mathbf{A} = \{\gamma = k + j\alpha;\ k, j \in \mathbb{N}_0,\ \gamma \leq p-1\}$*;* $\qquad$ *Card* $\mathbf{A} = s+1$.

Théorème 3.7. *Soient* $\alpha > 0$ *et* $n = \lceil \alpha \rceil$*. La méthode de Lubich d'ordre* $p \in \{1, \cdots, 6\}$ *pour une équation différentielle de type Caputo (3.2) est donnée par*

$$y_m = h^{\alpha} f(t_m, y_m) - \sum_{j=0}^{m-1} \omega_{m-j} y(t_j) - \sum_{j=0}^{s} \omega_{m,j} y(t_j) + h^{\alpha} D^{\alpha} T_{n-1}[y; 0](t_m),$$

pour $m = 0, \cdots, N$*, où* ω_m *sont donnés par la fonction générée*

$$\omega^{\alpha}(\varsigma) = \left(\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k} (1-\varsigma)^k \right)^{\alpha},$$

et $\omega_{m,j}$ *sont donnés par la solution de système d'équations linéaires*

$$\sum_{j=0}^{s} \omega_{m,j} j^{\gamma} = \frac{\Gamma(1+\gamma)}{\Gamma(1+\gamma-\alpha)} m^{\gamma-\alpha} - \sum_{j=1}^{m} \omega_{m-j} j^{\gamma}; \qquad \gamma \in \mathbf{A}.$$

avec $\mathbf{A} = \{\gamma = k + j\alpha;\ k, j \in \mathbb{N}_0,\ \gamma \leq p-1\}$*;* $\qquad$ *Card* $\mathbf{A} = s+1$.

L'erreur de la formule (3.12) satisfait :

$$\max_{m=0,\cdots,N} |y(t_m) - y_m| = O(h^{p-\varepsilon}),$$

où ε est suffisamment petit.

3.5 Le principe de la mémoire courte pour une équation différentielle fractionnaire

Podlubny [10] a présenté ce qui est appelé "*le principe de la mémoire courte*" (appelé aussi *le principe de la mémoire courte*). L'idé de base est qu'au lieu d'utiliser l'intervalle $[0, t]$ tout entier pour la différentiation fractionnaire d'une fonction $f(t)$, il est mieux d'utiliser le "*mémoire courte*" $[t - L, t]$ de longueur L seulement.

La propriété du *"principe de la mémoire courte"* peut être observée directement de la définition finie du dérivée de Grünwald-Letnikov :

$$ {}_{F}^{GL}D^{\alpha} f(t) = \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(t - kh), \qquad m = t/h. $$

Podlubny a prouvé que l'utilisation du *"principe de la mémoire courte" de longueur* L à la définition finie de Grünwald-Letnikov introduit une erreur E qui satisfait :

$$ E = \left| {}_{F}^{GL}D^{\alpha} f(t) - {}_{t-L}^{GL}D^{\alpha} f(t) \right| < \frac{ML^{-\alpha}}{|\Gamma(1-\alpha)|}, \qquad L < t < T, $$

où $f(t) \leq M$ pour $0 < t < T$.

Cette inégalité peut être utilisée à la détermination de la longueur de *"la mémoire courte"* en fonction de la précision ϵ d'une méthode donnée, i.e.

$$ E \leq \epsilon \;\text{ si }\; L \geq \left(\frac{M}{\epsilon |\Gamma(1-\alpha)|} \right)^{1/\alpha}. $$

Avec cette nouvelle approximation (*principe de la mémoire courte),* le nombre de termes dans la définition finie de Grünwald-Letnikov ne dépasse pas $\lceil L/h \rceil$. En outre pour une méthode numérique donnée d'ordre $O(h^p)$ qui utilise la *"mémoire courte",* il faut bien choisir L (d'ordre $O\left(h^{-p/\alpha}\right)$.

Chapitre 4

Applications

Dans ce chapitre, nous allons appliquer les résultats théoriques obtenus dans le chapitre précédent sur un nombre de problèmes.

Exemple 4.1. *Considérons l'équation linéaire d'ordre fractionnaire*

$$^{C}D^{\alpha}y(t) = t^2 + \frac{2}{\Gamma(3-\alpha)}t^{2-\alpha} - y(t) \qquad 0 < \alpha \leq 1. \tag{4.1}$$

combinée avec la condition initiale $y(0) = 0$.

Cette équation admet comme solution exacte la fonction : $y(t) = t^2$

On calcule les solutions approchées de (4.1) par les méthodes numériques de Grünwald-Letnikov (GL), Lubich d'ordre $p = 2$ (Lp2) et Diethelm (D) pour $\alpha = 0.5$ et $\alpha = 0.1$ et des différents pas h. On introduit les erreurs commises par ces méthodes en $t = 1$ dans les tableaux suivants : (la notation $-5.53(-3)$ désigne -5.53×10^{-3}).

Erreurs en $t = 1$

h	GL	$Lp2$	D
1/10	$3.06\,(-2)$	$1.24\,(-3)$	$-7.72\,(-3)$
1/20	$1.46\,(-2)$	$3.08\,(-4)$	$-2.82\,(-3)$
1/40	$7.11\,(-3)$	$7.86\,(-5)$	$-1.02\,(-3)$
1/80	$3.51\,(-3)$	$2.01\,(-5)$	$-3.64\,(-4)$
1/160	$1.75\,(-3)$	$5.15\,(-6)$	$-1.30\,(-4)$
1/320	$8.71\,(-4)$	$1.31\,(-6)$	$-4.62\,(-5)$
1/640	$4.35\,(-4)$	$3.33\,(-7)$	$-1.64\,(-5)$
1/1280	$2.17\,(-4)$	$8.43\,(-8)$	$-5.82\,(-6)$
1/2560	$1.09\,(-4)$	$2.12\,(-8)$	$-2.06\,(-6)$

Tableau (4.1) : Résultats numériques de trois méthodes pour $\alpha = 0.5$

Erreurs en $t = 1$

h	GL	$Lp2$	D
1/10	$2.74\,(-3)$		$-5.53\,(-4)$
1/20	$2.35\,(-3)$	$-4.49\,(-3)$	$-1.63\,(-4)$
1/40	$1.27\,(-3)$	$-1.10\,(-3)$	$-4.73\,(-5)$
1/80	$6.41\,(-4)$	$-2.76\,(-4)$	$-1.36\,(-5)$
1/160	$3.20\,(-4)$	$-7.07\,(-5)$	$-3.86\,(-6)$
1/320	$1.60\,(-4)$	$-1.83\,(-5)$	$-1.09\,(-6)$
1/640	$8.00\,(-5)$	$-4.75\,(-6)$	$-3.07\,(-7)$
1/1280	$3.99\,(-5)$	$-1.24\,(-6)$	$-8.57\,(-8)$
1/2560	$2.00\,(-5)$	$-3.24\,(-7)$	$-2.39\,(-8)$

Tableau (4.2) : Résultats numériques de trois méthodes pour $\alpha = 0.1$

On peut voir ici que les résultats théoriques du chapitre 03 *sont satisfaits pour les deux choix de* α*, autrement dit on obtient* $O(h)$, $O(h^2)$ *et* $O(h^{2-\alpha})$ *comme les erreurs de méthodes de GL, Lp2 et D respectivement. La précision des solutions dépend de la valeur du pas h, parce que lorsqu'on diminue h la solution numérique sera très proche de la solution analytique.*

La plus part des méthodes exposées avaient peut être effectivement mises en œuvre au moyen de programmes écrits en plusieurs langages de programmation, cet effet nous permet de donner les solutions numériques de (4.1) graphiquement dans les figures suivantes :

*(**Le graphe rouge** : solution exacte, **graphe bleu** : solution numérique).*

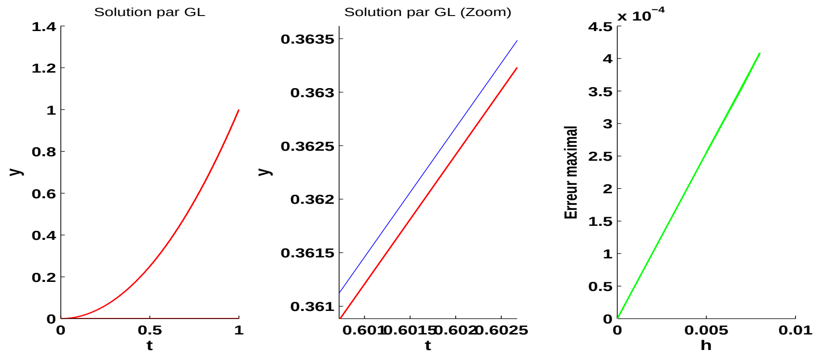

FIGURE 4.1: Solution de (4.1) par GL pour $\alpha = 0.1$ et $h = 0.008$

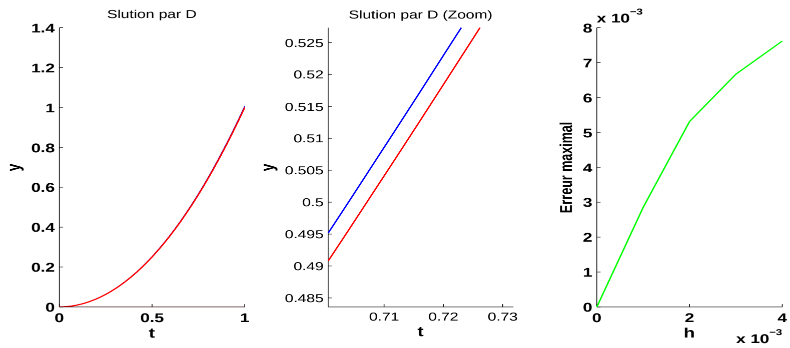

FIGURE 4.2: Solution de (4.1) par D pour $\alpha = 0.1$ et $h = 0.004$

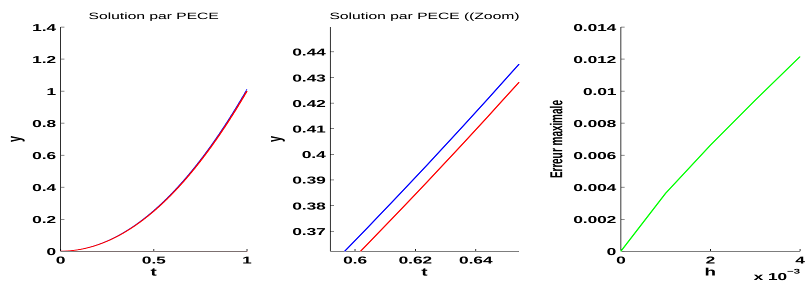

FIGURE 4.3: Solution de (4.1) par PECE pour $\alpha = 0.8$ et $h = 0.004$

On remarque que les figures précédents représentent presque les même résultats ; les solutions analytiques et numériques sont coïncides, mais si on met l'image en zoom on peut voir la différence entre eux.

On voit aussi que l'erreur est proportionnelle à h, si on augmente les valeurs de h, l'erreur augmente.

Exemple 4.2. ***Système financier***

Le modèle dynamique de finance [1] est un système composé de trois équations différentielles d'ordres fractionnaires, le modèle décrit la variation temporelle de trois variables qui sont :

x : la moyenne d'intérêt.

y : la demande d'investissement.

z : l'indice des prix.

le système est donné par

$$\begin{cases} D^{q1}x = z + (y-a)\,x \\ D^{q2}y = 1 - by - x^2 \\ D^{q3}z = -x - cz \end{cases} \tag{4.2}$$

D^{q_i} est l'opérateur de dérivation de Caputo, $0 < q_i \leq 1 \qquad i = 1, 2, 3.$

Le paramètre $a \geq 0$ est le montant d'épargne, $b \geq 0$ le coût d'investissement et $c \geq 0$ l'élasticité de demande des marchés commerciaux.

Pour résoudre le système (4.2), on applique la méthode numérique d'Adams-Bashforth-Moulton (PECE), nous fixons les paramètres $a = 3$, $b = 0.1$, $c = 1$ avec la condition initiale $(x_0, y_0, z_0) = (0.5, 5, 0)$.

le système (4.2) devient

$$\begin{cases} D^{q1}x = z + (y-a)\,x \\ D^{q2}y = 1 - 0.1y - x^2 \\ D^{q3}z = -x - z \end{cases}$$

On veut étudier trois cas :

** $\mathbf{q_1 = q_2 = q_3 = q}$

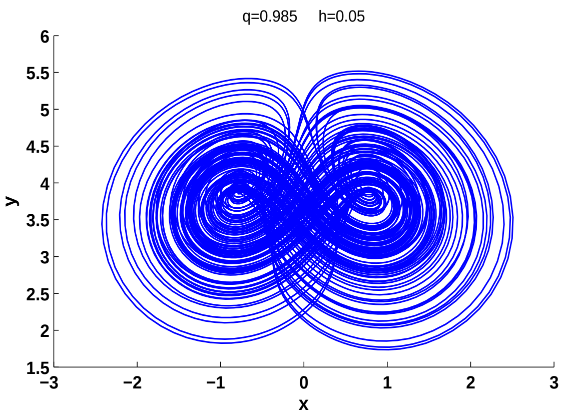

FIGURE 4.4: La dynamique de (4.2) pour $q = 0.985$

La Figure (4.4) représente la dynamique du système (4.2) pour $q = 0.985$ *et un pas* $h = 0.05$.

** $\mathbf{q_2 = q_3 = 1}$ *et* $\mathbf{q_1 = 0.69}$

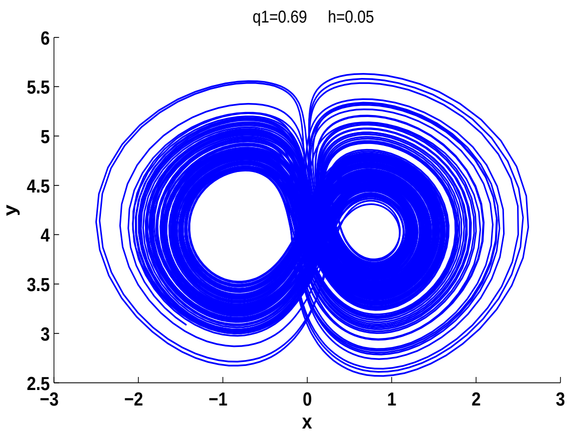

FIGURE 4.5: La dynamique de (4.2) pour $q_1 = 0.69$

** $\mathbf{q_1 = q_2 = 1}$ *et* $\mathbf{q_3 = 0.6}$

Les Figures (4.4),(4.5) et (4.6) tracées par la méthode (PECE) montre que la solution des équations différentielles d'ordre fractionnaire depend de cet ordre, pour notre système la variation de l'ordre de dérivation génère une variation à la solution (la solution est un attracteur chaotique [1]).

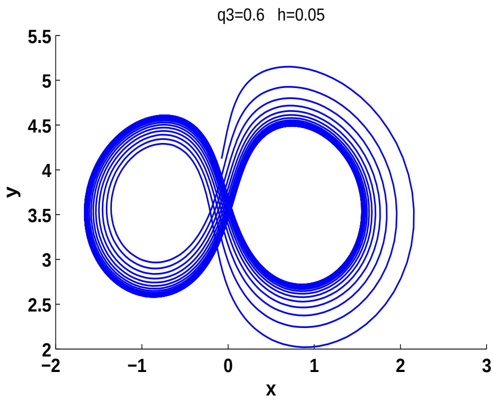

FIGURE 4.6: La dynamique de (4.2) pour $q_3 = 0.6$

Conclusion

Ce mémoire a pour but l'étude numérique des équations différentielles d'ordre fractionnaire. Dans les deux premiers chapitres nous avons rassemblé les outils nécessaires pour cette étude (la dérivation fractionnaire, équations différentielles fractionnaires).

Cette étude numérique a été présentée dans le troisième chapitre, dont le but est de trouver une solution approchée du problème aux valeurs initiales, pour cette raison, on a exposé un certain nombre de méthodes permettant de calculer cette solution. D'après les exemples qu'on a vu, nous avons remarqué que la précision de la solution numérique dépend de l'ordre de l'équation et de pas h aussi, le problème de la résolution numérique est que cette dernière est très coûteuse à cause de l'effet mémoire, par conséquent plusieurs travaux dans la future seront concentrés sur la recherche des algorithmes du résolution moins coûteux.

Annexe

Dans cette partie, nous introduisons des algorithmes en Matlab pour quelques méthodes numériques qu'on a proposé.

Résolution de (4.1)

Méthode GL

```
close all
clear all
clc
% on fixe l'intervalle du temps
t0=0 ;tf=1 ; % t0=temps initial, tf=temps final
h=0.01 ; % on fixe le pas h
T=t0 :h :tf ; p=0.1 ; % p est l'ordre de l'équation
y0=0 ; % la condition initiale
Z(1)=y0 ; % Z la solution approchée
y(1)=y0 ; % y la solution exacte
w(1)=1 ; N=length(T) ;
for m=2 :N
S=0 ;
for k=2 :m
```

```
w(k)=w(k-1)*(1-(p+1)/(k-1));
if k~=m
S=S+w(k)*Z(m-k+1);
else
S=S+w(k)*y0;
end
end
fm=(1/(1+h^p))*(T(m)^2+(2*T(m)^(2-p))/gamma(3-p));
Z(m)=(h^p)*fm-(1/(1+h^p))*S;
y(m)=((m-1)*h)^2;
end
%représentation graphique du solutions Z et y
figure(1)
plot(T,Z,'b'); grid on
hold on
plot(T,y,'r'); grid on
hold on
xlabel('t'); ylabel('y');
```

Méthode D

```
close all
clear all
clc
t0=0;tf=1;h=0.01;p=0.1;
```

```
T=t0 :h :tf ;y0=0 ;
N=length(T) ; Z(1)=y0 ;
w(1)=gamma(2-p) ; y(1)=y0 ;
for m=2 :N
s=0 ;
for k=2 :m
if (k==2)&&(m==2)
w(k)=-p*gamma(2-p) ;
else if (k==2)&&(m>=3)
w(k)=gamma(2-p)*(2^(1-p)-2) ;
else if (k>=3)&&(k<=m)
w(k)=gamma(2-p)*((k-2)^(1-p)+k^(1-p)-2*(k-1)^(1-p)) ;
else if (k==m)&&(m>=2)
w(k)=gamma(2-p)*((k-2)^(1-p)-(p-1)*(k-1)^(-p)-(k-1)^(1-p)) ;
end
end
end
end
s=s+w(k)*Z(m-k+1) ;
end
fm=(1/(1+h^p))*(T(m)^2+(2*T(m)^(2-p))/gamma(3-p)) ;
Z(m)=(h^p)*fm-(1/(1+h^p))*s ;
y(m)=((m-1)*h)^2 ;
end
figure(1)
```

plot(T,Z,'b') ; grid on

hold on

plot(T,y,'r') ; grid on

hold on

xlabel('t') ; ylabel('y') ;

Méthode PECE

clear all

close all

clc

t0=0 ;tf=1 ;p=0.7 ;h=0.001 ;y0=0 ;

% Appel de la fonction PECE

[T,Y,ex]=PECE([t0 tf],y0,h,p) ;

figure(1)

plot(T,Y,'b') ; grid on

hold on

plot(T,ex,'r') ; grid on

hold on

xlabel('t') ; ylabel('y') ;

La fonction de résolution

function [T,Z,ex]=PECE(tp,y0,h,p)

T=tp(1) :h :tp(end) ;

N=length(T)-1 ;

a=zeros(N) ;

```
b=zeros(N);
Zp=zeros(N+1); % le prédécteur
Z=zeros(N+1); % le correcteur
ex=zeros(N+1); % la solution exacte
for n=1 :N
S1=0;
for j=1 :n+1
b(j)=(h^p/p)*((n-j+2)^p-(n-j+1)^p);
S1=S1+b(j)*(T(j)^2+(2/gamma(3-p))*T(j)^(2-p)-Z(j));
end
Zp(n+1)=y0+(1/gamma(p))*S1;
S2=0;
for i=1 :n+1
if i==1
a(i)=(h^p/(p*(1+p)))*(n^(p+1)-(n-p)*(n+1)^p);
else
a(i)=(h^p/(p*(1+p)))*((n-i+3)^(p+1)+(n-i+1)^(p+1)-2*(n-i+2)^(p+1));
end
S2=S2+a(i)*(T(i)^2+(2/gamma(3-p))*T(i)^(2-p)-Z(i));
end
a(n+2)=(h^p/(p*(1+p)));
Z(n+1)=y0+(1/gamma(p))*(S2+ a(n+2)*(T(n+1)^2+
(2/gamma(3-p))*T(n+1)^(2-p)-Zp(n+1)));
ex(n+1)=T(n+1)^2;
end
```

Résolution de (4.2)

La résolution se faire à la méthode PECE.

```
clc

clear al

tf=1000;

h=0.05;

[T,Y] = ABMfde(@finance,[0.25,0.75,0.6]',[0,tf],[0.5 5 0]',h);

n=round(tf/h);

nm=200;

x=zeros(3,n-nm);

for i=nm+1 :n

x( :,i-nm)=Y( :,i);

end

figure(1)

plot(x(1, :),x(2, :))

xlabel('x') ;ylabel('y');

% La partie droite de système

function dy=finance(t,x)

dy=zeros(3,1);

a=3;

dy(1)=x(3)+(x(2)-a)*x(1);

dy(2)=1-0.1*x(2)-x(1)^2;

dy(3)=-x(1)-x(3);
```

La fonction de résolution

```
% fdefun : la fonction qui évalue la partie droite du système
```

```
% tspan : le vecteur qui spécifie l'intervalle d'intégration [t0, tf]

% Y0 : le vecteur des conditions initiales

function [T,Z] = ABMfde(fdefun,forder,tspan,Y0,stepsize)

if tspan(end) <= tspan(1)

erreur('Il faut avoir tspan(1) < tspan(end).')

end

if stepsize <= 0

error('Le pas doit être un scalaire positive')

end

q=forder ; % l'ordre de système

Dnode=length(q) ;

h=stepsize ;

Nnode=length(Y0)/Dnode ;

%–Conditions initiales

T = tspan(1) :h :tspan(end) ;

Nstep = length(T) - 1 ;

Z( :,1) = Y0( :) ;

pp=h.^q./gamma(q+2) ;

for n=1 :Nstep

%n

w1=zeros(Dnode,n) ;

w2=zeros(Dnode,n) ;

for i=1 :Dnode

w1(i,1)=(n-1).^(q(i)+1)-(n-1-q(i))*n.^q(i) ;

w2(i,1)=(h.^q(i))/q(i)*((n).^q(i)-(n-1).^q(i)) ;
```

```
for j=2 :n
w1(i,j)=(n-j+2).^(q(i)+1)+(n-j).^(q(i)+1)-2*(n-j+1).^(q(i)+1) ;
w2(i,j)=(h.^q(i))/q(i)*((n+1-j).^q(i)-(n-j).^q(i)) ;
end
end ;
Fn=zeros(Dnode*Nnode,n) ;
for k=1 :n
Fn( :,k)= feval(fdefun, T(k), Z( :,k)) ;
end
xp=Z( :,1)+1./repmat(gamma(q),Nnode,1).*sum(repmat(w2,Nnode,1).*Fn,2) ;
Fxp=feval(fdefun, T(n+1), xp) ;
Z( :,n+1)=Z( :,1)+repmat(pp,Nnode,1).*(Fxp+sum(repmat(w1,Nnode,1).*Fn,2)) ;
end
```

Bibliographie

[1] M. Abdelouahab. *Les systèmes chaotiques à dérivées fractionnaires.* Mémoire de magistère, université de Mentouri, Constantine, 2009.

[2] A. Debbouche. *On some fractional differential equations in Banach spaces and their applications.* Thèse de doctorat, université de Houari Boumedienne, Oran.

[3] K. Diethelm. *The analysis of fractional differential equations.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010.

[4] K. Diethelm and A. D. Freed. The fracPECE subroutine for the numerical solutions of the differential equations of fractional order. *in Forschungund wissenschaftliches Rechnen : BeitrÃďge zum Heinz-Billing-Preis 1998, S. Heinzel and T. Plesser, eds., Gesellschaft für wissenschaftliche Datenverarbeitung, Göttingen,* :57–71, 1999.

[5] K. Haouam. *Existence et non existence de solutions des équations différenti99elles fractionnaires.* Thèse de doctorat, université de Mentouri, Constantine, 2008.

[6] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, and J. J. Trujillo. *Theory and application of fractional differential equations.* Elsevier, North-Hollande, 2006.

[7] C. Li, A. Chen, and J. Ye. Numerical approches to fractional calculus and fractional ordinary differential equations. *J. Comp. Phys*, 230, no. 9 :3352–3368, 2011.

[8] K. S. Miller and B. Ross. *An introduction to the fractional calculus and differential equations.* A Wiley-Interscience publication, USA, 1993.

[9] K. B. Oldham and J. Spanier. *The fractional calculus : Theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order.* Academic press, USA, 1974.

[10] I. Podlubny. *Fractional differential equations.* Academic press, San Diego, 1999.

[11] M. Weilbeer. *Efficient numerical methods for fractional differential equations and their analytical background.* Papierflieger, Phd thesis, Technical University of Braunschweig, 2005.

Résumé

Les équations différentielles fractionnaires généralisentla notion des équations différentielles classiques à un ordre arbitraire (entier, réel, complexe,…).

Dans ce mémoire, nous avons présenté quelques méthodes de résolution numérique des équations différentielles d'ordre fractionnaire, et comme application on a étudié deux exemples, nous avons trouvé que la précision de la solution numérique dépend de l'ordre de l'équation et du pas, mais l'inconvénient des équations fractionnaires est que les algorithmes de résolution sont très coûteux en général (le temps d'exécution est très grand). Le principe de la mémoire courte a été présenté comme solution de ce problème.

Mots clés

Dérivées fractionnaires, Equations différentielles fractionnaires, Résolution numérique.

Abstract

The fractional differential equations are a generalization of the classical differential equations to an arbitrary order (integer, real, complex…).

In this brief, we presented some numerical methods to solve the fractional differential equations, to apply those methods we studied two examples, we found that the accuracy of the numerical solution is dependent to the order of equation and the step size, however the main disadvantage of fractional equations is that the resolution algorithms are very knives (execution time is very large). The short memory principle is a solution of this problem.

Keys words

Fractional derivatives, Fractional differential equations, Numerical resolution.

خلاصة

المعادلات التفاضلية الكسرية هي تعميم للمعادلاتالتفاضلية الكلاسيكية (صحيحة، حقيقية، مركبة،...).

في هذه المذكرة، قدمنا عددا من الطرق العددية لحل المعادلات التفاضلية ذات الرتبة الكسرية و لتطبيق ذلك تطرقنا إلى دراسة مثالين، وجدنا أن دقة الحل العددي تتعلق برتبة المعادلة إضافة إلى قيمة الخطوة، لكن أحد أكبر سلبيات المعادلات التفاضلية ذات الرتبة الكسرية هو أن خوارزميات الحل مكلفة جدا (زمن التنفيذ كبير جدا). يعتبر مبدأ الذاكرة القصيرة حلا لهذه المشكلة.

كلمات مفتاحية

مشتقات ذات رتب كسرية، المعادلات التفاضلية الكسرية، الحل العددي.