الجمهوريـة الجزائـريـة الديمقراطيـة الشعبيـة
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليـم العالـي والبحـث العلمـي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

N° Ref :……………

Centre Universitaire de Mila

Institut des sciences et de la technologie **Département de Mathématiques et Informatique**

La méthode de compacité appliquée à l'étude de quelques problèmes non linéaires

Mémoire préparé en vue de l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques

Préparé par : Lamri Zeggar Imen
Benselama Sarra

Filière : Mathématiques **Spécialité : Mathématiques Fondamentales et appliquées**

Soutenu le 16 Juin 2013 devant le jury :

N. Hamri	Pr	C. U. Mila	Président
M. S. Abdelouahab	M. A. A	C. U. Mila	Examinateur
T. Z. Boulmezaoud	M. C (HDR)	U. Versailles – France	Examinateur
B. Boudjedaa	M. C. B	U. Jijel	Encadreur

Année universitaire : 2012/2013

Notations :

- Ω : ouvert de $\mathbb{R}^n$.

- Γ : frontière de Ω.

- $Q = \Omega\times\,]0,T[\,, \quad t \in]0,T[\qquad (t = \text{temps})\,.$

- V : l'espace de Banach séparable réflexif.

- H : l'espace de Hilbert.

- $D(\Omega)$: l'espace des fonctions indéfiniment différentiables et à support compact dans Ω.

- $D'(\Omega)$: dual de $D(\Omega)$ l'espace des distributions sur Ω.

- $L^p(\Omega)$: l'espace des fonctions de puissance $p-i\grave{e}me$ intégrable sur Ω ; $\quad \|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \,dx\right)^{\frac{1}{p}}$.

- $D^\alpha = \dfrac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}}{\partial x^{\alpha_1}\cdots\partial x^{\alpha_n}}, \alpha = \{\alpha_1+\cdots+\alpha_n\}\,, |\alpha| = \alpha_1+\cdots+\alpha_n.$

- $W^{m,p}(\Omega) = \{v \mid D^\alpha v \in L^p(\Omega) \quad |\alpha| \leq m\}$

- $W_0^{m,p}(\Omega)$: adhérence de $D(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$.

- $W^{-m,p'}(\Omega)$: dual de $W_0^{m,p}(\Omega)$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1.$

- $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$.

- $H_0^m(\Omega) = W_0^{m,2}(\Omega)$.

- $H^{-m}(\Omega) = (H_0^m(\Omega))' = W^{-m,2}(\Omega)$.

- si X est un espace de Banach .

$$L^p(0,T;X) = \left\{ \begin{array}{c} f \ |f \text{ mesurable de } [0,T] \longrightarrow X, \\ \left(\int_0^T \|f(t)\|_X^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \quad \text{si } 1 \leq p \leq \infty, \\ \sup \ ess \ \|f(t)\|_X < \infty \quad \text{si } p = \infty \end{array} \right\}$$

- $D(]0,T[;X)$: fonctions C de $]0,T[\longrightarrow X$ et à support compact dans $]0,T[$.

- $D'(]0,T[;X) = \mathcal{L}(D(]0,T[;X))$: espace des distributions sur $]0,T[$ à valeurs dans X.

Résumé :

Dans ce travail on s’intéresse à l'étude du problème aux limites non linéaire suivant :

Trouver une fonction à valeurs réelles

$$u = u(x,t)\,,\ x \in \Omega, t \in \left]0,T\right[$$

Solution de :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + |u|^\rho u = f,\ \ x \in \Omega,\ \ t \in \left]0,T\right[.$$

Telle que :

$$u = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma$$

$$\begin{cases} u(x,0) = u_0(x)\ , x \in \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x)\ , x \in \Omega \end{cases}$$

Le premier chapitre est consacré aux préliminaires dans lequel on donne et on rappelle des définitions et quelques propriétés sur les espaces de **Sobolev** ainsi que d’autres résultats et théorèmes importants qui seront utilisés le long de ce travail.

Dans le second chapitre, on utilise la méthode de compacité pour montrer des résultats d'existence et d’unicité de la solution pour le problème donné ci-dessus.

Cette méthode est utilisée de façon aussi directe que possible : On approche les équations données par des équations "plus simple" par « réduction à la dimension finie » par exemple par la méthode de Faedo-Galerkin ; on peut alors obtenir l’existence des solutions approchées et lorsque on passe à la limite sur la dimension on obtient la solution du problème considéré par utilisation des résultats de compacité de l’injection d’un espace de **Sobolev** d’ordre m dans un espace de **Sobolev** d’ordre < m.

A la fin de ce chapitre on propose un autre exemple sur une équation hyperbolique non linéaire plus générale que l’équation précédente et avec la même technique et les mêmes étapes que le problème précédent on arrive à démontrer l’existence et l’unicité de la solution de ce problème.

Abstract :

In this work we are interested to study the following nonlinear boundary value problem:

Find a real-valued function

$$u = u(x,t),\ x \in \Omega, t \in \left]0,T\right[$$

Solution of :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + |\, u \,|^{\rho}\, u = f,\quad x \in \Omega,\quad t \in \left]0,T\right[.$$

Such as :

$$u = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma$$

$$\begin{cases} u(x,0) = u_0(x)\ , x \in \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x)\ , x \in \Omega \end{cases}$$

The first chapter is devoted to preliminaries in which we give the definitions, some properties of Sobolev spaces and are reminded other important results and theorems which will be used along this work.

In the second chapter, the method of compactness is used to give the results of existence and uniqueness of the solution to the problem given above.

This method is used as directly as possible: the given equations are approximated by "simpler" equations by "reduction to the finite dimension," for example by the method of Faedo-Galerkin, we can then obtain the existence of the approximated solutions and when we pass to the limit on the dimension we get the solution of the problem considered by using the results of compactness of the injection of a Sobolev space of order m in a Sobolev space of order <m.

At the end of this chapter we propose another example of a nonlinear hyperbolic equation more general than the previous equation and using the same technique and the same steps as the previous problem we can demonstrate the existence and uniqueness of the solution of this problem.

ملخص:

الهدف من هذا العمل هو دراسة المشكلة الحدية غير الخطية التالية:

إيجاد الدالة ذات القيم الحقيقية

$$u = u\left(x,t\right),\ x \in \Omega, t \in \left]0,T\right[$$

حل للمعادلة :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + \left| u \right|^{\rho} u = f,\ \ x \in \Omega,\ \ t \in \left]0,T\right[.$$

بحيث:

$$u = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma$$

$$\begin{cases} u\left(x,0\right) = u_0\left(x\right), x \in \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\left(x,0\right) = u_1\left(x\right), x \in \Omega \end{cases}$$

الفصل الأول يخصص لفضاء **Sobolev** و للنظريات الهامة التي سوف نستعملها في هذا العمل .

في الفصل الثاني ندرس وجود حل للمشكلة أعلاه باستخدام طريقة التراص بإتباع الخطوات التالية :

نقرب المعادلات المعطاة بمعادلات "أبسط" بواسطة طريقة **Faedo-Galerkin**

,وبعد إيجاد حلول للمعادلات التقريبية التي حصلنا عليها نمر لحساب النهاية بواسطة أسلوب التراص فنجد الحل وبعدها نمر إلى دراسة وحدانيته.
في نهاية الفصل نقترح مثال آخر ينطوي على معادلة غير الخطية أكثر عموما من المعادلة السابقة و بنفس الخطوات في المشكلة السابقة ندرس وجود و وحدانية الحل للمشكلة بالنسبة لهذه المعادلة.

Table des matières

Introduction

Dans l'étude des problèmes aux limites, pour les équations aux dérivées partielles non linéaires, qui sont les équations de base de la physique mathématiques, la mécanique ou autres domaines, on utilise quelques méthodes de résolution, parmi lesquelles on a : la méthode de compacité, la méthode de monotonie, la méthode de régularisation, la méthode de pénalisation, les méthodes itératives d'approximation.

Les étapes de base dans la résolution de ces problèmes sont :

1. L'obtention d'estimations a priori.

2. L'utilisation de ces estimations.

Une fois choisi le cadre fonctionnel, on utilisera les estimations a priori, dans la résolution du problème considéré, par l'application de l'une des méthodes sus-citée.

Ce travail est consacré à l'étude de la méthode de compacité, qui est utilisée de façon aussi directe que possible :

1. On construit des "solutions approchées" par "réduction à la dimension finie" par exemple par la méthode de GALERKIN (cas stationnaire) ou de FAEDO-GALERKIN (cas d'évolution), on obtient alors l'existence des "solutions approchées" par utilisation :

– Dans le cas stationnaire, d'un théorème de point fixe.

– Dans le cas d'évolution, d'un théorème d'existence de solution d'un système d'équations différentielles ordinaires.

2. On passe ensuite à la limite sur la dimension, on aura ici à surmonter une difficulté essentielle : les opérateurs non linéaires rencontrés ne sont pas en général "faiblement

continus" et il faut donc démontrer que la famille des solutions approchées (grâce aux estimations a priori) "compacte" dans une topologie "forte" convenable (pour laquelle l'opérateur est continu). Les outils sont donc ici les théorèmes de compacité de l'injection d'un espace de Sobolev d'ordre m dans un espace de Sobolev d'ordre $< m$.

3. Finalement en passe à l'unicité et la régularité de la solution.

Ce travail est composé de deux chapitres :

- Dans le premier chapitre nous donnons quelques rappels sur les espaces de Sobolev ainsi que quelques théorèmes et résultats importants qu'on utilisera le long de ce travail.

- Dans le second chapitre nous exposons en détail la méthode de compacité appliquée à des problèmes aux limites non linéaire.

Ce travail fait partie des problèmes traités par la méthode de compacité dans la référence [7].

Chapitre 1

Préliminaires

On utilisera les espaces usuels $\mathbf{L}^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$; les fonctions considérées seront à valeurs réelles, on désigne par (f, g) le produit scalaire dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$, i.e :

$$(f, g) = \int_\Omega f(x)\, g(x)\, dx,$$

et également le produit scalaire entre $f \in \mathbf{D}'(\Omega)$ (espace des distributions sur Ω) et $g \in \mathbf{D}(\Omega)$ (espace des fonctions $\mathbf{C}^\infty$ sur Ω et à support compact dans Ω). Lorsqu'aucune ambiguïté n'est à craindre, on posera :

$$\mid f \mid = (f, f)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_\Omega f(x)^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

et on utilisera la notation $\|f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$en cas d'ambiguïté possible (ainsi que de façon générale $\|f\|_X$ pour désigner la norme de f dans un espace de Banach X).

Théorème 1.0.1 ***(Inégalité de Holder)***

Soient $u \in \mathbf{L}^p$ et $v \in \mathbf{L}^{p'}$ avec $1 \leq p \leq \infty$. Alors $(u, v) \in \mathbf{L}^p \times \mathbf{L}^{p'}$ et :

$$\int_\Omega \mid uv \mid \leq \|u\|_{L^p} \|v\|_{\mathbf{L}^{p'}}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Preuve. voir [2]. ■

1.1 Théorème de Dunford-Pettis

Théorème 1.1.1 ***(Dunford-Pettis)***

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonction de* $\mathbf{L}^1(]a,b[)$ *s'il existe une fonction* $v \in \mathbf{L}^1([a,b])$ *telle que* $\mid u_n(t) \mid \leq \mid v(t) \mid$ *p.p,* $t \in [a,b]$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, alors* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *posséde une sous-suite convergeant faiblement dans* $\mathbf{L}^1([a,b])$*.*

Preuve. voir[2] . ■

Lemme 1.1.2

Soit Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_t$, g_μ *et* g *des fonctions de*
$\mathbf{L}^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, *telles que :*

$$\|g_\mu\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)} \leq C \qquad , \qquad g_\mu \longrightarrow g \quad p.p \qquad dans\ \Omega \quad ,$$

alors $g_\mu \longrightarrow g$ *dans* $\mathbf{L}^p$ *faible.*

Preuve. voir [1] , [2] . ■

1.2 Le théorème de Lebesgue (de la convergence dominée de Lebesgue)

Théorème 1.2.1

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions mesurables sur un espace mesuré* (E, A, μ)*, à valeurs réelles ou complexes, telle que :*
la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement sur* E *vers une fonction* f *;*
et il existe une fonction intégrable g *telle que :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in E,\ \ |(f_n)| \leq g(x)\,.$$

Alors f est intégrable et

$$\lim_{n\to\infty}\int_E |f_n - f|\, d\mu = 0,$$

ce qui entraîne :

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n d\mu = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n d\mu = \int_E f d\mu.$$

Preuve. Voir [1] , [2] . ■

1.3 Convolution

Théorème 1.3.1

Soit $f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$ et $g \in \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$.
La fonction $y \longrightarrow f(x-y)\, g(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^n$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$.
Si on note :

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\, g(y)\, dy,$$

appelé produit de convolution de f et g ; alors $f * g \in \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^n)$ et on a :

$$\|f * g\|_{\mathbf{L}^p} \leq \|f\|_{\mathbf{L}^1}\, \|g\|_{\mathbf{L}^p} .$$

Preuve. voir [1] , [2] , [3] . ■

1.4 Espaces de sobolev

Les espaces de Sobolev sont des espaces fonctionnels, des fonctions qui appartiennent à L^p telles que leurs dérivées (au sens faible i.e au sens des distrbutions) appartiennent à L^p .

1.4.1 Définitions et propriétés de $\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$ et $\mathbf{W}_0^{1,p}(\Omega)$

Définition 1.4.1

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et soit $1 \leq p \leq +\infty$. L'espace de Sobolev $\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$ est défini par :

$$\mathbf{W}^{1,p}(\Omega) = \left\{ \begin{array}{c} u \in \mathbf{L}^p(\Omega) \ ; \exists g_1, g_2, ..., g_n \in \mathbf{L}^p(\Omega) \ \ telsque : \\ \int_\Omega u \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \varphi, \ \forall \varphi \in \mathbf{C}_c^\infty(\Omega) \end{array} \right\}$$

pour $u \in \mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$ on note :

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i \quad et \quad \nabla u = (g_1, g_2, ..., g_n).$$

L'espace $\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme :

$$\|u\|_{\mathbf{W}^{1,p}} = \|u\|_{\mathbf{L}^p} + \sum_{i=1}^n \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|_{\mathbf{L}^p}.$$

Ou parfois sa norme équivalente :

$$\|u\|_{\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)} = \left(\|u\|^p_{\mathbf{L}^p(\Omega)} + \|\nabla u\|^p_{\mathbf{L}^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}} \qquad (si \ \ 1 \leq p < +\infty).$$

Si $p = +\infty$, la norme de l'espace $\mathbf{W}^{1,\infty}(\Omega)$ est :

$$\|u\|_{\mathbf{W}^{1,\infty}(\Omega)} = \sup_\Omega \mid u \mid + \sup_\Omega \mid \nabla u \mid.$$

On pose $\mathbf{H}^1(\Omega) = \mathbf{W}^{1,2}(\Omega)$
où

$$\mathbf{H}^1(\Omega) = \left\{ u \mid u \in \mathbf{L}^2(\Omega), \frac{\partial u}{\partial x_i} \in \mathbf{L}^2(\Omega), ...i = 1...n \right\}$$

l'espace $\mathbf{H}^1(\Omega)$ est muni du produit scalaire :

$$(u,v)_{\mathbf{H}^1(\Omega)} = (u,v)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{\mathbf{L}^2(\Omega)}.$$

La norme associée est :

$$\|u\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} = \left(\|u\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

est équivalente à la norme de $\mathbf{W}^{1,2}(\Omega)$, $\mathbf{H}^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Proposition 1.4.2

L'espace $\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$ *est :*

1. *un espace de Banach pour :* $1 \leq p \leq \infty$
2. *un espace réflexif pour :* $1 < p < \infty$
3. *un espace séparable pour :* $1 \leq p < \infty$

L'espace $\mathbf{H}^1(\Omega)$ *est un espace de Hilbert séparable.*

Preuve. voir [1] . ■

La proposition suivante est une caractérisation simple des fonctions de $\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$.

Proposition 1.4.3

Soit $u \in \mathbf{L}^p$ *avec* $1 < p \leq \infty$, *les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. $u \in \mathbf{W}^{1,p}$.
2. *Il existe une constante c telle que :*

$$\begin{cases} \left| \int_\Omega u \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right| \leq c \|\varphi\|_{\mathbf{L}^{p'}} , \ \forall \varphi \in \mathbf{C}_c^\infty(\Omega) , \ \forall i = 1, 2, ...n \\ \quad \text{où } \ p' \text{ et le conjugué de } p, \quad \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1. \end{cases}$$

3. *Il existe une constante c telle que pour tout ouvert* $w \subset \Omega$ *et tout* $h \in \mathbb{R}$ *avec* $|h| < dist(w, \mathbb{R}^n \backslash \Omega)$ *on a :*

$$\|\tau_h u - u\|_{\mathbf{L}^p(w)} \leq c |h| .$$

De plus on peut choisir $c = \|\nabla u\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)}$.

Preuve. voir[1] . ■

Théorème 1.4.4 ***(Opérateur de prolongement)***

On suppose que Ω *est de classe* $\mathbf{C}^1$ *avec* Γ *borné. Alors il existe un opérateur de prolongement linéaire :*

$$\begin{array}{rccc} P: & \mathbf{W}^{1,p}(\Omega) & \longrightarrow & \mathbf{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n) \\ & u & \longmapsto & Pu \end{array}$$

tel que pour tout $u \in \mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$ *:*

1. $Pu_{|\Omega} = u$
2. $\|Pu\|_{\mathbf{L}^p(\mathbb{R}^n)} \leq c\|u\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)}$
3. $\|Pu\|_{\mathbf{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq c\|u\|_{\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)}$

où c *dèpend seulement de* Ω*.*

Preuve. voir $[1], [2]$. ■

Théorème 1.4.5

On suppose que Ω *est de classe* $\mathbf{C}^1$*, soit* $u \in \mathbf{W}^{1,p}(\Omega) \cap \mathbf{C}\left(\overline{\Omega}\right)$ *avec* $1 \leq p < +\infty$ *alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. $u = 0$ *sur* Γ .
2. $u \in \mathbf{W}_0^{1,p}(\Omega)$.

Preuve. voir $[1]$. ■

Voici une autre caractérisation de $\mathbf{W}_0^{1,p}$

Théorème 1.4.6

On suppose que Ω *de classe* $\mathbf{C}^1$*, soit* $u \in \mathbf{L}^p(\Omega)$ *avec* $1 < p < \infty$*, les propriétés suivantes sont équivalentes*

1. $u \in \mathbf{W}_0^{1,P}(\Omega)$.

2. *il existe une constante c telle que*

$$\begin{cases} \left|\int_\Omega u\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right| \leq c\,\|\varphi\|_{\mathbf{L}^{p'}}\,,\ \ \forall\varphi\in\mathbf{C}_0^1\left(\mathbb{R}^n\right),\ \ \forall i=1,2,...n \\ \text{où}\ \ p'\ \text{est le conjugué de}\ \ p,\ \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1. \end{cases}$$

3. *la fonction*

$$\overline{u}\left(x\right)=\begin{cases} u\left(x\right)\ \ si\ \ x\in\Omega \\ 0\ \ si\ \ x\in\mathbb{R}^n\backslash\Omega \end{cases}$$

appartient à $\mathbf{W}^{1,p}\left(\mathbb{R}^n\right)$ *et dans ce cas* $\dfrac{\partial\overline{u}}{\partial x_i}=\overline{\dfrac{\partial u}{\partial x_i}}$.

Preuve. voir[1] , [2] . ∎

Théorème 1.4.7 ***(Inégalité de Poincaré)***

On suppose que Ω *est un ouvert borné. Alors il existe une constante* $c=c\left(\Omega,p\right)$ *telle que :*

$$\|u\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)}\leq c\|\nabla u\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)},\quad \forall u\in\mathbf{W}_0^{1,p}\left(\Omega\right),1\leq p<\infty$$

Autrement dit, sur $\mathbf{W}_0^{1,p}\left(\Omega\right)$ *la quantité* $\|\nabla u\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)}$ *est une norme équivalente à la norme de* $\mathbf{W}^{1,p}\left(\Omega\right)$.

Preuve. voir[1] , [2] . ∎

Remarque 1.4.8

L'inégalité de Poincaré reste valable si Ω *est de mesure finie, ou bien si* Ω *borné dans une seule direction.*

Définition 1.4.9 ***: (L'espace dual de*** $\mathbf{W}_0^{1,p}\left(\Omega\right)$***)***

On désigne par $\mathbf{W}^{-1,p'}\left(\Omega\right)$ *l'espace dual de* $\mathbf{W}_0^{1,p}\left(\Omega\right)$ $\left(1\leq p<+\infty\right)$ *avec* $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$, *on note par* $\mathbf{H}^{-1}\left(\Omega\right)$ *le dual de* $\mathbf{H}_0^1\left(\Omega\right)$ *avec* $\mathbf{H}^{-1}\left(\Omega\right)=\left(\mathbf{H}_0^1\left(\Omega\right)\right)'$ *on introduit ensuite :*

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_0^1\left(\Omega\right) &= \text{adhérence de } \mathbf{D}\left(\Omega\right)\ \text{ dans } \mathbf{H}^1\left(\Omega\right) \\ &= \text{sous-espace de } \mathbf{H}^1\left(\Omega\right)\ \text{ des fonctions "nulles" sur } \Gamma. \end{aligned}$$

Grâce au théorème de représentation de Reisz on peut identifier $\mathbf{L}^2$ et son dual. Par conséquent, on a les inclusions :

$$\mathbf{H}_0^1(\Omega) \subset \mathbf{L}^2(\Omega) \subset \mathbf{H}^{-1}(\Omega) \subset \mathbf{D}'(\Omega),$$

avec injections continues.

On peut caractériser les éléments de $\mathbf{W}^{-1,p'}(\Omega)$ par la proposision suivante :

Proposition 1.4.10

Soit $F \in \mathbf{W}^{-1,p'}(\Omega)$, alors il existe $f_0, f_1, f_2, ..., f_n \in \mathbf{L}^{p'}(\Omega)$ telle que :

$$(F, v) = \int_\Omega f_0 v dx + \sum_{i=1}^n \int_\Omega f_i \frac{\partial v}{\partial x_i} dx, \ \forall v \in \mathbf{W}_0^{1,p}(\Omega),$$

et :

$$\|F\| = \max\left(\|f_0\|_{\mathbf{L}^{p'}}, \|f_1\|_{\mathbf{L}^{p'}}\right).$$

Si Ω et borné, on peut prendre $f_0 = 0$.

Preuve. voir[1], [2]. ■

Remarque 1.4.11

Les éléments de $\mathbf{H}^{-1}(\Omega)$ sont sommes de dérivées du 1er ordre de fonctions de $\mathbf{L}^2(\Omega)$.

1.4.2 Les espaces $\mathbf{W}^{m,p}(\Omega), \mathbf{W}_0^{m,p}(\Omega)$

Définition 1.4.12

Soient $m \geq 2$ un entier et soit p avec $1 \leq p \leq \infty$. On définit par récurrence :

$$\mathbf{W}^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in \mathbf{W}^{m-1,p}(\Omega) \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial x_i} \in \mathbf{W}^{m-1,p}(\Omega) \quad , \forall i = 1, 2, ..., n \right\}.$$

On vérifie aisément que $u \in \mathbf{W}^{m,p}(\Omega)$ *si et seulement si* $u \in \mathbf{L}^p(\Omega)$, *et pour tout* $\alpha \in \mathbb{N}^n$ *telque* $\mid \alpha \mid \leq m$, *il existe* $g_\alpha \in \mathbf{L}^p(\Omega)$ *tel que :*

$$\int_\Omega u D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g_\alpha \varphi \ , \quad \forall \varphi \in \mathbf{C}_0^\infty(\Omega) .$$

On note : $D^\alpha u = g_\alpha$.

L'espace $\mathbf{W}^{m,p}(\Omega)$ *avec* $1 < p < \infty$, *muni de la norme :*

$$\|u\|_{\mathbf{W}^{m,p}(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)},$$

est un espace de Banach .

On pose $\mathbf{H}^m(\Omega) = \mathbf{W}^{m,2}(\Omega)$, *l'espace* $\mathbf{H}^m$ *muni du produit scalaire*

$$(u,v)_{H^m} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} (D^\alpha u; D^\alpha v)_{\mathbf{L}^2}$$

est un espace de Hilbert.

Théorème 1.4.13 ***(Densitè)***

On suppose que Ω *est de classe* $\mathbf{C}^1$. *Soit* $u \in \mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$, *avec* $1 \leq p < +\infty$

Alors il existe une suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *de* $\mathbf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ *telle que :*

$$u_{k|\Omega} \to u \quad si \quad k \to +\infty \quad dans \quad \mathbf{W}^{1,p}(\Omega) .$$

Autrement dit, les restrictions à Ω *des fonctions de* $\mathbf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ *forment un sous espace dense de* $\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$.

Preuve. voir [1] , [2] . ■

Définition 1.4.14

Pour $m \geq 2$ *entier et* $1 \leq p < \infty$, *on définit* $\mathbf{W}_0^{m,p}(\Omega)$ *comme étant la fermeture de* $\mathbf{C}_c^m(\Omega)$ *dans* $\mathbf{W}^{m,p}(\Omega)$. *on a :*

$$\mathbf{W}_0^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in \mathbf{W}^{m,p}(\Omega) ;\ u = Du = ... = D^{m-1}u = 0 \quad sur \quad \Gamma \right\} .$$

Il convient de distinguer :

$$\mathbf{W}_0^{2,p}(\Omega) = \left\{u \in \mathbf{W}^{2,p}(\Omega)\,;\ u = Du = 0 \quad sur \ \ \Gamma\right\}$$

et

$$\mathbf{W}^{2,p}(\Omega) \cap \mathbf{W}_0^{1,p}(\Omega) = \left\{u \in \mathbf{W}^{2,p}(\Omega)\,;\ u = 0 \quad sur\ \Gamma\right\}.$$

Définition 1.4.15 (*L'espace dual de* $\mathbf{W}_0^{m,p}(\Omega)$)

On désigne par $\mathbf{W}^{-m,p'}(\Omega)$ *l'espace dual de* $\mathbf{W}_0^{m,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$ $\left(\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1\right)$ *et par* $\mathbf{H}^{-1}(\Omega)$ *le dual de* $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$,

on identifie $\mathbf{L}^2(\Omega)$ *et son dual, mais on s'identifie pas* $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ *et son dual .*

On a le schéma :

$$\mathbf{H}_0^1(\Omega) \subset \mathbf{L}^2(\Omega) \subset \mathbf{H}^{-m}(\Omega),$$

avec injections continues et denses.

Remarque 1.4.16

Si Ω *et borné on a :*

$$\mathbf{W}_0^{m,p}(\Omega) \subset \mathbf{L}^2(\Omega) \subset \mathbf{W}^{-m,p'}(\Omega) \ \ , \quad si \ \ \frac{2n}{n+2} \leq p < \infty,$$

avec injections continues et denses.

Remarque 1.4.17

Si Ω *est non borné on a seulement*

$$\mathbf{W}_0^{m,p}(\Omega) \subset \mathbf{L}^2(\Omega) \subset \mathbf{W}^{-m,p'}(\Omega) \ \ , \ si \ \ \frac{2n}{n+2} \leq p \leq 2,$$

avec injections continues et denses.

1.4.3 Injections de Sobolev

Nous nous intéressons ici aux possibilités de trouver des injections de l'espace $\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$ de façon continue ou même compacte dans des espaces plus simples, comme $\mathbf{L}^p(\Omega)$, voir même dans certains cas $\mathbf{C}\left(\overline{\Omega}\right)$.

On donne le théorème de Rellich-Kondrachov qui concerne la compacité de l'injection des espaces de Sobolev $\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$ dans certains espaces $\mathbf{L}^q(\Omega)$.

Théorème 1.4.18 ***(Rellich-Kondrachov)***

On suppose Ω borné de classe C^1, on a :
- *Si $p < n$ alors $\mathbf{W}^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{L}^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, p^*[$ où $\dfrac{1}{p*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{n}$;*
- *Si $p = n$ alors $\mathbf{W}^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{L}^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, +\infty[$;*
- *Si $p > n$ alors $\mathbf{W}^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{C}\left(\overline{\Omega}\right)$.*

Avec injections compactes.

Preuve. voir [2]. ■

1.5 La méthode de Galerkin

La méthode de Galerkin est une méthode très générale et trés robuste. L'idée de la méthode est la suivante.

Partant d'un probléme posé dans un espace de dimension infinie, on procède d'abord à une approximation dans une suite croissante de sous-espaces de dimension finie. On résout ensuite le problème approché, ce qui est en général plus facile que de résoudre le problème directement en dimension infinie. Enfin, on passe d'une façon ou d'une autre à la limite quand on fait tendre la dimension des espaces d'approximation vers l'infini pour construire une solution du problème de départ. Il convient de noter que, outre son intérêt théorique, la méthode de Galerkin fournit également un procédé constructif d'approximation.

1.6 Lemme de Gronwall

Lemme 1.6.1

Soient φ, ψ *et* y *trois fonctions continues sur un segment* $[a, b]$*, à valeurs positives et vérifiant l'inégalité*

$$y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \psi(s)\, y(s)\, ds, \forall t \in [a, b],$$

alors

$$y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \varphi(s)\, \psi(s) \exp\left(\int_s^t \psi(u)\, du\right) ds, \forall t \in [a, b].$$

Preuve. voir [4] . ■

Corollaire 1.6.2

Soient ψ *et* y $:[a, b] \to \mathbb{R}^+$ *deux fonctions continues vérifiant :*

$$y(t) \leq c + \int_a^t \psi(s)\, y(s)\, ds, \exists c \geq 0 \quad / \quad \forall t \in [a, b],$$

alors

$$y(t) \leq c \exp\left(\int_a^t \psi(s)\, ds\right), \forall t \in [a, b].$$

Preuve. voir [4] . ■

Chapitre 2

Etude d'une équation hyperbolique non linéaire

2.1 Position du problème

On désigne par Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, de point générique $x = \{x_1, ..., x_n\}$. Soit Γ la frontière de Ω. On supposera toujours que Γ est "assez régulière". On désigne par Q le cylindre de $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_t$:

$$Q = \Omega \times]0, T[\,, \quad T \text{ fini}$$

et par Σ la surface latérale du cylindre Q :

$$\Sigma = \Gamma \times]0, T[\,.$$

Le premier exemple d'équation aux dérivées partielles non linéaires que nous allons considérer est le suivant (qui intervient en Mécanique Quantique Relativiste) : on cherche une fonction, $u = u(x,t)\,,\ x \in \Omega, t \in]0, T[$ à valeurs réelles, solution de :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \triangle u + \mid u \mid^\rho u = f, \quad x \in \Omega, \quad t \in]0, T[\,. \tag{2.1}$$

Où

$$\triangle u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

(Δu s'appelle le Laplacien de u), ρ donné (on suppose seulement $\rho > -1$) et f donnée dans $\Omega \times]0, T[\,.$

La fonction u, cherchée, doit vérifier en plus les conditions aux limites et les conditions initiales suivantes :

$$u = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma \tag{2.2}$$

$$\begin{cases} u(x,0) = u_0(x), x \in \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), x \in \Omega \end{cases} \tag{2.3}$$

où les fonctions u_0 et u_1 sont données.

Remarque 2.1.1

Le problème est non linéaire à cause de la présence du facteur $| u |^\rho u$.

Dans l'étude du problème (2.1) (2.2) (2.3) on va introduire l'espace

$$V = \mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{L}^p(\Omega), \tag{2.4}$$

où

$$p = \rho + 2. \tag{2.5}$$

L'espace V *est muni de la norme*

$$\|v\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)} + \|v\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)}$$

qui en fait un espace de Banach.

Remarque 2.1.2

D'après le théorème de plongement de Sobolev on a :

$$\begin{cases} \mathbf{H}_0^1(\Omega) \subset \mathbf{L}^q(\Omega) \\ \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n} \quad si \quad n \geq 3 \end{cases} \tag{2.6}$$

de sorte que

$$V = \mathbf{H}_0^1(\Omega) \quad si \quad \rho \leq \frac{4}{n-2} \ .$$

On aura à utiliser les résultats suivants :

Lemme 2.1.3

L'espace V défini en (2.4) est séparable (i.e admet un ensemble dénombrable dense).

Preuve. Voir [1] . ∎

Lemme 2.1.4

Si $f \in \mathbf{L}^p(0,T;X)$ *et* $\dfrac{\partial f}{\partial t} \in \mathbf{L}^p(0,T;X)$ $(1 \leq p \leq \infty)$, *alors* f *est après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle de* $(0,T)$, *continue de* $[0,T] \to X$.

Preuve. Voir [1] . ∎

On est maintenant en mesure de formuler de façon précise le problème (2-1) (2-2) (2-3).

2.2 Existence d'une solution

Le résultat suivant précise à quel sens on résout le problème (2-1) (2-2) (2-3) et donne un premier théorème d'existence d'une solution.

Théorème 2.2.1

On suppose que Ω *est un ouvert borné. Soient* f, u_0, u_1, *données avec*

$$f \in \mathbf{L}^2(\Omega), \tag{2.7}$$

$$u_0 \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{L}^p(\Omega), \quad p = \rho + 2, \tag{2.8}$$

$$u_1 \in \mathbf{L}^2(\Omega), \tag{2.9}$$

il existe, alors une fonction u *vérifiant*

$$u \in \mathbf{L}^\infty\left(0,T \ ; \ \mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{L}^p(\Omega)\right), \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in \mathbf{L}^{\infty}\left(0,T\ ;\mathbf{L}^{2}\left(\Omega\right)\right), \tag{2.11}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \triangle u + \left|u\right|^{\rho} u = f \quad dans \ \ Q, \tag{2.12}$$

$$u\left(0\right) = u_0, \tag{2.13}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}\left(0\right) = u_1. \tag{2.14}$$

Remarque 2.2.2

De (2-10) (2-11) et du lemme 2.1.4 il résulte en particulier que u est continue de $[0,T] \rightarrow \mathbf{L}^{2}\left(\Omega\right)$ *de sorte que (2-13) a un sens.*

Pour vérifier que (2-14) a un sens, on doit utiliser l'équation (2-12), qui s'écrit :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f + \triangle u - \left|u\right|^{\rho} u. \tag{2.15}$$

Comme

$$\triangle \in \mathcal{L}\left(\mathbf{H}_0^1\left(\Omega\right)\ ;\ \mathbf{H}^{-1}\left(\Omega\right)\right),$$

on a :

$$\triangle u \in \mathbf{L}^{\infty}\left(0,T\ ;\ \mathbf{H}^{-1}\left(\Omega\right)\right),$$

et comme $f \rightarrow \left|f\right|^{\rho} f$ *applique* $\mathbf{L}^{p}\left(\Omega\right) \rightarrow \mathbf{L}^{p'}\left(\Omega\right), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$
on vérifie sans peine que

$$\left|u\right|^{\rho} u \in \mathbf{L}^{\infty}\left(0,T;\mathbf{L}^{p'}\left(\Omega\right)\right),$$

de sorte que (2-15) entraine :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \in \mathbf{L}^{2}\left(0,T;\mathbf{L}^{2}\left(\Omega\right)\right) + \mathbf{L}^{\infty}\left(0,T\ ;\ \mathbf{H}^{-1}\left(\Omega\right) + \mathbf{L}^{p'}\left(\Omega\right)\right), \tag{2.16}$$

d'où, en particulier :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \in \mathbf{L}^{2}\left(0,T\ ;\ \mathbf{H}^{-1}\left(\Omega\right) + \mathbf{L}^{p'}\left(\Omega\right)\right), \tag{2.17}$$

ce qui, joint à (2-11) montre, grâce au lemme 2.1.4, que $\frac{\partial u}{\partial t}$ *est continue de* $[0,T] \rightarrow \mathbf{H}^{-1}\left(\Omega\right) + \mathbf{L}^{p'}\left(\Omega\right)$, *de sorte que (2-14) a un sens.*

Remarque 2.2.3

Sous les hypothèses du théorème 2.2.1, on ignore s'il y a, ou non, unicité de la solution. On verra toutefois ci-après qu'il y a unicitè lorsque ρ n'est "pas trop grand".

Remarque 2.2.4

D'après la définition (1.4.9) et (2-4), $u = 0$ sur Σ ; la condition (2-2) est donc incorporée dans (2-10).

Preuve.

Le plan de la démonstration est le suivant :

(i) On construit des solutions «approchées» par la méthode de Faedo-Galerkin.

(ii) On établit, sur ces solutions approchées, des estimations a priori.

$(iiii)$ On passe à la limite, grâce à des propriétés de compacité (pour passer à la limite dans les termes non linéaires).

Etape (i) : Solutions « approchées »

Pour simplifier l'écriture, on posera

$$v' = \frac{\partial v}{\partial t}, \quad v'' = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, ...etc$$

on introduit une suite $w_1, \cdots, w_m, \cdots$, de fonctions ayant les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} w_i \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{L}^P(\Omega)\, \forall i\,; \\ \forall m, \quad w_1, \cdots, w_m \text{ sont linéairement indépendants} \\ \text{les combinaisons linéaires finies des } w_i \text{ sont denses dans } \mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{L}^p(\Omega)\,, \end{cases} \tag{2.18}$$

une telle suite existe, d'après le lemme 2.1.3.

On cherche alors $u_m = u_m(t)$ solution «approchées» du problème sous la forme

$$u_m(t) = \sum_{i=1}^{n} g_{im}(t)\, w_i, \tag{2.19}$$

les g_{im} étant à déterminer par les conditions :

$$\begin{cases} (u_m''(t), w_j) + a(u_m(t), w_j) + (|u_m(t)|^{\rho} u_m(t), w_j) = (f(t), w_j), \\ \qquad\qquad 1 \leq j \leq m \end{cases} \tag{2.20}$$

$$a(u, v) = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx, \tag{2.21}$$

le système (2-20) d'équations différentielles (ordinaires) non linéaires est à compléter par les conditions initiales :

$$\begin{cases} u_m(0) = u_{0m}, u_{0m} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{im} w_i \longrightarrow u_0 \;\text{ dans }\; \mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{L}^p(\Omega) \\ \qquad\qquad \text{lorsque } m \longrightarrow \infty, \end{cases} \tag{2.22}$$

$$u_m'(0) = u_{1m}, u_{1m} = \sum_{i=1}^{n} \beta_{im} w_i \longrightarrow u_1 \;\text{ dans }\; L^2(\Omega) \;\text{ lorsque }\; m \longrightarrow \infty. \tag{2.23}$$

D'après les résultats généraux sur les systèmes d'équations différentielles, on est assuré de l'existence d'une solution de (2-20), (2-22), (2-23) (noter que $\det(w_i, w_j) \neq 0$ grâce à la linéaire indépendance de $w_1, ..., w_m$) dans un intervalle $[0, t_m]$; les estimations a priori qui suivent montreront que $t_m = T$.

$Etape(ii)$: estimations a priori

On multiplie (2-20) d'indice j par $g'_{jm}(t)$ et l'on somme en j. il vient :

$$\begin{cases} \left(u_m''(t), \sum_{j=1}^{m} g'_{jm}(t)\, w_j\right) + a\left(u_m(t), \sum_{j=1}^{m} g'_{jm}(t)\, w_j\right) + \\ + \left(|u_m(t)|^{\rho} u_m(t), \sum_{j=1}^{m} g'_{jm}(t)\, w_j\right) = \left(f, \sum_{j=1}^{m} g'_{jm}(t)\, w_j\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \{(u_m''(t), u_m'(t)) + a(u_m(t), u_m'(t)) + (|u_m(t)|^{\rho} u_m(t), u_m'(t)) = (f, u_m'(t)) \tag{2.24}$$

d'où

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(u'_m(t), u'_m(t)\right) + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}a\left(u_m(t), u_m(t)\right) + \frac{1}{p}\frac{d}{dt}\left(\int_\Omega |u_m(x,t)|^p\, dx\right) = \\ \qquad\qquad = \left(f(t), u'_m(t)\right). \end{cases} \tag{2.25}$$

Posons

$$\|u\| = \sqrt{a(u,u)}\ \left(= \text{norme sur } \mathbf{H}_0^1(\Omega)\ \text{ équivalente à } \|u\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\right)$$

Il résulte de (2-25)

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u'_m(t)|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|^2 + \frac{1}{p}\frac{d}{dt}\left(\int_\Omega |u_m(x,t)|^p\, dx\right) = \\ \qquad\qquad = \left(f(t), u'_m(t)\right) \end{cases}$$

après intégration on trouve :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\int_0^t \frac{d}{dt}|u'_m(\sigma)|^2 d\sigma + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{d}{dt}\|u_m(\sigma)\|^2 d\sigma + \frac{1}{p}\int_0^t \frac{d}{dt}\left(\int_\Omega |u_m(x,t)|^p\, dx\right) = \\ \qquad\qquad = \int_0^t |f(\sigma)|\,|u'_m(\sigma)|\, d\sigma \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}|u'_m(t)|^2 - \frac{1}{2}|u'_m(0)|^2 + \frac{1}{2}\|u_m(t)\|^2 - \frac{1}{2}\|u_m(0)\|^2 + \frac{1}{p}\|u_m(t)\|^p_{\mathbf{L}^p(\Omega)} = \\ \qquad\qquad = \int_0^t |f(\sigma)|\,|u'_m(\sigma)|\, d\sigma \end{cases}$$

on aura donc

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\left(|u'_m(t)|^2 + \|u_m(t)\|^2\right) + \frac{1}{p}\|u_m(t)\|^p_{\mathbf{L}^p(\Omega)} \leq \\ \leq \frac{1}{2}\left(|u'_m(0)|^2 + \|u_m(0)\|^2\right) + \frac{1}{p}\|u_m(t)\|^p_{\mathbf{L}^p(\Omega)} + \int_0^t |f(\sigma)|\,|u'_m(\sigma)|\, d\sigma \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}\left(|u'_m(t)|^2 + \|u_m(t)\|^2\right) + \frac{1}{p}\|u_m(t)\|^p_{\mathbf{L}^p(\Omega)} \leq \\ \leq \frac{1}{2}\left(|u'_{1m}|^2 + \|u_{0m}\|^2\right) + \frac{1}{p}\|u_m(t)\|^p_{\mathbf{L}^p(\Omega)} + \int_0^t |f(\sigma)|\,|u'_m(\sigma)|\, d\sigma \end{cases} \tag{2.26}$$

D'après (2-22), (2-23) le deuxième membre est :

$$\leq c + \int_0^t |f(\sigma)| \, |u'_m(\sigma)| \, d\sigma.$$

(les c désignent des constantes diverses indépendantes de m), d'où

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}\left(|u'_m(t)|^2 + \|u_m(t)\|^2\right) + \frac{1}{p}\|u_m(t)\|^p_{\mathbf{L}^p(\Omega)} \leq \\ \leq c + \frac{1}{2}\int_0^t |f(\sigma)|^2 \, d\sigma + \frac{1}{2}\int_0^t |u'_m(\sigma)|^2 \, d\sigma. \end{array} \right. \tag{2.27}$$

D'après (2-7)

$$\int_0^t |f(\sigma)|^2 \, d\sigma \leq \text{constante}.$$

On déduit donc, en particulier, de (2-27), que

$$|u'_m(t)|^2 \leq c + \int_0^t |u'_m(\sigma)|^2 \, d\sigma. \tag{2.28}$$

D'où on déduit

$$|u'_m(t)| \leq \text{constante} \quad (\text{indépendente de } m). \tag{2.29}$$

Reprenant (2-27) on en déduit que

$$\|u_m(t)\| + \|u_m(t)\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)} \leq \text{constante} \quad (\text{indépendente de } m). \tag{2.30}$$

On en déduit que $t_m = T$ et (2-29), (2-30) s'expriment alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \qquad \text{lorsque } m \to \infty,\ u_m \text{ demeure dans un ensemble borné de} \\ \mathbf{L}^\infty(0,T\ ;\ \mathbf{H}^1_0(\Omega) \cap \mathbf{L}^p(\Omega)) \text{ et } u'_m \text{ dans un borné de } \quad \mathbf{L}^\infty(0,T\ ; \mathbf{L}^2(\Omega)). \end{array} \right.$$

Etape(iii) : Passage à la limite

D'après le théorème de Dunford-Pettis l'espace

$$\mathbf{L}^\infty\left(0,T\ ;\ \mathbf{H}^1_0(\Omega) \cap \mathbf{L}^p(\Omega)\right) \quad \left(\text{resp } \mathbf{L}^\infty\left(0,T\ ;\ \mathbf{L}^2(\Omega)\right)\right),$$

est le dual de

$$\mathbf{L}^1\left(0,T\ ;\ \mathbf{H}^{-1}(\Omega) + \mathbf{L}^{p'}(\Omega)\right) \quad \left(\text{resp de } \mathbf{L}^1\left(0,T\ ;\ \mathbf{L}^2(\Omega)\right)\right),$$

et par conséquent on peut extraire de u_m une sous suite u_μ telle que :

$$u_\mu \longrightarrow u \; dans \; \mathbf{L}^\infty \left(0,T \; ; \; \mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{L}^p(\Omega)\right) \quad faible - *, \tag{2.31}$$

$$u'_\mu \longrightarrow u' \; dans \; \mathbf{L}^\infty \left(0,T \; ; \; \mathbf{L}^2(\Omega)\right) \quad faible - *, \tag{2.32}$$

($faible{-}*$ i.e : $\int\limits_0^T (u_\mu(t), g(t))\, dt \longrightarrow \int\limits_0^T (u(t), g(t))\, dt$, $\forall g \in \mathbf{L}^1(0,T \; ; \; \mathbf{H}^{-1}(\Omega) + \mathbf{L}^p(\Omega))$).

Par ailleurs, il résulte en particulier de la fin de l'étape (ii) que u_m est borné dans $\mathbf{L}^2(0,T \; ; \; \mathbf{H}_0^1(\Omega))$ et u'_m dans $\mathbf{L}^2(0,T \; ; \mathbf{L}^2(\Omega))$ donc en particulier on déduit que u_m demeure dans un borné de $\mathbf{H}^1(Q)$.

Mais on sait que

$$\text{l'injection de } \mathbf{H}^1(Q) \text{ dans } \mathbf{L}^2(Q) \text{ est compacte.} \tag{2.33}$$

On peut donc supposer que la suite u_μ extraite de u_m vérifie en outre $(2-31), (2-32)$

$$u_\mu \longrightarrow u \text{ dans } \mathbf{L}^2(Q) \quad \text{fort et presque partout (p.p).} \tag{2.34}$$

Et comme $|u_m|^\rho u_m$ demeure dans un borné de $\mathbf{L}^\infty\left(0,T \; ; \; \mathbf{L}^{p'}(\Omega)\right)$.

On peut encore supposer que

$$|u_\mu|^\rho u_\mu \longrightarrow w \text{ dans } \mathbf{L}^\infty\left(0,T \; ; \; \mathbf{L}^{p'}(\Omega)\right) \quad faible - *. \tag{2.35}$$

On montre que :

$$w = |u|^\rho u, \tag{2.36}$$

or $(2-36)$ résulte de $(2-34), (2-35)$ et on appliquera le lemme 2.1.3 avec $\Omega = Q$

$$g_\mu = |u_\mu|^\rho u_\mu \; , \quad q = \frac{\rho+2}{\rho+1} = p',$$

d'après $(2-34)$ $g_\mu \longrightarrow |u|^\rho u = g \quad p.p$ et $g_\mu \longrightarrow w$ dans $\mathbf{L}^q(\Omega)$ faible, d'après$(2-35)$, d'où

$w = g = |u|^\rho u$ d'après le lemme 1.1.2.

Ainsi $(2-36)$ se trouve démontré et l'on peut passer à la limite dans $(2-20)$ que l'on utilise pour $m = \mu$.

Soit donc j fixé et $\mu > j$ alors, d'après $(2-20)$:

$$\left(u''_{\mu}, w_j\right) + a\ (u_{\mu}, w_j) + (|u_{\mu}|^{\rho} u_{\mu}, w_j) = (f, w_j)\,. \tag{2.37}$$

Mais d'après $(2-31)$

$$a\ (u_{\mu}, w_j) \longrightarrow a\ (u, w_j)\ \text{ dans }\ \mathbf{L}^{\infty}(0,T)\quad faible - *\ ,$$

$$\left(u'_{\mu}, w_j\right) \longrightarrow \left(u', w_j\right)\ \text{ dans }\ \mathbf{L}^{\infty}(0,T)\quad faible - *,$$

et donc

$$\left(u''_{\mu}, w_j\right) = \frac{d}{dt}\left(u'_{\mu}, w_j\right) \longrightarrow \left(u'', w_j\right)\ \ dans\ \mathbf{D}'(0,T)\,,$$

et d'après $(2-35)\,,\,(2-36)$:

$$(|u_{\mu}|^{\rho} u_{\mu}, w_j) \longrightarrow (|u|^{\rho} u, w_j)\ \ dans\ \mathbf{L}^{\infty}(0,T)\ \ faible - *,$$

on déduit donc de $(2-37)$ que

$$\frac{d^2}{dt^2}(u, w_j) + a\,(u, w_j) + (|u|^{\rho} u, w_j) = (f, w_j)\,,$$

et cela pour j fixé quelconque. Donc l'on en déduit -d'après la propriété de densité de la «base » $w_1 \cdots w_m \cdots$;que :

$$\frac{d^2}{dt^2}(u, v) + a\ (u, v) + (|u|^{\rho} u, v) = (f, v)\,,\ \forall v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{L}^p(\Omega)\,. \tag{2.38}$$

D'où résulte que u satisfait à $(2-12)$ (et aussi à $(2-10)\,,\ (2-11))$. ■

Il reste à montrer que $(2-13)\,,\,(2-14)$ ont lieu .

D'après $(2-31)\,,\ (2-32)$ et le *lemme* 2.1.3 on a, en particulier, $u_{\mu}(0) \longrightarrow u(0)$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ faible; or $u_{\mu}(0) = u_{0\mu} \longrightarrow u_0$ dans $\mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{L}^p(\Omega)$, donc on a $(2-13)$.

Par ailleurs, on a :

$$\left(u''_{\mu}, w_j\right) \longrightarrow \left(u'', w_j\right)\ \text{ dans }\ \mathbf{L}^{\infty}(0,T)\quad faible - *\ ,$$

donc (d'après par exemple *le lemme* 2.1.3 avec $X = \mathbb{R}$)

$$\left(u'_{\mu}(0), w_j\right) \longrightarrow \left(u', w_j\right)_{t=0} = \left(u'(0), w_j\right),$$

et comme

$$\left(u'_{\mu}(0), w_j\right) \longrightarrow (u_1, w_j),$$

on a :

$$\left(u'(0), w_j\right) = (u_1, w_j), \quad \forall j.$$

D'où $(2-14)$.

2.3 Unicité de solution

Comme on l'a déjà indiqué, on ignore s'il y a unicité de la solution dans le cadre du théorème 2.2.1. On a dans ce sens le résultat partiel suivant :

Théorème 2.3.1

On se place dans les hypothèses du théorème 2.2.1, avec

$$\rho \leq \frac{2}{n-2} \quad (\rho \text{ fini quelconque si } n = 2). \tag{2.39}$$

Alors la solution u obtenue au théorème 2.2.1 est unique.

Preuve.

On fait la démonstration dans le cas $n \geq 3$ (le cas $n = 2$ est plus simple, selon les même principes).

Soient u et v deux solutions, au sens du théorème 2.3.1 ; alors $w = u - v$ vérifie

$$w'' - \triangle w = |v|^{\rho} v - |u|^{\rho} u, \tag{2.40}$$

$$w(0) = 0, w'(0) = 0, \tag{2.41}$$

$$w \in \mathbf{L}^{\infty}\left(0, T \; ; \; \mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{L}^p(\Omega)\right), \tag{2.42}$$

$$w' \in \mathbf{L}^{\infty}\left(0,T\ ;\ \mathbf{L}^{2}\left(\Omega\right)\right). \tag{2.43}$$

Multiplions formellement tout les deux membres de (2-40) par w' ;

alors -ce qui est correct lorsque les intégrales ci-après ont un sens- on trouve que :

$$\left(w'', w'\right) - \left(\triangle w, w'\right) = \left(\left|v\right|^{\rho} v - \left|u\right|^{\rho} u, w'\right)$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \left(w'', w'\right) + a\left(w, w'\right) = \left(\left|v\right|^{\rho} v - \left|u\right|^{\rho} u, w'\right) \\
&\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(w', w'\right) + \frac{1}{2}\frac{d}{dt} a\left(w, w\right) = \left(\left|v\right|^{\rho} v - \left|u\right|^{\rho} u, w'\right) \\
&\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|w'\left(t\right)\right|^{2} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|w\left(t\right)\right\|^{2} = \left(\left|v\right|^{\rho} v - \left|u\right|^{\rho} u, w'\right) \\
&\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\left|w'\left(t\right)\right|^{2} + \left\|w\left(t\right)\right\|^{2}\right) = \int_{\Omega}\left(\left|v\right|^{\rho} v - \left|u\right|^{\rho} u\right) w' dx.
\end{aligned} \tag{2.44}$$

Mais le deuxième membre de (2-44) est majoré en valeur absolue par :

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\Omega}\left(\left|v\right|^{\rho} v - \left|u\right|^{\rho} u\right) w' dx\right| &\leq \int_{\Omega} \sup\left(\left|v\right|^{\rho}, \left|u\right|^{\rho}\right)\left|v-u\right|\left|w'\right| dx \\
&\leq \int_{\Omega} \sup\left(\left|v\right|^{\rho}, \left|u\right|^{\rho}\right)\left|w\right|\left|w'\right| dx \\
&\leq \left(\rho+1\right)\int_{\Omega} \sup\left(\left|v\right|^{\rho}, \left|u\right|^{\rho}\right)\left|w\right|\left|w'\right| dx,
\end{aligned}$$

ce qui est majoré d'après l'inégalité de Holder, par :

$$\begin{aligned}
\left|\left(\rho+1\right)\int_{\Omega} \sup\left(\left|v\right|^{\rho}, \left|u\right|^{\rho}\right)\left|w\right|\left|w'\right| dx\right| &\leq \left(\rho+1\right)\int_{\Omega} \sup\left|\left|v\right|^{\rho}, \left|u\right|^{\rho}\right|\left\|w\left(t\right)\right\|\left\|w'\left(t\right)\right\| dx \\
&\leq \left(\rho+1\right)\left(\left\|\left|u\right|^{\rho}\right\|_{\mathbf{L}^{p}(\Omega)} + \left\|\left|v\right|^{\rho}\right\|_{\mathbf{L}^{p}(\Omega)}\right) \times \\
&\quad \times \left\|w\left(t\right)\right\|_{\mathbf{L}^{q}(\Omega)}\left\|w'\left(t\right)\right\|_{\mathbf{L}^{2}(\Omega)} \\
&\leq c\left(\left\|\left|u\right|^{\rho}\right\|_{\mathbf{L}^{p}(\Omega)} + \left\|\left|v\right|^{\rho}\right\|_{\mathbf{L}^{p}(\Omega)}\right) \times \\
&\quad \times \left\|w\left(t\right)\right\|_{\mathbf{L}^{q}(\Omega)}\left\|w'\left(t\right)\right\|_{\mathbf{L}^{2}(\Omega)},
\end{aligned}$$

où

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{n} + \frac{1}{2} = 1.$$

Mais d'après (2-39) $\rho n \leq q$, et d'après (2-6) on a donc :

$$\left|\int_{\Omega}\left(\left|v\right|^{\rho} v - \left|u\right|^{\rho} u\right) w' dx\right| \leq c\left(\left\|\left|u\right|^{\rho}\right\|_{\mathbf{L}^{p}(\Omega)} + \left\|\left|v\right|^{\rho}\right\|_{\mathbf{L}^{p}(\Omega)}\right)\left\|w\left(t\right)\right\|\left|w'\left(t\right)\right|. \tag{2.45}$$

Et comme $u, v \in \mathbf{L}^{\infty}(0, T \;;\; \mathbf{H}_0^1(\Omega))$ on a finalement :

$$\left| \int_{\Omega} \left(|v|^{\rho} v - |u|^{\rho} u \right) w' dx \right| \leq c \left\| w(t) \right\| \left| w'(t) \right|. \tag{2.46}$$

Alors (2-44) donne :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(|w'(t)|^2 + \|w(t)\|^2 \right) \leq c \|w(t)\| \, |w'(t)|$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \int_0^t \frac{d}{dt} \left(|w'(\sigma)|^2 + \|w(\sigma)\|^2 \right) d\sigma \leq c \int_0^t \|w(\sigma)\| \, |w'(\sigma)| \, d\sigma$$

$$\Rightarrow |w'(t)|^2 + \|w(t)\|^2 \leq c \int_0^t \left(\frac{1}{2} \|w(\sigma)\|^2 + \frac{1}{2} |w'(\sigma)|^2 \right) d\sigma$$

$$\Rightarrow |w'(t)|^2 + \|w(t)\|^2 \leq \frac{c}{2} \int_0^t \left(\|w(\sigma)\|^2 + |w'(\sigma)|^2 \right) d\sigma, \tag{2.47}$$

et d'après le lemme de Gronwall nous avons $\|w(t)\|^2 = 0$, alors $w(t) = 0$ pour presque tout $t \in \left]0, T\right[$ dans $L^2(\Omega)$,

ceci veut dire que $u = v$ donc la solution quand elle existe est unique.

Pour justifier la conclusion précédente on utilise un procédé classique dans le cas des équations hyperboliques linéaires. Soit $s \in \left]0, T\right]$, on introduit :

$$\psi(t) = \begin{cases} -\displaystyle\int_t^s w(\sigma) \, d\sigma, t \leq s \\ 0 \text{ si } t > s \end{cases}$$

$$w_1(t) = \int_0^t w(\sigma) \, d\sigma \text{ de sorte que } \psi(t) = w_1(t) - w_1(s) \quad \text{si} \quad t \leq s.$$

On prend le produit scalaire des deux membres de (2-40) avec $\psi(t)$:

$$(w'', \psi) - (\triangle w, \psi) = \left(|v|^{\rho} v - |u|^{\rho} u, \psi \right)$$

$$\Rightarrow \int_0^t w''(\sigma) \psi(\sigma) \, d\sigma + a(w, \psi) = \left(|v|^{\rho} v - |u|^{\rho} u, \psi \right)$$

$$\Rightarrow w'(\sigma) \psi(\sigma) |_0^t - \int_0^t w'(\sigma) \psi'(\sigma) \, d\sigma + a(w, \psi) = \left(|v|^{\rho} v - |u|^{\rho} u, \psi \right)$$

$$\Rightarrow w'(t) \psi(t) - w'(0) \psi(0) - \int_0^t w'(\sigma) \psi'(\sigma) \, d\sigma + a(w, \psi) = \left(|v|^{\rho} v - |u|^{\rho} u, \psi \right)$$

$$\Rightarrow -\int_0^t w'(\sigma)\,\psi'(\sigma)\,d\sigma + a(w,\psi) = \left(|v|^\rho v - |u|^\rho u, \psi\right)$$

$$\Rightarrow -(w',\psi') + a(w,\psi) = \left(|v|^\rho v - |u|^\rho u, \psi\right).$$

après intégration on obtient :

$$-\int_0^s (w',\psi')\,dt + \int_0^s a(w,\psi)\,dt = \int_0^s \left(|v|^\rho v - |u|^\rho u, \psi\right) dt,$$

d'où, comme $\psi' = w$ et $\psi(0) = -w_1(s)$ on a :

$$-\int_0^s (w',w)\,dt + \int_0^s a(\psi',\psi)\,dt = \int_0^s \left(|v|^\rho v - |u|^\rho u, \psi\right) dt$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}\int_0^s \frac{d}{dt}(w,w)\,dt + \frac{1}{2}\int_0^s \frac{d}{dt}a(\psi,\psi)\,dt = \int_0^s \left(|v|^\rho v - |u|^\rho u, \psi\right) dt$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}(w,w) + \frac{1}{2}a(\psi,\psi) = \int_0^s \left(|v|^\rho v - |u|^\rho u, \psi\right) dt$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}|w(s)|^2 + \frac{1}{2}a(\psi,\psi) = \int_0^s \left(|v|^\rho v - |u|^\rho u, \psi\right) dt$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}|w(s)|^2 - \frac{1}{2}a(w_1(s), w_1(s)) = \int_0^s \left(|v|^\rho v - |u|^\rho u, \psi\right) dt$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}|w(s)|^2 - \frac{1}{2}\|w_1(s)\|^2 = \int_0^s \left(|v|^\rho v - |u|^\rho u, \psi\right) dt,$$

d'où (comparer à (2-45), (2-46)) :

$$\frac{1}{2}|w(s)|^2 + \frac{1}{2}\|w_1(s)\|^2 \leq \int_0^s \left(\||u|^\rho\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)} + \||v|^\rho\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)}\right) \|w(t)\|\,|w'(t)|\,dt$$

$$\leq \int_0^s \left[\left(\||u|^\rho\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)} + \||v|^\rho\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)}\right) \|w(t)\|_{\mathbf{L}^q(\Omega)} \left(\int_t^s |w'(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}\right] dt$$

$$\leq \int_0^s \left[\left(\||u|^\rho\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)} + \||v|^\rho\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)}\right) \|w(t)\|_{\mathbf{L}^q(\Omega)} \times \left||w_1(s)|^2 - |w_1(t)|^2\right|^{\frac{1}{2}}\right] dt$$

$$\leq \int_0^s \left[\left(\||u|^\rho\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)} + \||v|^\rho\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)}\right) \|w(t)\|_{\mathbf{L}^q(\Omega)} \times \left(\|w_1(s)\|_{\mathbf{L}^q(\Omega)} + \|w_1(t)\|_{\mathbf{L}^q(\Omega)}\right)\right] dt$$

$$\leq c_1 \int_0^s \left[|w(t)| \left(\|w_1(t)\| + \|w_1(s)\| \right) \right] dt$$

$$\leq \frac{1}{4} \|w_1(s)\|^2 + c_2 \int_0^s \left(|w(t)|^2 + \|w_1(t)\|^2 \right) dt$$

et donc

$$|w(s)|^2 + \|w_1(s)\|^2 \leq c_3 \int_0^s \left(|w(t)|^2 + \|w_1(t)\|^2 \right) dt.$$

D'où le résultat. ■

2.4 Régularité de la solution

On va démontrer le résultat suivant :

Théorème 2.4.1

On se place dans les conditions du théorème 2.2.1 avec en outre

$$\frac{\partial f}{\partial t} \in \mathbf{L}^2(Q), \tag{2.48}$$

$$u_0 \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{H}^2(\Omega), u_1 \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \tag{2.49}$$

$$\rho \leq \frac{2}{n-2} \quad (\ \rho \ \ fini\ quelconque\ si\ n = 2\ )\ \ (condition\ \ (2-39)), \tag{2.50}$$

il existe alors une solution et une seule du systéme $(2-12)$, $(2-13)$ *et* $(2-14)$ *vérifiant :*

$$u \in \mathbf{L}^\infty\left(0, T\ ;\ \mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{H}^2(\Omega)\right), \tag{2.51}$$

$$u' \in \mathbf{L}^\infty\left(0, T\ ;\ \mathbf{H}_0^1(\Omega)\right), \tag{2.52}$$

$$u'' \in \mathbf{L}^\infty\left(0, T\ ;\ \mathbf{L}^2(\Omega)\right), \tag{2.53}$$

Remarque 2.4.2

D'aprés le théorème de polongement de Sobolev si $\upsilon \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ *on a :*
$|\upsilon|^{\rho}\upsilon \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ *si* $(2-50)$ *a lieu et on voit aussi sans peine que si* $u \in \mathbf{L}^{\infty}(0,T\ ;\ \mathbf{H}_0^1(\Omega))$,

alors

$$u \in \mathbf{L}^{\infty}(0,T\ ;\ \mathbf{L}^{p}(\Omega)),\ (\ p=\rho+2),$$

de sorte que le théorème 2.4.1 redonne bien en particulier les informations données par le théorème 2.2.1.

Preuve.

Existence :

On part des solutions approchées u_m fournies par $(2-20)$, $(2-22)$, $(2-23)$, avec cette fois pour w_j une «base» de l'espace
$\mathbf{H}_0^1(\Omega)\cap\mathbf{H}^2(\Omega)$ on suppose que :

$$u_{0m} \longrightarrow u_0 \quad dans\ \mathbf{H}_0^1(\Omega)\cap\mathbf{H}^2(\Omega) \tag{2.54}$$

$$u_{1m} \longrightarrow u_1 \quad dans\ \mathbf{H}_0^1(\Omega). \tag{2.55}$$

On va établir (*étape* (i)) une estimation a priori supplémentaire qui montrera l'existence d'une solution avec $(2-52)$, $(2-53)$, puis l'on montrera $(2-51)$ dans *l'étape* (ii) par utilisation de l'équation $(2-12)$.

Etape (i) :

On déduit de $(2-20)$ que :

$$(u''_m(0), w_j) = (f(0)+\Delta u_{0m} - |u_{0m}|^{\rho}u_{0m}, w_j), \quad 1\le j\le m. \tag{2.56}$$

Noter que d'après $(2-48)$ et le *lemme* 2.1.4, $f(0)\in\mathbf{L}^2(\Omega)$; d'après $(2-54)$,
$|\Delta u_{0m}| \le$ constante et d'après $(2-50)$ $|u_{0m}|^{\rho}u_{0m}$ demeure dans un borné de $\mathbf{L}^2(\Omega)$.

On déduit donc de $(2-56)$ en multipliant par $g''_{jm}(0)$ et sommant sur j :

$$|u''_m(0)|^2 \le (|f(0)| + |\Delta u_{0m}| + ||u_{0m}|^{\rho}u_{0m}|)\,|u''_m(0)|.$$

D'où
$$|u''_m(0)| \leq c. \tag{2.57}$$
Dérivant $(2-20)$ en t ce qui loisible il vient alors :

$$\begin{cases} (u'''_m(t), w_j) + a(u'_m(t), w_j) + \left(\rho\,|u_m(t)|^{\rho-1}\, sign\ u_m(t)\,\dfrac{du}{dt} + |u_m(t)|^{\rho}\,\dfrac{du}{dt}, w_j\right) = \\ \qquad = (f'(t), w_j) \qquad 1 \leq j \leq m. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (u'''_m(t), w_j) + a(u'_m(t), w_j) + \left(\rho\,|u_m(t)|^{\rho}\,\dfrac{du}{dt} + |u_m(t)|^{\rho}\,\dfrac{du}{dt}, w_j\right) = (f'(t), w_j) \\ \qquad 1 \leq j \leq m. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (u'''_m(t), w_j) + a(u'_m(t), w_j) + (\rho+1)(|u_m(t)|^{\rho}\, u'_m(t), w_j) = (f'(t), w_j) \\ \qquad 1 \leq j \leq m. \end{cases} \tag{2.58}$$

On multiplie $(2-58)$ par $g''_{jm}(t)$ et en sommant sur j, il vient :

$$\{(u'''_m(t), u''_m(t)) + a(u'_m(t), u''_m(t)) + (\rho+1)(|u_m(t)|^{\rho}\, u'_m(t), u''_m(t)) = (f'(t), u''_m(t))$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}((u''_m(t), u''_m(t)) + a(u'_m(t), u'_m(t))) + (\rho+1)(|u_m(t)|^{\rho}\, u'_m(t), u''_m(t)) = \\ \qquad = (f'(t), u''_m(t)) \end{cases}$$

$$\left\{\dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}\, |u''_m(t)|^2 + \|u'_m(t)\|^2) + (\rho+1)(|u_m(t)|^{\rho}\, u'_m(t), u''_m(t)) = (f'(t), u''_m(t))\right.$$

$$\left\{\dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}(|u''_m(t)|^2 + \|u'_m(t)\|^2) = (f'(t), u''_m(t)) - (\rho+1)(|u_m(t)|^{\rho}\, u'_m(t), u''_m(t)),\right. \tag{2.59}$$

mais d'après l'inégalité de Holder on a :

$$|(|u_m(t)|^{\rho}\, u'_m(t), u''_m(t))| \leq \||u_m(t)|^{\rho}\|_{\mathbf{L}^q(\Omega)}\, \|u'_m(t)\|_{\mathbf{L}^q(\Omega)}\, \|u''_m(t)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \tag{2.60}$$

où q est donné par
$$\frac{1}{n} + \frac{1}{q} + \frac{1}{2} = 1$$

comme d'après $(2-17)$ $\rho n \leq q$, on a :

$$\left\| |u_m(t)|^\rho \right\|_{\mathbf{L}^q(\Omega)} \leq \|u_m(t)\|^\rho \leq \text{constante}, \quad \text{d'aprés } (2-30).$$

De sorte que $(2-60)$ donne :

$$|(|u_m(t)|^\rho u'_m(t), u''_m(t))| \leq c \|u'_m(t)\| |u''_m(t)|, \tag{2.61}$$

et $(2-59)$ donne alors :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(|u''_m(t)|^2 + \|u'_m(t)\|^2) \leq |f'(t)| |u'_m(t)| + c \|u'_m(t)\| |u''_m(t)| \tag{2.62}$$

d'où en utilisant $(2-55)$ et $(2-57)$ on aura :

$$|u''_m(t)|^2 + \|u'_m(t)\|^2 \leq c(1 + \int_0^t (|u''_m(\sigma)|^2 + \|u'_m(\sigma)\|^2) d\sigma). \tag{2.63}$$

$$\begin{cases} u'_m \text{ demeure dans un borné de } \mathbf{L}^\infty(0,T\ ;\ \mathbf{H}_0^1(\Omega)). \\ u''_m \text{ demeure dans un borné de } \mathbf{L}^\infty(0,T\ ;\ \mathbf{L}^2(\Omega)). \end{cases} \tag{2.64}$$

Alors on peut extraire une sous-suite u_μ, comme dans la démonstration du théorème 2.2.1, et telle que en outre u vérifie $(2-52)$, $(2-53)$.

On a donc démontré le théorème sous réserve de vérifie l'information non encore en notre possession de $(2-51)$ à savoir que :

$$u \in \mathbf{L}^\infty\left(0,T\ ;\ \mathbf{H}^2(\Omega)\right) \tag{2.65}$$

Etape (ii) : Démonstration de $(2-65)$

On déduit de $(2-12)$ que

$$\Delta u = u'' + |u|^\rho u - f \tag{2.66}$$

mais d'après $(2-7)$ et $(2-48)$ $f \in \mathbf{L}^\infty(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$ de sorte que avec $(2-53)$ on déduit de $(2-66)$ que

$$\Delta u \in \mathbf{L}^\infty\left(0,T\ ;\ \mathbf{L}^2(\Omega)\right), \tag{2.67}$$

posons

$$\Delta u = h, \tag{2.68}$$

Δ est un isomorphisme de $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ sur $\mathbf{H}^{-1}(\Omega)$ (pour plus de détails concernant cet isomorphisme voir [2] , [9]) soit G son inverse alors (comme $u \in \mathbf{L}^\infty(0,T\ ;\ \mathbf{H}_0^1(\Omega))$ on a :

$$u(t) = Gh(t) \quad \text{p.p.} \tag{2.69}$$

Mais d'après les théorèmes de régularité des solutions des équations linéaires elliptiques on a :

$$G \in \mathcal{L}\left(\mathbf{L}^2(\Omega);\mathbf{H}^2(\Omega)\right) \tag{2.70}$$

et $(2-65)$ résulte de $(2-69)$ et $(2-70)$.

Unicité :

On raisonne comme dans la démonstration du théorème 2.3.1 on arrive à :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(|w'(t)|^2 + \|w(t)\|^2) \quad &\leq \quad c(\||u(t)|^\rho\|_{\mathbf{L}^q(\Omega)} + \||u(t)|^\rho\|_{\mathbf{L}^q(\Omega)}) \times \\ &\times \|w(t)\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega)} \|W'(t)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\end{aligned}$$

et comme

$$\||u(t)|^\rho\|_{\mathbf{L}^q(\Omega)} + \||\upsilon(t)|^\rho\|_{\mathbf{L}^q(\Omega)} \leq c \ \ (car\ \rho n \leq q),$$

on a :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(|w'(t)|^2 + \|w(t)\|^2) \leq c\|w(t)\|\,|w'(t)|$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int_0^t \frac{d}{dt}\left(|w'(\sigma)|^2 + \|w(\sigma)\|^2\right)d\sigma \leq c\int_0^t \|w(\sigma)\|\,|w'(\sigma)|\,d\sigma$$

$$\Rightarrow |w'(t)|^2 + \|w(t)\|^2 \leq c\int_0^t \left(\frac{1}{2}\|w(\sigma)\|^2 + \frac{1}{2}|w'(\sigma)|^2\right)d\sigma$$

$$\Rightarrow |w'(t)|^2 + \|w(t)\|^2 \leq \frac{c}{2}\int_0^t \left(\|w(\sigma)\|^2 + |w'(\sigma)|^2\right)d\sigma,$$

et d'après le lemme de Gronwall nous avons alors $\|w(t)\|^2 = 0$, alors $w(t) = 0$ pour presque tout $t \in]0,T[$ dans $L^2(\Omega)$.

Ceci veut dire que $u = \upsilon$ donc la solution quand elle existe est unique. ∎

2.5 Un autre résultat de régularité

On va démontrer un résultat du même type que celui du résultat de régularité précédent mais sous des hypothèses différentes sur f et une méthode utilisant une "base spéciale" de fonctions w_j.

Théorème 2.5.1

On suppose que $n = 3$ et $\rho = 2$. On donne f avec

$$f \in \mathbf{L}^2\left(0, T\ ;\ \mathbf{H}_0^1(\Omega)\right). \tag{2.71}$$

Les hypothèses sur u_0 et $u_1$étant celles du théorème 2.4.1. Il existe alors une fonction u et une seule, de (2-12), (2-13), (2-14) et vérifiant (2-51), (2-52) et (au lieu de (2-53) :

$$u'' \in \mathbf{L}^2\left(0, T\ ;\ \mathbf{L}^2(\Omega)\right) = \mathbf{L}^2(Q). \tag{2.72}$$

Remarque 2.5.2

On obtient (2-53) si $f \in \mathbf{L}^\infty(0, T\ ;\ \mathbf{L}^2(\Omega))$.

Preuve.

D'après le théorème 2.3.1 nous n'avons pas à nous préoccuper que l'existence. Comme toujours, il s'agit d'obtenir une estimation a priori de plus.

On va opérer en deux étapes :

(i) On montre d'abord comment, u étant supposée solution régulière du problème, on peut obtenir une inégalité a priori.

(ii) On verra ensuite comment on peut - par un choix convenable de la "base" $\{w_j\}$ dans la méthode de Faedo-Galerkin - obtenir effectivement une estimation a priori de plus.

Etape (i) :

Soit donc u supposée assez régulière et vérifiant (2-12), (2-13), (2-14) et $u=0$ sur Σ. On multiple (2-20) par $-\triangle u'$. Il vient (on rappelle que $\rho=2$) :

$$\left(u'', -\triangle u\right) - \left(\triangle u, -\triangle u'\right) + \left(|u|^2 u, -\triangle u'\right) = \left(f, -\triangle u'\right)$$

$$\Rightarrow -\left(u'', \triangle u\right) + \left(\triangle u, \triangle u'\right) - \left(|u|^2 u, \triangle u'\right) = -\left(f, \triangle u'\right)$$

$$\Rightarrow a\left(u'', u'\right) + \left(\triangle u, \triangle u'\right) - \left(u^3, \triangle u'\right) = a\left(f, u'\right)$$

$$\Rightarrow a\left(u'', u'\right) + \left(\triangle u, \triangle u'\right) + a\left(u^3, u'\right) = a\left(f, u'\right)$$

$$\Rightarrow a\left(u'', u'\right) + \left(\triangle u, \triangle u'\right) + \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u^3\right) \frac{\partial u'}{\partial x_i} dx = a\left(f, u'\right) \tag{2.73}$$

D'où

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} a\left(u', u'\right) + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\triangle u, \triangle u\right) + \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u^3\right) \frac{\partial u'}{\partial x_i} dx = a\left(f, u'\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|u'(t)\right\|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|\triangle u(t)\right|^2 + \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u^3\right) \frac{\partial u'}{\partial x_i} dx = a\left(f, u'\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\left\|u'(t)\right\|^2 + \left|\triangle u(t)\right|^2\right) + \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u^3\right) \frac{\partial u'}{\partial x_i} dx = a\left(f, u'\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\left\|u'(t)\right\|^2 + \left|\triangle u(t)\right|^2\right) \leq \left\|f(t)\right\| \left\|u'(t)\right\| + \left|\sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u^3\right) \frac{\partial u'}{\partial x_i} dx\right| \tag{2.74}$$

Mais

$$\left|\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u^3\right) \frac{\partial u'}{\partial x_i} dx\right| \leq 3 \left|\frac{\partial u'}{\partial x_i}\right|_{\mathbf{L}^p(\Omega)} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|_{\mathbf{L}^q(\Omega)} \|u\|_{L^p(\Omega)}^2 ,$$

et comme $n=3$; on a $q=6$ et donc

$$\left|\int_{\Omega}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(u^3\right)\frac{\partial u'}{\partial x_i}dx\right|\leq c\left\|u'(t)\right\|\left\|u(t)\right\|_{\mathbf{H}^2(\Omega)}\left\|u(t)\right\|^2. \tag{2.75}$$

Mais d'après (2-70)

$$\left\|u(t)\right\|_{H^2(\Omega)}\leq\left|\triangle u(t)\right|$$

et on sait déjà que $\|u(t)\|\leq$ constante, donc portant (2-75) dans (2-74) il vient :

$$\frac{d}{dt}\left(\left\|u'(t)\right\|^2+\left|\triangle u(t)\right|^2\right)\leq\left\|f(t)\right\|\left\|u'(t)\right\|+c\left\|u'(t)\right\|\left|\triangle u(t)\right|,$$

d'où

$$\int_0^t\frac{d}{dt}\left(\left\|u'(t)\right\|^2+\left|\triangle u(t)\right|^2\right)\leq\int_0^t\left\|f(t)\right\|\left\|u'(t)\right\|+c\int_0^t\left\|u'(t)\right\|\left|\triangle u(t)\right|$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\ &\left\|u'(t)\right\|^2-\left\|u'(0)\right\|^2+\left|\triangle u(t)\right|^2-\left|\triangle u(0)\right|^2\leq\\ \leq\ &\frac{1}{2}\int_0^t\left[\left\|f(\sigma)\right\|^2+\left\|u'(\sigma)\right\|^2\right]d\sigma+\frac{c}{2}\int_0^t\left[\left\|u'(\sigma)\right\|^2+\left|\triangle u(\sigma)\right|^2\right]d\sigma\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\ &\left\|u'(t)\right\|^2+\left|\triangle u(t)\right|^2\leq\\ \leq\ &\left\|u_1\right\|^2+\left|\triangle u_0\right|^2+\frac{1}{2}\int_0^t\left\|f(\sigma)\right\|^2d\sigma+\frac{1}{2}\int_0^t\left\|u'(\sigma)\right\|^2d\sigma+\\ &+\frac{1}{2}\int_0^t\left\|u'(\sigma)\right\|^2d\sigma+\frac{1}{2}\int_0^t\left|\triangle u(\sigma)\right|^2d\sigma\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\left\|u'(t)\right\|^2+\left|\triangle u(t)\right|^2\leq\left\|u_1\right\|^2+\left|\triangle u_0\right|^2+c\int_0^t\left\|f(\sigma)\right\|^2d\sigma+c\int_0^t\left(\left\|u'(\sigma)\right\|^2+\left|\triangle u(\sigma)\right|^2\right)d\sigma$$

D'où

$$\left\|u'(t)\right\|^2+\left|\triangle u(t)\right|^2\leq c\left(\left\|u_1\right\|^2+\left|\triangle u_0\right|^2+\int_0^t\left\|f(\sigma)\right\|^2d\sigma\right) \tag{2.76}$$

Etape (ii) :

Le problème est maintenant de pouvoir utiliser (2-76). Il n'est pas commode de pouvoir "reproduire" sur (2-20) l'opérateur (fondamental dans l'étape (i)) de multiplication par $-\triangle u$ sauf si :

$$-\triangle w_j = \lambda_j w_j, \quad (j = 1, ...), w_j = 0 \text{ sur } \Gamma. \tag{2.77}$$

On choisit donc pour w_j les fonctions propres définies en (2-77) qui sont, en particulier, dans $H^2(\Omega)$ (voir [4] les pages 315- 317 et [3] les pages 181- 182).

On peut appliquer les résultats de la démonstration du théorème 2.2.1.

On va démontrer que, lorsque les w_j sont choisis par (2-77), on a

$$\|u'_m(t)\|^2 + |\triangle u_m(t)|^2 \leq \text{constante}. \tag{2.78}$$

En effet, remplaçant w_j par $\dfrac{-1}{\lambda_j}\triangle w_j$ dans (2-20), on en déduit

$$\left\{ \begin{array}{c} (u''_m(t), -\triangle w_j) + (\triangle u_m(t), \triangle w_j) + \left(u_m(t)^3, -\triangle w_j\right) = (f(t), -\triangle w_j), \\ 1 \leq j \leq m. \end{array} \right. \tag{2.79}$$

On multiplie la j-ème équation (2-79) par $g'_{jm}(t)$ et on somme sur j, il vient :

$$\left\{ \begin{array}{c} a(u''_m(t), u'_m(t)) + (\triangle u_m(t), \triangle u'_m(t)) + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial (u_m^3)}{\partial x_i} \frac{\partial u'_m}{\partial x_i} dx = \\ = a(f(t), u'_m(t)), \end{array} \right. \tag{2.80}$$

ce qui n'est autre que (2-73) pour le cas particulier des fonctions u_m à valeurs dans l'espace engendré par $w_1, ..., w_m$.

Donc les calculs fait à l'étape (i) sont valables et donnent l'analogue de (2-76), i.e (2-78) (en ayant pris soin de prendre u_{0m} et u_{1m} vérifiant (2-54), (2-55)).

Utilisant (2-78) comme on l'a fait pour (2-64), on en déduit l'existence de u vérifiant (2-51) et (2-52).

D'après (2-12) on a :

$$u'' = \triangle u - |u|^\rho u + f,$$

d'où (2-72). ■

2.6 Inégalité et égalité de l'énergie

On va démontrer les résultats suivants :

Théorème 2.6.1 *(Inégalité de l'énergie)*

Sous les hypothèses du théorème 2.2.1 on a :

$$J\left(u\left(t\right),u'\left(t\right)\right)\leq J\left(u_0,u_1\right)+\int_0^1((f(\sigma),u'\left(\sigma\right))d\sigma,\ \ p.p\ en\ t, \tag{2.81}$$

où

$$J\left(\varphi,\psi\right)=\frac{1}{2}a\left(\varphi,\psi\right)+\frac{1}{p}\int_\Omega\left|\varphi\left(x\right)\right|^p dx+\frac{1}{2}\left|\psi\right|^2. \tag{2.82}$$

Preuve.

On déduit de $(2-26)$ que

$$J\left(u_m\left(t\right),u'_m\left(t\right)\right)=J\left(u_{0m},u_{1m}\right)+\int_0^1((f(\sigma),u'_m\left(\sigma\right))d\sigma, \tag{2.83}$$

on utilise $(2-83)$ avec $m=\mu$ suite extraite telle que $(2-31),(2-32),(2-34)$ et $(2-35)$ aient lieu.

Soit θ une fonction de $C^0([0,T]),\ \theta\geq 0$, on déduit de $(2-83)$

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^T J\left(u_\mu\left(t\right),u'_\mu\left(t\right)\right)\theta\left(t\right)dt=\int_0^T J\left(u_{0\mu},u_{1\mu}\right)\theta\left(t\right)dt+ \\ \displaystyle\qquad +\int_0^T\theta\left(t\right)dt\int_0^t((f(\sigma),u'_\mu\left(\sigma\right))d\sigma, \end{cases} \tag{2.84}$$

Le deuxième membre tend vers

$$\int_0^T J\left(u_0,u_1\right)\theta\left(t\right)dt=\int_0^T\theta\left(t\right)dt\int_0^t((f(\sigma),u'\left(\sigma\right))d\sigma.$$

le premier membre s'écrit encore

$$X_\mu^\theta=\frac{1}{2}\int_0^T\left\|u_\mu\left(t\right)\right\|^2\theta\left(t\right)dt+\frac{1}{2}\int_0^T\left|u'_\mu\left(t\right)\right|^2\theta\left(t\right)dt+\frac{1}{p}\int_0^T\left\|u_m\left(t\right)\right\|^p_{\mathbf{L}^q(\Omega)}\theta\left(t\right)dt \tag{2.85}$$

et chaque expression dans $(2-85)$ est semi-continue inférieurement pour la topologie faible pour u_μ dans $\mathbf{L}^2\left(0,T;\mathbf{H}_0^1(\Omega)\right)$, u'_μ dans $\mathbf{L}^2\left(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)\right)$ et u_μ dans $\mathbf{L}^p\left(0,T;\mathbf{L}^p(\Omega)\right)$

donc :

$$\left\{\begin{array}{c} \lim_{\mu\longrightarrow\infty}\inf X_\mu^\theta \geq \\ \geq \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^T \|u_\mu(t)\|^2\theta(t)\,dt + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^T \left|u'_\mu(t)\right|^2\theta(t)\,dt + \dfrac{1}{p}\displaystyle\int_0^T \|u_m(t)\|^\rho_{\mathbf{L}^q(\Omega)}\theta(t)\,dt = \\ = \displaystyle\int_0^T J\left(u_\mu(t),u'_\mu(t)\right)\theta(t)\,dt. \end{array}\right.$$

On déduit alors de $(2-84)$ que

$$\int_0^T J\left(u(t),u'(t)\right)\theta(t)\,dt \leq \int_0^T J\left(u_0,u_1\right)\theta(t)\,dt + \int_0^T \theta(t)\,dt\int_0^t ((f(\sigma),u'(\sigma))d\sigma$$

et cela pour tout fonction $\theta \geq 0$ d'où$(2-81)$. ■

Théorème 2.6.2 *(égalité de l'énergie)*

Sous les hypothèses du théorème 2.3.1 on a :

$$J\left(u(t),u'(t)\right) = J\left(u_0,u_1\right) + \int_0^t \left(f(\sigma),u'(\sigma)\right)d\sigma, \qquad p.p\ en\ \ t. \tag{2.86}$$

Avant de passer à la démonstration du théorème, notons le résultat complémentaire suivant :

$$\left\{\begin{array}{c} \text{Sous les hypothèses du théorème 2.2.1, on peut trouver une solution } u \text{ telle que} \\ t\rightarrow u(t)\ \ (\text{resp.}t\rightarrow u'(t)\ )\text{ soit continue de }\ [0,T]\rightarrow \mathbf{H}_0^1(\Omega)\cap\mathbf{L}^p(\Omega) \\ \text{faible (resp. de }\ [0,T]\rightarrow\mathbf{L}^2(\Omega)\ \text{ faible).} \end{array}\right. \tag{2.87}$$

En effet d'après (2-10), (2-11) u est continue de $[0,T]\rightarrow\mathbf{L}^2(\Omega)$,
et dans $\mathbf{L}^\infty\left(0,T;\mathbf{H}_0^1(\Omega)\cap\mathbf{L}^p(\Omega)\right)$ donc u est continue de $[0,T]\rightarrow\mathbf{H}_0^1(\Omega)\cap\mathbf{L}^p(\Omega)$.

Démonstration analogue pour u'.

Preuve.

Soient $0 < s < t < T$; soit θ_n la fonction continue linéaire par morceaux, ègale à 1 sur $[s,t]$ et à 0 pour $\sigma < s - \dfrac{1}{n}$ et $\sigma > t + \dfrac{1}{n}$;

soit η_k une suite régularisante de fonctions $\mathbf{C}^\infty$, paires, à support dans $\left[-\dfrac{1}{k}, \dfrac{1}{k}\right]$.

On multiplie les deux membres de (2-12) par :

$$\theta_n\left((\theta_n u') \star \eta_k * \eta_k\right) = \varphi_{kn}, \tag{2.88}$$

où les $*$ désignent la convolution en t .

On note que

$$\varphi_{kn} = \theta_n\left((\theta_n u)' \star \eta_k * \eta_k\right) - \theta_n\left((\theta_n' u) \star \eta_k * \eta_k\right), \tag{2.89}$$

ce qui permet de justifier les intégration par parties ci-après. On obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} \int\limits_0^T \left(\theta_n u'', \;\; ((\theta_n u') \star \eta_k * \eta_k)\right) dt + \int\limits_0^T a\left(\theta_n u, \;\; ((\theta_n u') \star \eta_k * \eta_k)\right) dt + \\ + \int\limits_0^T \int\limits_\Omega |u|^\rho u \theta_n \left((\theta_n u') \star \eta_k * \eta_k\right) dx dt = \int\limits_0^T \theta_n\left(f, \;\; (\theta_n u') \star \eta_k * \eta_k\right) dt. \end{array}\right. \tag{2.90}$$

On a :

$$(\theta_n u')' = \theta_n u'' + \theta_n' u' \Rightarrow \theta_n u'' = (\theta_n u')' - \theta_n' u'$$

donc :

$$\left\{\begin{array}{l} \int\limits_0^T \left(\theta_n u'', \;\; ((\theta_n u') \star \eta_k * \eta_k)\right) dt = \int\limits_0^T \left((\theta_n u')' - \theta_n' u', \;\; ((\theta_n u') \star \eta_k * \eta_k)\right) dt = \\ \qquad = \int\limits_0^T \left((\theta_n u')', \;\; (\theta_n u') \star \eta_k * \eta_k\right) dt - \int\limits_0^T \left(\theta_n' u', \;\; (\theta_n u') \star \eta_k * \eta_k\right) dt \end{array}\right. \tag{2.91}$$

La première intégrale dans le deuxième membre de (2-91) s'écrit :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left((\theta_n u')' , \ (\theta_n u') \star \eta_k * \eta_k\right) dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left((\theta_n u')' (t) , \ \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} (\theta_n u') (s) \, \eta_k (t-s) \, ds \right] \eta_k (t-s) \, ds \right) dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left((\theta_n u')' (t) , \ \left[\int_{-\infty}^{+\infty} (\theta_n u') (s) \, \eta_k (t-s) \, ds \right] \eta_k (t-s) \right) dsdt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left((\theta_n u')' (t) \, \eta_k (t-s) , \ \left[\int_{-\infty}^{+\infty} (\theta_n u') (s) \, \eta_k (t-s) \, ds \right] \right) dsdt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (\theta_n u')' (t) \, \eta_k (t-s) \, dt, \ \left[\int_{-\infty}^{+\infty} (\theta_n u') (s) \, \eta_k (t-s) \, ds \right] \right) ds$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (\theta_n u')' (t) \, \eta_k (s-t) \, dt, \ \left[\int_{-\infty}^{+\infty} (\theta_n u') (s) \, \eta_k (t-s) \, ds \right] \right) ds$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left((\theta_n u')' * \eta_k, (\theta_n u') * \eta_k\right) ds.$$

Même chose pour la deuxième intégrale de (2-91) :

$$\int_0^T (\theta'_n u',\ (\theta_n u') \star \eta_k * \eta_k)\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left((\theta'_n u')(t)\,,\ \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} (\theta_n u')(s)\, \eta_k(t-s)\, ds \right] \eta_k(t-s)\, ds \right) dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left((\theta'_n u')(t)\,,\ \left[\int_{-\infty}^{+\infty} (\theta_n u')(s)\, \eta_k(t-s)\, ds \right] \eta_k(t-s) \right) dsdt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left((\theta'_n u')(t)\, \eta_k(t-s)\,,\ \left[\int_{-\infty}^{+\infty} (\theta_n u')(s)\, \eta_k(t-s)\, ds \right] \right) dsdt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (\theta'_n u')(t)\, \eta_k(t-s)\, dt,\ \left[\int_{-\infty}^{+\infty} (\theta_n u')(s)\, \eta_k(t-s)\, ds \right] \right) ds$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (\theta'_n u')(t)\, \eta_k(s-t)\, dt,\ \left[\int_{-\infty}^{+\infty} (\theta_n u')(s)\, \eta_k(t-s)\, ds \right] \right) ds$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} ((\theta'_n u') * \eta_k, (\theta_n u') * \eta_k)\, ds,$$

donc la première intégrale dans $(2-90)$ s'écrit :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^T ((\theta_n u')' \star \eta_k,\ ((\theta_n u') * \eta_k))\, dt - \int_0^T ((\theta'_n u') \star \eta_k,\ ((\theta_n u') * \eta_k))\, dt = \\ \displaystyle\qquad = - \int_0^T ((\theta'_n u') \star \eta_k,\ ((\theta_n u') * \eta_k))\, dt, \end{cases}$$

et lorsque $K \longrightarrow \infty$ cela tend vers

$$-\int_0^T \theta_n \theta_n' \left|u'(t)\right|^2 dt.$$

de même pour la deuxième intégrale de (2-90) on a :

$$(\theta_n u)' = \theta_n u' + \theta_n' u \Rightarrow \theta_n u' = (\theta_n u)' - \theta_n' u$$

donc

$$\left\{\begin{array}{l} \int_0^T a\left(\theta_n u,\ \left((\theta_n u') \star \eta_k * \eta_k\right)\right) dt = \int_0^T a\left(\theta_n u,\ \left(\left[(\theta_n u)' - \theta_n' u\right] \star \eta_k * \eta_k\right)\right) dt = \\ \quad = \int_0^T a\left(\theta_n u,\ \left((\theta_n u)' \star \eta_k * \eta_k\right)\right) dt - \int_0^T a\left(\theta_n u,\ \left(\theta_n' u \star \eta_k * \eta_k\right)\right) dt \end{array}\right. \tag{2.92}$$

la première intégrale dans le deuxième membre de (2-92) s'écrit :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} a\left(\theta_n u,\ \left((\theta_n u)' \star \eta_k * \eta_k\right)\right) dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} a\left((\theta_n u)(t),\ \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} (\theta_n u)'(s)\, \eta_k(t-s)\, ds\right] \eta_k(t-s)\, ds\right) dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} a\left((\theta_n u)(t),\ \left[\int_{-\infty}^{+\infty} (\theta_n u)'(s)\, \eta_k(t-s)\, ds\right] \eta_k(t-s)\right) dsdt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} a\left((\theta_n u)(t)\, \eta_k(t-s),\ \left[\int_{-\infty}^{+\infty} (\theta_n u)'(s)\, \eta_k(t-s)\, ds\right]\right) dsdt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} a\left(\int_{-\infty}^{+\infty} (\theta_n u)(t)\, \eta_k(t-s)\, dt,\ \left[\int_{-\infty}^{+\infty} (\theta_n u)'(s)\, \eta_k(t-s)\, ds\right]\right) ds$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} a\left(\int_{-\infty}^{+\infty} (\theta_n u)(t)\, \eta_k(s-t)\, dt,\ \left[\int_{-\infty}^{+\infty} (\theta_n u)'(s)\, \eta_k(t-s)\, ds\right]\right) ds$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} a\left((\theta_n u) * \eta_k, (\theta_n u)' * \eta_k\right) ds,$$

même chose pour la deuxième intégrale de (2-92) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} a\left(\theta_n u,\ \left((\theta_n' u) \star \eta_k * \eta_k\right)\right) dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} a\left((\theta_n u)(t),\ \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} (\theta_n' u)(s)\, \eta_k(t-s)\, ds\right] \eta_k(t-s)\, ds\right) dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} a\left((\theta_n u)(t),\ \left[\int_{-\infty}^{+\infty} (\theta_n' u)(s)\, \eta_k(t-s)\, ds\right] \eta_k(t-s)\right) dsdt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} a\left((\theta_n u)(t)\, \eta_k(t-s),\ \left[\int_{-\infty}^{+\infty} (\theta_n' u)(s)\, \eta_k(t-s)\, ds\right]\right) dsdt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} a\left(\int_{-\infty}^{+\infty} (\theta_n u)(t)\, \eta_k(t-s)\, dt,\ \left[\int_{-\infty}^{+\infty} (\theta_n' u)(s)\, \eta_k(t-s)\, ds\right]\right) ds$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} a\left(\int_{-\infty}^{+\infty} (\theta_n u)(t)\, \eta_k(s-t)\, dt,\ \left[\int_{-\infty}^{+\infty} (\theta_n' u)(s)\, \eta_k(t-s)\, ds\right]\right) ds$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} a\left((\theta_n u) * \eta_k, (\theta_n' u) * \eta_k\right) ds$$

donc la deuxième intégrale de (2-90) s'écrit :

$$\begin{cases} \int\limits_0^T a\left(\left(\theta_n u\right)\star\eta_k,\ \left(\left(\theta_n u'\right)*\eta_k\right)\right)dt\ -\int\limits_0^T a\left(\left(\theta_n u\right)\star\eta_k,\ \left(\left(\theta_n' u\right)*\eta_k\right)\right)dt = \\ \qquad = -\int\limits_0^T a\left(\left(\theta_n u\right)\star\eta_k,\ \left(\left(\theta_n' u\right)*\eta_k\right)\right)dt \end{cases}$$

et lorsque $k \to \infty$ cela tend vers

$$-\int\limits_0^T \theta_n\theta_n' a\left(u,u\right)dt.$$

On déduit donc de (2-90) que

$$\begin{cases} -\int_0^T \theta_n\theta_n'\left(a\left(u,u\right)+\left|u'\left(t\right)\right|^2\right)dt+\int_0^T\int_\Omega \left|u\right|^\rho\ \ \mathrm{u}u'\theta_n^2 dxdt = \\ \qquad = \int_0^T\int_\Omega \theta_n^2 f u' dxdt, \end{cases} \tag{2.93}$$

grâce au fait que $\left|u\right|^\rho u \in \mathbf{L}^\infty\left(0,T;\mathbf{L}^2\left(\Omega\right)\right)$ d'après la relation (2-50).

Mais si $h \in \mathbf{L}^1\left(0,T\right)$, on a :

$$\begin{cases} -\int_0^T \theta_n\theta_n' h d\sigma = n\int_t^{t+\frac{1}{n}}\left(1-n\left(\sigma-t\right)\right)h\left(\sigma\right)d\sigma - n\int_{s-\frac{1}{n}}^s\left(1+n\left(\sigma-s\right)\right)h\left(\sigma\right)d\sigma \end{cases}$$

et donc, d'après le théorème de Lebesgue :

$$-\int_0^T \theta_n\theta_n' h d\sigma \to \frac{1}{2}h\left(t\right)-\frac{1}{2}h\left(s\right),$$

pour presque tout s et t, lorsque $n \to \infty$.

Donc on déduit de (2-93) :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\left(a\left(u\left(t\right),u\left(t\right)\right)+\left|u'\left(t\right)\right|^2\right)+\int_s^t\int_\Omega \left|u\right|^\rho u\ u' dxdt = \\ = \frac{1}{2}\left(a\left(u\left(s\right),u\left(s\right)\right)+\left|u'\left(s\right)\right|^2\right)+\int_s^t \left(f\left(\sigma\right),u'\left(\sigma\right)\right)d\sigma, \end{cases} \tag{2.94}$$

pour presque tout s et t. Mais on peut intégrer par parties dans

$$\int_s^t \int_\Omega |u|^\rho u\ u' dx d\sigma$$

et donc en déduit de (2-94) que

$$J(u(t), u'(t)) = J(u(s), u'(s)) + \int_s^t (f(\sigma), u'(\sigma))\, d\sigma, \quad p.p \text{ en } s \text{ et } t\ . \tag{2.95}$$

On fait maintenant tendre s vers 0 dans (2-95). D'après (2-87)

$$\liminf_{s\to 0} J(u(s), u'(s)) \geq J(u_0, u_1),$$

et donc (2-95) donne

$$J(u(t), u'(t)) \geq J(u_0, u_1) + \int_0^t (f(\sigma), u'(\sigma))\, d\sigma, \quad p.p \text{ en } t\ .$$

ce qui, joint à (2-81) donne (2-83). ■

2.7 Autre exemple d'équation aux dérivées partielles non linéaires

Pour toutes les considérations précédentes – et sans changer les démonstrations pour l'essentiel – on peut remplacer $-\Delta$ par l'opérateur A défini par :

$$\begin{cases} Au = -\sum_{i,j=1}^n \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_j}\right), \\ a_{ij} \in \mathbf{C}^1\left(\overline{\Omega}\right) \\ a_{ij} = a_{ji}, \\ \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)\,\zeta_i\zeta_j \geq \alpha\left(\zeta_1^2 + \cdots + \zeta_n^2\right), \alpha > 0, \zeta_i \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

2.7.1 Existence d'une solution

Donc on donne le théorème d'existence d'une solution

Théorème 2.7.1

On suppose que Ω *est un ouvert borné et on donne* $f,\ u_0,\ u_1$ *avec*

$$f \in \mathbf{L}^2(Q) \tag{2.96}$$

$$u_0 \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{L}^p(\Omega),\ p = \rho + 2 \tag{2.97}$$

$$u_1 \in \mathbf{L}^2(\Omega), \tag{2.98}$$

il existe alors une fonction u vérifiant :

$$u \in \mathbf{L}^\infty\left(0, T\ ;\ \mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{L}^p(\Omega)\right), \tag{2.99}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in \mathbf{L}^\infty\left(0, T\ ;\ \mathbf{L}^2(\Omega)\right), \tag{2.100}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Au + |u|^\rho u = f \qquad dans \quad Q \tag{2.101}$$

$$u(0) = u_0, \tag{2.102}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0) = u_1 \tag{2.103}$$

Remarque 2.7.2

De (2-99), (2-100) et du lemme 2.1.4 il résulte en particulier que u est continue de $[0, T] \to \mathbf{L}^2(\Omega)$ *de sorte que (2-102) a un sens.*

pour vérifier que $(2-103)$ *a un sens on doit utiliser l'équation* $(2-101)$

qui s'écrit :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f \quad - Au - |u|^\rho u. \tag{2.104}$$

comme

$$Au \in \mathbf{L}^\infty\left(0, T\ ;\ \mathbf{H}^{-1}(\Omega)\right)$$

et comme $f \longrightarrow |f|^\rho f$ *applique* $\mathbf{L}^p(\Omega) \longrightarrow \mathbf{L}^{p'}(\Omega),\ \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$

on vérifie sans peine que

$$|u|^{\rho}\, u \in \mathbf{L}^{\infty}\left(0, T\ ; \mathbf{L}^{p'}(\Omega)\right)$$

de sorte que $(2-104)$ *entraine :*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \in \mathbf{L}^2\left(0, T\ ;\ \mathbf{L}^2(\Omega)\right) + \mathbf{L}^{\infty}\left(0, T\ ;\ \mathbf{H}^{-1}(\Omega) + \mathbf{L}^{p'}(\Omega)\right), \qquad (2.105)$$

d'où en particulier

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \in \mathbf{L}^2\left(0, T\ ;\ \mathbf{H}^{-1}(\Omega) + \mathbf{L}^{p'}(\Omega)\right) \qquad (2.106)$$

ce qui joint à $(2-100)$ *montre grâce au lemme* 2.1.4 *que* $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ *est continue de* $[0, T] \longrightarrow \mathbf{H}^{-1}(\Omega) + \mathbf{L}^{p'}(\Omega)$, *de sorte que* $(2-103)$ *a un sens.*

D'après la définition (1-4-9) et (2-4), $u = 0$ *sur* Σ *; la condition (2-2) est donc incorporée dans (2-104).*

Preuve.

Le plan de la démonstration est celui du théorème 2.2.1 :

Etape (i) : Solutions « approchées »

une telle suite existe, d'après le lemme 2.1.3.

On cherche alors $u_m = u_m(t)$ solution «approchées» du problème sous la forme

$$u_m(t) = \sum_{i=1}^{n} g_{im}(t)\, w_i.$$

On a :

$$\begin{cases} (u_m''(t), w_j) + (Au_m(t), w_j) + (|u_m(t)|^{\rho}\, u_m(t), w_j) = (f(t), w_j), \\ \qquad 1 \le j \le m \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (u_m''(t), w_j) + \sum\limits_{i,j=1}^{n} \displaystyle\int_{\Omega} \left((a_{ij}(x)) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j}\right) dx + (|u_m(t)|^{\rho}\, u_m(t), w_j) = (f(t), w_j), \\ \qquad 1 \le j \le m \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(u_m''(t), w_j\right) + \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} \left((a_{ij}(x)) \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \dfrac{\partial v}{\partial x_j} \right) dx + \left(|u_m(t)|^\rho u_m(t), w_j \right) = (f(t), w_j), \\ 1 \leq j \leq m \end{cases}$$

les g_{im} étant à déterminer par les conditions :

$$\begin{cases} \left(u_m''(t), w_j\right) + a(u_m(t), w_j) + \left(|u_m(t)|^\rho u_m(t), w_j \right) = (f(t), w_j), \\ 1 \leq j \leq m \end{cases} \tag{2.107}$$

où

$$a(u, v) = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx, \tag{2.108}$$

le système (2-107) d'équations différentielles (ordinaires) non linéaires est à compléter par les conditions initiales :

$$\begin{cases} u_m(0) = u_{0m}, u_{0m} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{im} w_i \longrightarrow u_0 \text{ dans } \mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{L}^p(\Omega) \\ \text{lorsque } m \longrightarrow \infty, \end{cases} \tag{2.109}$$

$$u_m'(0) = u_{1m}, u_{1m} = \sum_{i=1}^{n} \beta_{im} w_i \longrightarrow u_1 \text{ dans } L^2(\Omega) \quad \text{lorsque} \quad m \longrightarrow \infty. \tag{2.110}$$

D'après les résultats généraux sur les systèmes d'équations différentielles, on est assuré de l'existence d'une solution de (2-107), (2-109), (2-110) (noter que $\det(w_i, w_j) \neq 0$ grâce à la linéaire indépendance de $w_1, ..., w_m$) dans un intervalle $[0, t_m]$; les estimations a priori qui suivent montreront que $t_m = T$.

Etape(ii) : On établit sur ces équations approchées des estimations a priori

On a :

$$(Au, u) = a(u, u),$$

et on a aussi :

$$\frac{d}{dt}(Au, u) = \left(\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} (a_{ij}(x)) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx \right)'$$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(Au, u) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \dfrac{\partial u'}{\partial x_i} \dfrac{\partial u}{\partial x_j} dx + \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \dfrac{\partial u'}{\partial x_j} dx \\ = 2 \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \dfrac{\partial u'}{\partial x_j} dx \\ = 2(Au, u') \end{cases}$$

$$(Au, u') = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(Au, u)$$

$$\begin{aligned}\int_\Omega (Au, u')\,dt &= \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{d}{dt}(Au, u)\,dt \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{d}{dt}a(u, u)\,dt \\ &= \frac{1}{2}a(u, u)\end{aligned}$$

On multiplie (2-107) d'indice j par $g'_{jm}(t)$ et l'on somme en j. Il vient :

$$\begin{cases} \left(u''_m(t), \sum_{j=1}^m g'_{jm}(t)\,w_j\right) + a\left(u_m(t), \sum_{j=1}^m g'_{jm}(t)\,w_j\right) + \\ + \left(|u_m(t)|^\rho u_m(t), \sum_{j=1}^m g'_{jm}(t)\,w_j\right) = \left(f, \sum_{j=1}^m g'_{jm}(t)\,w_j\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \{(u''_m(t), u'_m(t)) + a(u_m(t), u'_m(t)) + (|u_m(t)|^\rho u_m(t), u'_m(t)) = (f, u'_m(t))$$

d'où

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(u'_m(t), u'_m(t)) + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}a(u_m(t), u_m(t)) + \frac{1}{p}\frac{d}{dt}\left(\int_\Omega |u_m(x,t)|^p\,dx\right) = \\ = (f(t), u'_m(t)). \end{cases} \tag{2.111}$$

Posons

$$\|u\| = \sqrt{a(u, u)} \quad \left(= \text{norme sur } \mathbf{H}_0^1(\Omega) \text{ équivalente à } \|u\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\right)$$

Il résulte de (2-111)

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u'_m(t)|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|^2 + \frac{1}{p}\frac{d}{dt}\left(\int_\Omega |u_m(x,t)|^p\,dx\right) = \\ = (f(t), u'_m(t)) \end{cases}$$

après intégration on trouve :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\int_0^t \frac{d}{dt}|u'_m(\sigma)|^2\,d\sigma + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{d}{dt}\|u_m(\sigma)\|^2\,d\sigma + \frac{1}{p}\int_0^t \frac{d}{dt}\left(\int_\Omega |u_m(x,t)|^p\,dx\right) = \\ = \int_0^t |f(\sigma)|\,|u'_m(\sigma)|\,d\sigma \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}\left|u_m'(t)\right|^2 - \frac{1}{2}\left|u_m'(0)\right|^2 + \frac{1}{2}\left\|u_m(t)\right\|^2 - \frac{1}{2}\left\|u_m(0)\right\|^2 + \frac{1}{p}\left\|u_m(t)\right\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)}^p = \\ = \int_0^t \left|f(\sigma)\right| \left|u_m'(\sigma)\right| d\sigma \end{cases}$$

donc on aura

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\left(\left|u_m'(t)\right|^2 + \left\|u_m(t)\right\|^2\right) + \frac{1}{p}\left\|u_m(t)\right\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)}^p \leq \\ \leq \frac{1}{2}\left(\left|u_m'(0)\right|^2 + \left\|u_m(0)\right\|^2\right) + \frac{1}{p}\left\|u_m(t)\right\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)}^p + \int_0^t \left|f(\sigma)\right| \left|u_m'(\sigma)\right| d\sigma \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\left|u_m'(t)\right|^2 + \left\|u_m(t)\right\|^2\right) + \frac{1}{p}\left\|u_m(t)\right\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)}^p \leq \\ \leq \frac{1}{2}\left(\left|u_{1m}'\right|^2 + \left\|u_{0m}\right\|^2\right) + \frac{1}{p}\left\|u_m(t)\right\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)}^p + \int_0^t \left|f(\sigma)\right| \left|u_m'(\sigma)\right| d\sigma \end{cases}$$

D'après (2-109), (2-110) le deuxième membre est :

$$\leq c + \int_0^t \left|f(\sigma)\right| \left|u_m'(\sigma)\right| d\sigma.$$

(les c désignent des constantes diverses indépendantes de m), d'où

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\left(\left|u_m'(t)\right|^2 + \left\|u_m(t)\right\|^2\right) + \frac{1}{p}\left\|u_m(t)\right\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)}^p \leq \\ \leq c + \frac{1}{2}\int_0^t \left|f(\sigma)\right|^2 d\sigma + \frac{1}{2}\int_0^t \left|u_m'(\sigma)\right|^2 d\sigma. \end{cases} \tag{2.112}$$

D'après (2-96)

$$\int_0^t \left|f(\sigma)\right|^2 d\sigma \leq \text{constante.}$$

On déduit donc, en particulier, de (2-112), que

$$\left|u_m'(t)\right|^2 \leq c + \int_0^t \left|u_m'(\sigma)\right|^2 d\sigma.$$

D'où résulte que

$$\left|u_m'(t)\right| \leq \text{constante (indèpendente de } m\text{).} \tag{2.113}$$

Reprenant (2-112) on en déduit que

$$\left\|u_m(t)\right\| + \left\|u_m(t)\right\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)} \leq \text{constante (indèpendente de } m\text{).} \tag{2.114}$$

On en déduit que $t_m = T$ et (2-113), (2-114) s'expriment alors :

$$\left\{\begin{array}{c}\text{lorsque } m\to\infty,\ u_m \text{ demeure dans un ensemble bornè de}\\ \mathbf{L}^\infty\left(0,T\ ;\ \mathbf{H}_0^1(\Omega)\cap\mathbf{L}^p(\Omega)\right) \text{ et } u_m' \text{ dans un bornè de } \mathbf{L}^\infty\left(0,T\ ;\ \mathbf{L}^2(\Omega)\right).\end{array}\right.$$

Etape (iii) : Passage à la limite

Le reste de la démonstration se fait de la même manière que dans la démonstration du théorème (2.2.1), pour le problème (2-1) (2-2) (2-3), i.e par $A=-\Delta$. ■

2.7.2 Unicité de la solution

Théorème 2.7.3

On se place dans les hypothèses du théorème 2.2.1 *avec*

$$\rho\leq\frac{2}{n-2}\quad (\rho \text{ fini quelconque si } n=2), \tag{2.115}$$

alors la solution obtenue au théorème 2.2.1 *est unique*

Preuve.

On fait la démonstration dans le cas $n\geq 3$
soient u et v deux solutions au sens du théorème 2.3.1 alors $w=u-v$ vérifie :

$$w''+Aw=|v|^\rho v-|u|^\rho u. \tag{2.116}$$

$$w(0)=0, w'(0)=0$$

$$w\in\mathbf{L}^\infty\left(0,T\ ;\ \mathbf{H}_0^1(\Omega)\cap\mathbf{L}^p(\Omega)\right)$$

$$w'\in\mathbf{L}^\infty\left(0,T\ ;\mathbf{L}^2(\Omega)\right)$$

Formellement tout d'abord, multiplions les deux membres de (2-116) par w' ;
alors-ce qui est correct lorsque les intégrales ci-après ont un sens-on trouve que :

$$(w'',w')+(Aw,w)=\left(|v|^\rho v-|u|^\rho u,w'\right)$$

$$\Rightarrow (w'', w') + a(w, w') = (|v|^{\rho} v - |u|^{\rho} u, w'),$$

où

$$(Aw, w') = a(w, w'),$$

donc

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(w', w') + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}a(w, w) = (|v|^{\rho} v - |u|^{\rho} u, w')$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w'(t)|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w(t)\|^2 = (|v|^{\rho} v - |u|^{\rho} u, w')$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(|w'(t)|^2 + \|w(t)\|^2\right) = \int_{\Omega} (|v|^{\rho} v - |u|^{\rho} u) w' dx.$$

La suite de démonstration se fait de la même manière que le théorème (2.3.1). ■

2.7.3 Régularité de la solution

Théorème 2.7.4

On se place dans les conditions du théorème 2.2.1 avec en outre

$$\frac{\partial f}{\partial t} \in \mathbf{L}^2(Q), \tag{2.117}$$

$$u_0 \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{H}^2(\Omega), u_1 \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \tag{2.118}$$

$$\rho \leq \frac{2}{n-2} \quad (\rho \text{ fini quelconque si } n = 2) \ \ (\text{condition } (2-115)), \tag{2.119}$$

il existe alors une solution et une seule du systéme $(2-101)$, $(2-102)$ *et* $(2-103)$ *vérifiant :*

$$u \in \mathbf{L}^{\infty}\left(0, T; \mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{H}^2(\Omega)\right), \tag{2.120}$$

$$u' \in \mathbf{L}^{\infty}\left(0, T; \mathbf{H}_0^1(\Omega)\right), \tag{2.121}$$

$$u'' \in \mathbf{L}^{\infty}\left(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)\right). \tag{2.122}$$

Preuve.

On suit les mêmes étapes de la démonstration du théorème 2.4.1.
Existence :

On part des solutions approchées u_m fournies par $(2-107)$, $(2-109)$, $(2-110)$, avec cette fois pour w_j une «base» de l'espace $\mathbf{H}_0^1(\Omega)\cap\mathbf{H}^2(\Omega)$ on suppose que :

$$u_{0m}\longrightarrow u_0 \text{ dans } \mathbf{H}_0^1(\Omega)\cap\mathbf{H}^2(\Omega) \tag{2.123}$$

$$u_{1m}\longrightarrow u_1 \text{ dans } \mathbf{H}_0^1(\Omega). \tag{2.124}$$

On va établir (*étape* (i)) une estimation a priori supplémentaire qui montrera l'existence d'une solution avec $(2-121)$, $(2-122)$, puis l'on montrera $(2-120)$ dans *l'étape* (ii) par utilisation de l'équation $(2-101)$.

Etape (i) :
On déduit de $(2-107)$ que

$$(u_m''(0), w_j) = (f(0) - Au_{0m} - |u_{0m}|^\rho u_{0m}, w_j), \quad 1\le j\le m. \tag{2.125}$$

Noter que d'après $(2-117)$ et le *lemme* 2.1.4, $f(0)\in\mathbf{L}^2(\Omega)$; d'après $(2-123)$, $|Au_{0m}|\le$ constante et d'après $(2-119)$ $|u_{0m}|^\rho u_{0m}$ demeure dans un borné de $\mathbf{L}^2(\Omega)$.

On déduit donc de $(2-125)$, en multipliant par $g_{jm}''(0)$ et sommant sur j que :

$$|u_m''(0)|^2 \le (|f(0)| + |Au_{0m}| + ||u_{0m}|^\rho u_{0m}|)\,|u_m''(0)|.$$

D'où

$$|u_m''(0)|\le c. \tag{2.126}$$

Dérivant $(2-107)$ en t, ce qui loisible, il vient alors :

$$\begin{cases} (u_m'''(t), w_j) + a(u_m'(t), w_j) + \left(\rho\,|u_m(t)|^{\rho-1} sign\ u_m(t)\,\dfrac{du}{dt} + |u_m(t)|^\rho\,\dfrac{du}{dt}, w_j\right) = \\ \qquad = (f'(t), w_j) \qquad 1\le j\le m. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (u'''_m(t), w_j) + a(u'_m(t), w_j) + \left(\rho\,|u_m(t)|^\rho \dfrac{du}{dt} + |u_m(t)|^\rho \dfrac{du}{dt}, w_j\right) = (f'(t), w_j) \\ 1 \leq j \leq m. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (u'''_m(t), w_j) + a(u'_m(t), w_j) + (\rho+1)(|u_m(t)|^\rho u'_m(t), w_j) = (f'(t), w_j) \\ 1 \leq j \leq m. \end{cases} \tag{2.127}$$

On multiplie $(2-127)$ par $g''_{jm}(t)$ et en sommant sur j, il vient :

$$\{(u'''_m(t), u''_m(t)) + a(u'_m(t), u''_m(t)) + (\rho+1)(|u_m(t)|^\rho u'_m(t), u''_m(t)) = (f'(t), u''_m(t))$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}((u''_m(t), u''_m(t)) + a(u'_m(t), u'_m(t))) + (\rho+1)(|u_m(t)|^\rho u'_m(t), u''_m(t)) = \\ = (f'(t), u''_m(t)) \end{cases}$$

$$\left\{\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\,|u''_m(t)|^2 + \|u'_m(t)\|^2) + (\rho+1)(|u_m(t)|^\rho u'_m(t), u''_m(t)) = (f'(t), u''_m(t))\right.$$

$$\left\{\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(|u''_m(t)|^2 + \|u'_m(t)\|^2) = (f'(t), u''_m(t)) - (\rho+1)(|u_m(t)|^\rho u'_m(t), u''_m(t)),\right. \tag{2.128}$$

mais d'après l'inégalité de Holder on a :

$$|(|u_m(t)|^\rho u'_m(t), u''_m(t))| \leq \||u_m(t)|^\rho\|_{\mathbf{L}^q(\Omega)} \|u'_m(t)\|_{\mathbf{L}^q(\Omega)} \|u''_m(t)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \tag{2.129}$$

où q est donné par

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{q} + \frac{1}{2} = 1$$

comme d'après $(2-106)$ $\rho n \leq q$, on a :

$$\||u_m(t)|^\rho\|_{\mathbf{L}^q(\Omega)} \leq \|u_m(t)\|^\rho \leq \text{constante, d'aprés } (2-114).$$

De sorte que $(2-129)$ donne

$$|(|u_m(t)|^\rho u'_m(t), u''_m(t))| \leq c\,\|u'_m(t)\|\,|u''_m(t)|, \tag{2.130}$$

et $(2-128)$ donne alors :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(|u''_m(t)|^2 + \|u'_m(t)\|^2) \leq |f'(t)|\,|u'_m(t)| + c\,\|u'_m(t)\|\,|u''_m(t)| \tag{2.131}$$

d'où en utilisant $(2-124)$ et $(2-126)$ on aura :

$$|u''_m(t)|^2 + \|u'_m(t)\|^2 \leq c(1 + \int_0^t (|u''_m(\sigma)|^2 + \|u'_m(\sigma)\|^2)d\sigma). \tag{2.132}$$

$$\begin{cases} u'_m \text{ demeure dans un borné de } \mathbf{L}^\infty(0,T\ ;\mathbf{H}_0^1(\Omega)). \\ u''_m \text{ demeure dans un borné de } \mathbf{L}^\infty(0,T\ ;\mathbf{L}^2(\Omega)). \end{cases} \tag{2.133}$$

Alors on peut extraire une sous-suite u_μ, comme dans la démonstration du théorème 2.2.1 et telle que en outre u vérifie $(2-124)$, $(2-126)$.

On a donc démontré le théorème sous réserve de vérifie l'information non encore en notre possession de $(2-120)$ à savoire que :

$$u \in \mathbf{L}^\infty\left(0,T\ ;\ \mathbf{H}^2(\Omega)\right) \tag{2.134}$$

Etape (ii) : Démonstration de $(2-134)$.

On déduit de $(2-101)$ que

$$Au = -u'' - |u|^\rho u + f \tag{2.135}$$

mais d'après $(2-96)$ et $(2-117)$ $f \in \mathbf{L}^\infty(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$ de sorte que avec $(2-122)$ on déduit de $(2-135)$ que

$$Au \in \mathbf{L}^\infty\left(0,T\ ;\ \mathbf{L}^2(\Omega)\right), \tag{2.136}$$

posons

$$Au = h, \tag{2.137}$$

A est un isomorphisme de $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ sur $\mathbf{H}^{-1}(\Omega)$ (pour plus de détails voir [2] , [9]) soit G son inverse alors (comme $u \in \mathbf{L}^\infty(0,T;\mathbf{H}_0^1(\Omega))$ on a :

$$u(t) = Gh(t) \quad \text{p.p.} \tag{2.138}$$

Mais d'après les théorèmes de régularité des solutions des équations linéaires elliptiques on a :

$$G \in \mathcal{L}\left(\mathbf{L}^2(\Omega);\mathbf{H}^2(\Omega)\right) \tag{2.139}$$

et $(2-134)$ résulte de $(2-138)$ et $(2-140)$.

Unicité :

La suite se fait de la même manière que dans la démonstration du théorème 2.4.1. ■

Conclusion Générale

D'après ce qui précède on voit que par la méthode de compacité on peut résoudre un problème aux limites pour une équation hyperbolique non linéaires où la non linéarité est de type $|u|^{\rho} u$ i.e :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + |u|^{\rho} u = f$$

et même pour une équation plus générale

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Au + |u|^{\rho} u = f \qquad \text{où} \quad Au = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right).$$

On a pu avoir des résultats d'existence et d'unicité et même de régularité pour la solution des problèmes précédents.

Néanmoins il est tout à fait naturel de se poser la question sur l'utilisation de cette méthode pour la résolution d'autres types de problèmes aux limites non linéaires par exemple de type

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Au + g(u) = f \qquad \text{où} \qquad g \text{ est une fonction de } u \text{ non linéaire ;}$$

$$où \quad Au = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right).$$

Bibliographie

[1] Robert A. Adams. John J.F.Fournier, Sobolev Spaces. Elsevier - Pure and Applied Mathematics Series - 2005.

[2] H. Brézis, Analyse fonctionnelle - Dunod- Paris 1999.

[3] H.Brézis, Equations et inéquations non linéaires dans les espaces vectoriels en dualité. Annals Institut Fourier, 18 (1968), 115-175.

[4] Francis Hirsch, Gilles Lacombe. Eléments d'analyse fonctionnelle, Dunod - Paris 1999.

[5] Xavier Gourdon, Analyse, Ellipses-1997 page 371.

[6] J.L.Lions : Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires, Dunod - Paris 1969.

[7] J.L.Lions : Quelques résultats d'existence dans les équations aux dérivées partielles non linéaires. Bull. Soc. Math, F.87 (1959), 245-273.

[8] J.L.Lions, Une remarque sur les problèmes d'évolution non linéaires dans des domaines non cylindrique. Revue Roumaine de Math. Pures et appliquées, 9 (1964), 11-8.

[9] J.L.Lions et E.Magenes, Problèmes aux limites non homogènes et application, Vol. 1 et 2, Dunod - Paris 1968.