الجمهوريـــة الجزائـــريـــة الديمقراطيـــة الشعبيـــة
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليـــــم العالـــي والبحـــث العلمـــي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

N° Ref :……………

Centre Universitaire de MILA

Centre Universitaire De Mila

Institut Des Sciences Et De La Technologie **Département De Mathématiques Et Informatique**

POSITIVITÉ D'UNE SUITE RÉCURRENCE LINÉAIRE DU TROISIÈME ORDRE

Mémoire préparé en vue de l'obtention du diplôme de Licence en Mathématiques

Préparé par :
BOULEBTINA KHAMISSA
GHETOUT RIMA
ZENTOUT SAIDA

Encadré par : ISMAIL KAOUACHE

Filière : ***Mathématiques***

Spécialité: ***Mathématiques Fondamentales***

Année Universitaire :2012/2013

Remerciements

Premièrement, on remercie le bon Dieu qui nous a donné la confiance en nous, la santé, la force et la volonté pour pouvoir terminer ce travail.

J'adresse de chaleureux remerciements à mon encadrant de mémoire: M. Kaouache Smail. C. U. de Mila pour son attention de tout instant sur mes travaux, pour ses conseils avisés et son écoute qui ont été prépondérants pour la bonne réussite de ce mémoire.

Son énergie et sa confiance ont été des éléments moteurs pour moi.

J'ai pris un grand plaisir à travailler avec lui.

Un grand remerciement à mes enseignants de centre universitaire de Mila

Mes remerciements vont aussi à ma famille et mes amis qui, avec cette question récurrente,

« Quand est-ce que tu la soutiens ce mémoire ? », bien qu'angoissante en période fréquente de doutes.

Table des matières

Introduction Générale

Les suites linéaires récurrentes constituent une partie fondamentale de la théorie des nombres pour plusieurs années. En outre, ces suites apparaissent partout en mathématiques et en informatique. Par exemple la théorie des séries entières représentant les fonctions rationnelles ; les nombres générateurs pseudo-aléatoires, les suites automatiques et les automates cellulaires. Les solutions de certaines classes d'équations diophantiennes et de quelques problèmes combinatoires forment des suites linéaires récurrentes. Une grande variétés de séries de puissances, par exemple les fonctions Zeta de variétés algébriques sur des corps finis, les fonctions Zeta dynamiques, les fonctions génératrices provenant de la théorie des groupes, les séries de Hilbert dans une algèbre commutative et les séries de Poincaré sont toutes connues d'être rationnelles dans de nombreux cas. Les coefficients de la série représentante ces fonctions sont des suites linéaires récurrentes, et donc tant de puissants résultats de la présente étude peuvent être appliqués.

Ce mémoire comportedeux chapitres. Il est structuré de la manière suivante :

Dans le premier chapitre, on introduit les éléments nécessaires pour une bonne compréhension du problème qui sera étudié. Nous rappelons quelques principes et résultats fondamentaux de la théorie des suites récurrentes linéaires, notamment le théorème d'existence concernant la solution des suites récurrentes linéaires.

Le deuxième chapitre vise à donner une méthode simple qui permet de résoudre notre problème de positivité..

Signalons en fin que la deuxième partie de ce travail est un article universitaire de Pinthira Tangsupphathawat de l'université de Kasetsart (Nakhonpathom, Thailand).

Chapitre 1

Introduction à la théorie des suites récurrentes linéaires

Dans ce chapitre, on introduit les éléments nécessaires pour une bonne compréhension du problème qui sera étudié. Nous rappelons quelques principes et résultats fondamentaux de la théorie des suites récurrentes linéaires. Pour plus de détails sure ces notions, nous indiquons par exemple le travail (Halava, V., T. Harju, M. Hirvensalo and J. Karhumaki. 2005)

1.1 suite récurrente linéaire

On appelle suite récurrente linéaire toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui satisfait la relation suivante

$$u_n = c_{k-1}u_{n-1} + c_{k-2}u_{n-2} + ... + c_0u_{n-k} \tag{1.1}$$

pour tout $n \geq k$, avec les coefficients fixés $c_j \in \mathbb{Z}$ pour tout $j = 0, ..., k-1$.
On sait que la relation (1.1) est une relation récurrente de dégré k.
Ici on suppose que dans (1.1), $c_0 \neq 0$, car $c_0 = 0$ implique que la relation linéaire (1.1) est de degré $k-1$.
Les éléments $u_0, u_1, ..., u_{k-1}$ de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont appelés des conditions initiales.

Exemple 1.1.1 *La suite de Fibonacci* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par*

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}, n \geq 2, \text{ avec } u_0 = u_1 = 1 \tag{1.2}$$

est l'une des suites récurrentes linéaires les plus connues.

1.2 Solution d'une suite récurrente linéaire

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite récurrente linéaire définie par la relation (1.1)
Le polynôme

$$P(x) = x^k - a_1x^{k-1} - a_2x^{k-2} - ... - a_k$$

s'appel le polynôme caractéristique de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Le résultat suivant est essentiel pour l'étude de notre problème.

Théorème 1.2.1 *Supposons que la relation de récurrence (1.1) a lieu et que $P(x)$ le polynôme caractéristique de cette relation.*
Si

$$P(x) = \prod_{i=1}^{r} (x - \alpha_i)^{n_i} \tag{1.3}$$

Alors, il existe des polynômes uniques $P_1(x)$, $P_2(x)$, ..., $P_n(x)$, avec $\deg(p_i) \leq n_i - 1$, tels que

$$u_n = \sum_{i=1}^{r} P_i(n)\,\alpha_i^n \tag{1.4}$$

Réciproquement, toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la forme (1.4)satisfait la relation de récurrence (1.1).

Pour démontrer ce théorème, on va utiliser les lemmes suivants

Lemme 1.2.2 *Soit $P(x)$ un polynôme défini par (1.3) qui admet α comme un zéros d'ordre $m \geq 1$.*
On définit :

$$\begin{cases} P_0(x) = P(x) \\ P_{i+1}(x) = xP_i'(x), \forall i \geq 1 \end{cases} \tag{1.5}$$

Alors il existe des pôlynomes $Q_i(x)$ tels que

$$P_i(x) = (x-\alpha)^{m-i} Q_i(x) \;, \forall i \in \{0, 1, ..., m-1\} \tag{1.6}$$

Récéproquement
Si $\alpha \neq 0$ et $P_i(\alpha) = 0$; $\forall i = 0, \overline{m-1}$, alors

$$P_0(x) = (x-\alpha)^m Q_0(x) \tag{1.7}$$

où $Q_0(x)$ est un polynôme.

Preuve. Tout d'abord, on va montrer par récurrence que pour tout $i \geq 1$, $P_i(x)$ peut se représenter par

$$P_i(x) = \sum_{j=1}^{i} C_j^{(i)} x^j P^{(j)}(x) \tag{1.8}$$

Le cas $i = 1$ est evident (puisque $P_1(x) = xP'(x)$) .
Supposons maintenant que (1.8) est vraie jusqu'à l'ordre i . Alors

$$\begin{aligned} P_i'(x) &= \sum_{j=1}^{i} C_j^{(i)} \left(jx^{j-1} P^{(j)}(x) + x^j P^{(j+1)}(x) \right) \\ &= \sum_{j=1}^{i} C_j^{(i)} jx^{j-1} P^{(j)}(x) + \sum_{j=2}^{i+1} C_{j-1}^{(i)} x^{j-1} P^{(j)}(x) \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} P_{i+1}(x) &= xP_i'(x) \\ &= xP'(x) + \sum_{j=2}^{i} \left(jC_j^{(i)} + C_{j-1}^{(i)} \right) x^j P^{(j)}(x) + x^{i+1} P^{(i+1)}(x) \end{aligned}$$

Donc

$$P_{i+1}(x) = \sum_{j=1}^{i+1} C_j^{(i+1)} x^j P^{(j)}(x)$$

D'autre part, si α est une racine d'ordre m du $P(x)$, alors α est une racine d'ordre $m - j$ du $P^{(j)}(x)$.
Ceci implique que

$$P^{(j)}(x) = (x - \alpha)^{m-j} \; R_j(x)$$

où $R_j(x)$ est un polynôme.
Récéproquement : Supposons maintenant que $P_i(\alpha) = 0$; $\forall i = 0, \overline{m-1}$, et montrons par récurrence que

$$P_0(x) = (x - \alpha)^m Q_0(x), \text{où } Q_0(x) \text{ est un polynôme}$$

En effet . Si $m = 1$, on aura

$$\begin{aligned} P_0(\alpha) &= P(\alpha) \\ &\Longrightarrow (x - \alpha) / P(x) \\ &\Longrightarrow P(x) = (x - \alpha) . Q_0(x) \end{aligned}$$

Supposons maintenant, que la propriété est vraie pour tout nombre strictement inférieur à m , alors

Si $P_{m-1}(\alpha) = 0$, on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j=1}^{m-1} C_j^{(m-1)} \alpha^j P^{(j)}(\alpha) = 0 + ...0 + \alpha^{m-1} P^{(m-1)}(\alpha) \text{ pour tout } \alpha \neq 0 \\ &\Longrightarrow P^{(m-1)}(\alpha) = 0 \Longrightarrow (x-\alpha)^m / P(x) \\ &\Longrightarrow P(x) = (x-\alpha)^m Q_0(x) \end{aligned}$$

■

Lemme 1.2.3 *Sous les conditions du lemme précédent, on a*

$$i) \sum_{p=0}^{k-1} p^i c_p \alpha^p = k^i . \alpha^k ; \forall i = \overline{0,\ m-1} \tag{1.9}$$

$$ii) \sum_{p=1}^{k} c_{k-p} p^i \alpha^{k-p} = 0 ; \forall i = \overline{1,\ m-1} \tag{1.10}$$

.

$$iii) \sum_{p=1}^{k} c_{k-p} (n-p)^j \alpha^{k-p} = n^j \alpha^k ; \forall j = \overline{0, m-1} \tag{1.11}$$

Preuve. $i)$ On va montrer par récurrence que

$$P_i(x) = k^i x^k - \sum_{p=0}^{k-1} p^i c_p x^p \ ; \ \forall i = \overline{0,\ m-1}$$

En effet . Pour $i = 0$, on obtient

$$k^0 x^k - \sum_{p=0}^{k-1} p^0 c_p x^p = x^k - \sum_{p=0}^{k-1} c_p x^p = P_0(x)$$

Supposons maintenant que la relation est vraie jusqu'à l'ordre i . On a

$$\begin{aligned} P_{i+1}(x) &= x P_i'(x) = x \left[k k^{i-1} x^{k-1} - \sum_{p=0}^{k-1} p p^i c_p x^{p-1} \right] \\ &= k^{i+1} x^k - \sum_{p=0}^{k-1} p^{i+1} c_p x^p \end{aligned}$$

Mais d'après le lemme précédent, on a

$$P_i(\alpha) = 0; \forall \overline{i = 0,\ m-1}$$

Ce qui implique

$$\sum_{p=0}^{k-1} p^i c_p \alpha^p = k^i \alpha^k$$

$ii)$ Un calcul direct donne

$$\begin{aligned}
\sum_{p=1}^{k} c_{k-p} p^i \alpha^{k-p} &= \sum_{p'=0}^{k-1} c_{p'} \left(k-p'\right)^i \alpha^{p'} \text{ (en posant } p' = k-p) \\
&= \sum_{t=0}^{i} \left(-1\right)^t C_i^t k^{i-t} \sum_{p'=0}^{k-1} c_{p'} p'^t \alpha^{p'}
\end{aligned}$$

En utilisant le résultat précédent, on trouve

$$\sum_{p'=0}^{k-1} c_{p'} p'^t \alpha^{p'} = k^t \alpha^k$$

Alors

$$\sum_{p=1}^{k} c_{k-p} p^i \alpha^{k-p} = \sum_{t=0}^{i} \left(-1\right)^t C_i^t k^{i-t} k^t \alpha^k = k^i \alpha^k \sum_{t=0}^{i} \left(-1\right)^t C_i^t = 0$$

iii) Nous avons

$$\begin{aligned}
\sum_{p=1}^{k} c_{k-p}\left(n-p\right)^{j}\alpha^{k-p} &= \sum_{p=1}^{k} c_{k-p}\sum_{t=0}^{j} C_j^t n^{j-t}\left(-p\right)^{t}\alpha^{k-p} \\
&= \sum_{t=0}^{j} C_j^t n^{j-t}\left(-1\right)^{t}\sum_{p=1}^{k} c_{k-p}p^{t}\alpha^{k-p} \\
&= \sum_{t=0}^{j} C_j^t n^{j-t}\left(-1\right)^{t}\sum_{p'=0}^{k-1} c_{p'}\left(k-p'\right)^{t}\alpha^{p'} \\
&= \sum_{t=0}^{j} C_j^t n^{j-t}\left(-1\right)^{t}\sum_{i=0}^{t}\left(-1\right)^{i} C_t^i k^{t-i}\sum_{p'=0}^{k-1} c_{p'}p'^{i}\alpha^{p'} \\
&= \sum_{t=0}^{j} C_j^t n^{j-t}\left(-1\right)^{t}\sum_{i=0}^{t}\left(-1\right)^{i} C_t^i k^{t-i}k^{i}\alpha^{k} \\
&= n^{j}\alpha^{k}+\sum_{t=1}^{j} C_j^t n^{j-t}\left(-1\right)^{t} k^{t}\alpha^{k}\sum_{i=0}^{t}\left(-1\right)^{i} C_t^i
\end{aligned}$$

$$= n^{j}\alpha^{k}$$

■

Preuve du théorème (1.2.1)

Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite définie par (1.1).

Et soit

$$P(x)=\prod_{i=1}^{r}\left(x-\alpha_i\right)^{n_i}$$

le polynôme caractéristique de la relation (1.1).

On considère la fonction génératrice suivante

$$F(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n \tag{1.12}$$

Alors, pour tout $n \geq k$, on a

$$x^n u_n = c_{k-1}u_{n-1}x^n + c_{k-2}u_{n-2}x^n + \ldots + c_0 u_{n-k}\, x^n$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned}
\sum_{n=k}^{+\infty} x^n u_n &= \sum_{n=k}^{+\infty} (c_{k-1}u_{n-1}x^n + c_{k-2}u_{n-2}x^n + ... + c_0 u_{n-k}\ x^n) \\
&= c_{k-1}x \sum_{n=k}^{+\infty} u_{n-1}x^{n-1} + c_{k-2}x^2 \sum_{n=k}^{+\infty} u_{n-2}x^{n-2} + ... + c_0 x^k \sum_{n=k}^{+\infty} u_{n-k}\ x^{n-k} \\
&= c_{k-1}x \sum_{n=k}^{+\infty} u_{n-1}x^{n-1} + c_{k-2}x^2 \sum_{n=k}^{+\infty} u_{n-2}x^{n-2} + ... + c_0 x^k \sum_{n=k}^{+\infty} u_{n-k}\ x^{n-k}
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
F(x) - \sum_{m=1}^{k} u_{k-m}x^{k-m} &= c_{k-1}x \left(F(x) - \sum_{m=2}^{k} u_{n-m}x^{k-m} \right) + \\
&\quad ... + c_1 x^{k-1} \left(F(x) - u_0 \right) + c_0 x^k F(x)
\end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned}
F(x) &= \frac{\sum_{m=1}^{k} u_{k-m}x^{k-m} - c_{k-1}x \left(\sum_{m=2}^{k} u_{k-m}x^{k-m} \right) - ... - c_1 x^{k-1} u_0}{1 - \sum_{m=1}^{k} c_{k-m}x^m} \\
&= \frac{\sum_{m=1}^{k} u_{k-m}x^{k-m} - c_{k-1} \sum_{m=2}^{k} u_{k-m}x^{k-(m-1)} - ... - c_1 x^{k-1} u_0}{1 - \sum_{m=1}^{k} c_{k-m}x^m}
\end{aligned}$$

Posons

$$R(x) = \sum_{m=1}^{k} u_{k-m}x^{k-m} - c_{k-1} \sum_{m=2}^{k} u_{k-m}x^{k-(m-1)} - ... - c_1 x^{k-1} u_0$$

Et

$$Q(x) = 1 - \sum_{m=1}^{k} c_{k-m}x^m,$$

où $\deg R \leq k-1$, et $\deg Q = k$ (car $c_0 \neq 0$).
Alors

$$\begin{aligned}
Q(\frac{1}{x}) &= 1 - \sum_{m=1}^{k} c_{k-m} x^{-m} \\
&\Rightarrow \; x^k Q(\frac{1}{x}) = x^k - \sum_{m=1}^{k} c_{k-m} x^{k-m} \\
&= P(x) = \prod_{i=1}^{r} (x-\alpha_i)^{n_i}
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^k} Q(x) &= \prod_{i=1}^{r} \left(\frac{1}{x} - \alpha_i \right)^{n_i} \\
&= \prod_{i=1}^{r} \left(\frac{1}{x} \right)^{n_i} \prod_{i=1}^{r} (1-\alpha_i x)^{n_i} \\
&= \frac{1}{x^k} \prod_{i=1}^{r} (1-\alpha_i x)^{n_i} \;\; (\text{ car } \sum_{i=1}^{r} n_i = k \;)
\end{aligned}$$

Alors

$$Q(x) = \prod_{i=1}^{r} (1-\alpha_i x)^{n_i}$$

En utilisant la division Euclidienne, on peut décomposer la fonction F comme suit

$$F(x) = \frac{R(x)}{\prod_{i=1}^{r} (1-\alpha_i x)^{n_i}} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{r_{ij}}{(1-\alpha_i x)^j}$$

Moyennant maintenant de l'expression

$$\left(\frac{1}{1-y} \right)^j = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} y^n \right)^j = \sum_{h=0}^{+\infty} c_{j-1}^{h+j-1} y^h,$$

il s'ensuit

$$\begin{aligned}
F(x) &= \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{n_i} r_{ij} \left(\sum_{h=0}^{+\infty} c_{j-1}^{h+j-1} \alpha_i^h x^h \right) \qquad (1.13) \\
&= \sum_{h=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^{r} \left(\sum_{j=1}^{n_i} r_{ij} c_{j-1}^{h+j-1} \right) \alpha_i^h \right) x^h
\end{aligned}$$

De (1.12) et (1.13), on déduit que

$$u_h = \sum_{i=1}^{r} P_i(h)\alpha_i^h,$$

où

$$P_i(h) = \sum_{j=1}^{n_i} r_{ij} c_{j-1}^{h+j-1}$$

D'autre part, les combinaisons c_{j-1}^{h+j-1} sont des polynômes de degré $j-1$.
Alors, pour tout $i = 1, ...r$, les $P_i(h)$ sont des polynômes de degré inférieur ou égale $n_i - 1$.

Unicité

Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de degré k, alors on peut supposer que $c_0 \neq 0$, et dans ce cas, toutes les racines α_i, $i = \overline{1, r}$ sont différentes de zéro.
Posons

$$P_i(x) = \sum_{j=0}^{n_i-1} p_{ij} x^j \text{ (car } \deg(P_i) \leq n_i - 1)$$

Or les p_{ij}, $1 \leq i \leq r$ et $0 \leq j \leq n_i - 1$ sont les inconnues d'un système de k équations linéaires obtenues à partir de :

$$u_n = \sum_{i=1}^{r} P_i(n)\, \alpha_i^n$$

et les conditions initiales $u_0, ..., u_{k-1}$.
La formule précédente peut s'écrire sous la forme

$$u_n = \sum_{i=1}^{r} P_i(n)\, \alpha_i^n = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=0}^{n_i-1} p_{ij} n^j \alpha_i^n, \tag{1.14}$$

où $n = 0, ..., k-1$.
Le déterminant du système (1.14) est de la forme

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & . & 1 & 0 & . & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_1 & . & \alpha_r & \alpha_r & . & \alpha_r \\ \alpha_1^2 & 2\alpha_1^2 & . & \alpha_r^2 & 2\alpha_r^2 & . & 2^{n_r-1}\alpha_r^2 \\ \alpha_1^3 & 3\alpha_1^3 & . & \alpha_r^3 & 3\alpha_r^3 & . & 3^{n_r-1}\alpha_r^3 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ \alpha_1^{k-1} & (k-1)\,\alpha_1^{k-1} & . & \alpha_r^{k-1} & (k-1)\,\alpha_r^{k-1} & . & (k-1)^{n_r-1}\,\alpha_1^{k-1} \end{vmatrix} \tag{1.15}$$

On va démontrer que le déterminant (1.15) n'est pas nul, ce qui signifie que les coéfficients p_{ij} sont uniques.

Pour cela, il suffit de démontrer que les vecteurs colonnes de (1.15) sont linéairements indépendants .
Supposons donc qu'il existe des constantes $a_0, \ldots, a_{k-1}$ tels que

$$\sum_{l=0}^{k-1} a_l l^i \alpha_j^l = 0, \tag{1.16}$$

pour tout $j = \overline{1,\ r}$ et $i = \overline{0,\ n_j - 1}$.
On pose maintenat

$$C(x) = \sum_{l=0}^{k-1} a_l x^l \tag{1.17}$$

Et on définit

$$\begin{cases} C_0(x) = C(x) \\ C_{i+1}(x) = xC_i'(x)\,;\forall i \geq 0 \end{cases}$$

Moyennant de (1.6), il s'ensuit

$$C_i(\alpha_j) = 0, \text{ pour tout } j \overline{= 1, r} \text{ et } i \overline{= 0, n_j \ - 1}$$

Le lemme (1.2.2) implique que $C(x)$ est divisible par $(x-\alpha_1)^{n_1}, (x-\alpha_2)^{n_2}, \ldots, (x-\alpha_r)$.
Dans ce cas, il existe un polynôme $q(x)$ tel que

$$C(x) = (x-\alpha_1)^{n_1}(x-\alpha_2)^{n_2} \ldots (x-\alpha_r)^{n_r} q(x)$$

Ce qui implique que

$$\deg(C(x)) \geq n_1 + \ \ldots . + n_r = k, oubienC(x) = 0$$

D'après (1.17), la première option n'est pas satisfaite, alors $C(x)$ est identiquement nul, et donc

$$a_0 = a_1 = \ldots = a_{k-1} = 0$$

Réciproquement :
Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'écrit sous la forme

$$u_n = \sum_{i=1}^{r} P_i(n)\,\alpha_i^n$$

On veut montrer que

$$u_n = c_{k-1}u_{n-1} + c_{k-2}u_{n-2} + \ \ . . . + c_0 u_{n-k}$$

On étudie la différence

$$D = u_n - c_{k-1}u_{n-1} - c_{k-2}u_{n-2} - \ \ . . . - c_0 u_{n-k}$$

Alors

$$D = \sum_{i=1}^{r} P_i\left(n\right)\alpha_i^n - \sum_{s=1}^{k} c_{k-s} \sum_{i=1}^{r} P_i\left(n-s\right)\alpha_i^{n-s}$$

En posant $c_k = -1$ et $P_i\left(x\right) = \sum\limits_{j=0}^{n_i-1} p_{ij}\ x^j$ dans l'égalité précédente, on obtient

$$\begin{aligned} D &= -\sum_{s=0}^{k} c_{k-s} \sum_{i=1}^{r} P_i\left(n-s\right)\alpha_i^{n-s} \\ &= -\sum_{i=1}^{r}\sum_{s=0}^{k}\sum_{j=0}^{n_i-1} p_{ij}\left(n-s\right)^j c_{k-s}\alpha_i^{n-k}\alpha_i^{k-s} \\ &= -\sum_{i=1}^{r}\alpha_i^{n-k}\sum_{j=0}^{n_i-1} p_{ij}\sum_{s=0}^{k} c_{k-s}\left(n-s\right)^j\alpha_i^{k-s} \end{aligned}$$

Moyennant maintenant du lemme (1.2.3), il s'ensuit

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{k} c_{k-s}\left(n-s\right)^j\alpha_i^{k-s} &= -n^j\alpha_i^k + \sum_{s=1}^{k} c_{k-s}\left(n-s\right)^j\alpha_i^{k-s} \\ &= -n^j\alpha_i^k + n^j\alpha_i^k = 0 \end{aligned}$$

Par suite

$$u_n = c_{k-1}u_{n-1} + c_{k-2}u_{n-2} + ... + c_0 u_{n-k}, \text{ pour tout } n \geq k$$

Chapitre 2

Positivité d'une suite récurrente linéaire de l'ordre trois

Définition 2.0.4 *On appelle suite récurrente linéaire du troisième ordre, toute suite* (u_n) *définie par la relation*

$$u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + a_3 u_{n-3}, \quad \textit{pour tout } n \geq 3, \tag{2.1}$$

tels que : $a_1, a_2, a_3 \neq 0$ *sont des nombres entiers donnés.*

Nous somme interessés par le problème de positivité suivant :
Problème de Positivité : Est-il possible de décider si la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est positive pour tout $n \geq 0$?

2.1 Théorème d'approximation de Kronecker

Théorème 2.1.1 *(théorème d'approximation de Dirichlet). Pour tout nombre réel* α *et pour tout nombre naturel* N*, on peut trouver un entier naturel* $n < N$ *et un entier* p *tels que*

$$\left|\alpha - \frac{p}{n}\right| < \frac{1}{nN}$$

En particulier :

$$|n\alpha - p| < \frac{1}{N} \tag{2.2}$$

Théorème 2.1.2 *(Théorème dapproximation de Kronecker) :Soit* α *un nombre irrationnel, et soient* $\beta, \Omega \in \mathbb{R}$*. Alors pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe des entiers* p *et* n *avec*

$$|n| \geq \Omega \ \textit{ et } \ |\alpha n - \beta - p| < \varepsilon. \tag{2.3}$$

Preuve.
Choisissons $N > \frac{1}{\varepsilon}$. D'aprés le théorème de Dirichlet (2.1.1), il existe un entier g et un entier naturel q tels que

$$0 < |\alpha q - g| < \varepsilon.$$

Posons $n = kq$,$p = kg + c$, il vient

$$\begin{aligned} |\alpha n - \beta - q| &= |k(\alpha q - g) - \beta - c| \\ &= |\alpha q - g| \cdot \left| k - \frac{\beta + c}{\alpha q - g} \right| \end{aligned}$$

Prennons $k = \left[\frac{\beta+c}{\alpha q-g}\right] + 1$, alors

$$|\alpha n - \beta - q| < \varepsilon$$

Enfin, choisissez c de sorte que $|n| \geq \Omega$ car $|n| = q|k| \Rightarrow |k| \geq \Omega$
C'est à dire

$$\left| \frac{\beta + c}{\alpha q - g} \right| \geq \Omega + 1$$

l'inégalité

$$\left| \frac{\beta + c}{\alpha q - g} \right| \geq \frac{|c|}{|\alpha q - g|} - \frac{|\beta|}{|\alpha q - g|},$$

montre que la condition ci-dessus est garantie, si et seulement si

$$|c| \geq (\Omega + 1)|\alpha q - g| + |\beta|$$

C'est-à-dire

$$|\alpha n - \beta - q| < \varepsilon, \text{ pour tout } \varepsilon > 0$$

Ce qui achève la démonstration. ■

2.2 Problème de positivité

Considérons une suite récurrente linéaire du troisième ordre

$$u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + a_3 u_{n-3}, \quad \text{pour tout } n \geq 3 \tag{2.4}$$

Le polynôme caractréstique associe à la réccurrence (2.4) est donné par

$$P(x) = x^3 - a_1 x^2 - a_2 x - a_3 \in \mathbb{Z}[x]. \tag{2.5}$$

Posons $x = x + \frac{a_1}{3}$. Alors, l'expression (2.5) devient

$$P\left(x + \frac{a_1}{3}\right) = x^3 + \alpha x + \beta,$$

où $\alpha = \frac{-a_1^2 - 3a_2}{3}$ et $\beta = \frac{-2a_1^3 - 9a_2a_1 - 27a_3}{27}$.
Soit x_1, x_2 et x_3 sont les trois racines de $P\left(x + \frac{a_1}{3}\right)$.
Le discriminant de $P\left(x + \frac{a_1}{3}\right)$ est :

$$\begin{aligned} D &= -4\alpha^3 - 27\beta^2 \\ &= (x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_2 - x_3)^2 . \end{aligned}$$

Nous avons donc

Proposition 2.2.1 *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres entiers satisfaisant (2.4), avec des entiers $a_1, a_2, a_3 (\neq 0)$, u_0, u_1, u_2.*
Soit $P(x)$ le polynôme caractréstique de (2.4) dont les racines sont λ_i $(i = 1, 2, 3)$ et $D = -4\alpha^3 - 27\beta^2$ où :

$$\alpha = \left(-a_1^2 - 3a_2\right) \diagup 3 \text{ et } \beta = \left(-2a_1^3 - 9a_2a_3 - 27a_3\right) \diagup 27.$$

1. Si $D > 0$, alors λ_1, λ_2, λ_3 sont des racines distinctes non nuls. De plus

$$u_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n + C\lambda_3^n, \text{ pour tout } n \geq 0,$$

où

$$\begin{cases} A = \frac{\lambda_2\lambda_3u_0 - (\lambda_3+\lambda_2)u_1 + u_2}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)} \in \mathbb{R} \\ B = \frac{-\lambda_1\lambda_3u_0 + (\lambda_3+\lambda_1)u_1 - u_2}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)} \in \mathbb{R} \\ C = \frac{\lambda_1\lambda_2u_0 - (\lambda_2+\lambda_1)u_1 + u_2}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)} \in \mathbb{R} \end{cases}$$

2. Si $D = 0$ et $\alpha = 0$, alors $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda \in \mathbb{R} \diagdown \{0\}$ et

$$u_n = \left(A + Bn + Cn^2\right) \lambda^n, \text{ pour tout } n \geq 0,$$

où :

$$\begin{cases} A = u_0 \in \mathbb{R} \\ B = \frac{-3u_0}{2} + \frac{2u_1}{\lambda} - \frac{u_2}{2\lambda_2} \in \mathbb{R} \\ C = \frac{u_0}{2} - \frac{u_1}{\lambda} + \frac{u_2}{2\lambda^2} \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

3. Si $D = 0$ et $\alpha \neq 0$, alors $P(x)$ a deux racines réelles distinctes : $\lambda_1 (\neq 0)$ de multiplicité

1 *et* $\lambda_2 = \lambda_3\,(\neq 0)$ *de multiplicité* 2*. De plus*

$$u_n = A\lambda_1^n + (B + Cn)\,\lambda_2^n, \text{ pour tout } n \geq 0,$$

où :

$$\begin{cases} A = \frac{\lambda_2^2 u_0 - 2\lambda_2 u_1 + u_2}{(\lambda_2-\lambda_1)^2} \in \mathbb{R} \\ B = \frac{-\lambda_1(2\lambda_2-\lambda_1)u_0 + 2\lambda_2 u_1 - u_2}{(\lambda_2-\lambda_1)^2} \in \mathbb{R} \\ C = \frac{\lambda_1\lambda_2 u_0 - (\lambda_2+\lambda_1)u_1 + u_2}{\lambda_2(\lambda_2-\lambda_1)} \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

4. Si $D < 0$*, alors* $P(x)$ *a une racine réelle* $\lambda_1\,(\neq 0)$ *et deux racines complexes conjuguées* λ_2*,* $\lambda_3 = \bar{\lambda}_2 \in \mathbb{C}/\mathbb{R}$*. De plus*

$$u_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n + \bar{B}\bar{\lambda}_2^n, \quad n \geq 0,$$

où

$$\begin{cases} A = \frac{\lambda_2\bar{\lambda}_2 u_0 - \left(\bar{\lambda}_2+\lambda_2\right)u_1 + u_2}{(\lambda_2-\lambda_1)\left(\bar{\lambda}_2-\lambda_1\right)} \in \mathbb{R} \\ B = \frac{-\bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_2 u_0 + \left(\bar{\lambda}_2+\lambda_1\right)u_1 - u_2}{(\lambda_2-\lambda_1)\left(\bar{\lambda}_2-\lambda_1\right)} \in \mathbb{C}. \end{cases}$$

Preuve. Soit λ_1, λ_2 et λ_3 sont les racines de $P(x)$.
1. Supposons que $D > 0$, alors λ_1, λ_2 et λ_3 sont des réels distincts, et :

$$u_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n + C\lambda_3^n, \text{ pour tout } n \geq 0.$$

Ainsi :

$$\begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}$$

et

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)$$

Par conséquent :

$$\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_2\lambda_3 u_0 - (\lambda_3+\lambda_2)u_1 + u_2}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)} \\ \frac{-\lambda_1\lambda_3 u_0 + (\lambda_3+\lambda_1)u_1 - u_2}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)} \\ \frac{\lambda_1\lambda_2 u_0 - (\lambda_2+\lambda_1)u_1 + u_2}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)} \end{bmatrix}.$$

2. Supposons que $D = 0$ et $\alpha = 0$, alors $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$
Et

$$u_n = \left(A + Bn + Cn^2\right)\lambda^n, \text{ pour tout } n \geq 0$$

Ainsi :

$$\begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda \\ \lambda^2 & 2\lambda^2 & 4\lambda^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}$$

Et :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda \\ \lambda^2 & 2\lambda^2 & 4\lambda^2 \end{vmatrix} = 2\lambda^3.$$

Par conséquent :

$$\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0 \\ \frac{-3u_0}{2} + \frac{2u_1}{\lambda} - \frac{u_2}{2\lambda_2} \\ \frac{u_0}{2} - \frac{u_1}{\lambda} + \frac{u_2}{2\lambda^2} \end{bmatrix}.$$

3. Supposons que $D = 0$ et $\alpha \neq 0$, alors $P(x)$ a deux racines réelles distinctes $\lambda_1 (\neq 0)$ de multiplicité 1, $\lambda_2 = \lambda_3 (\neq 0)$ de multiplicité 2.
Et

$$u_n = A\lambda_1^n + (B + Cn)\lambda_2^n, \text{ pour tout } n \geq 0.$$

Ainsi

$$\begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_2 \\ \lambda^2 & \lambda_2^2 & 2\lambda_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}$$

Et :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_2 \\ \lambda^2 & \lambda_2^2 & 2\lambda_2^2 \end{vmatrix} = \lambda_2 (\lambda_2 - \lambda_1)^2.$$

Par conséquent :

$$\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_2^2 u_0 - 2\lambda_2 u_1 + u_2}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2} \\ \frac{-\lambda_1(2\lambda_2 - \lambda_1)u_0 + 2\lambda_2 u_1 - u_2}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2} \\ \frac{\lambda_1\lambda_2 u_0 - (\lambda_2 + \lambda_1)u_1 + u_2}{\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)} \end{bmatrix}.$$

4. Supposons que $D < 0$, alors $P(x)$ a une racine réelle $\lambda_1 (\neq 0)$ et deux racines complexes conjuguées $\lambda_2, \lambda_3 = \bar{\lambda}_2 \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$.

$$u_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n + C\bar{\lambda}_2^n \, (n \geq 0).$$

Ainsi :

$$\begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \bar{\lambda}_2 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \bar{\lambda}_2^2 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}$$

Et

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \bar{\lambda}_2 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \bar{\lambda}_2^2 \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1)\left(\bar{\lambda}_2 - \lambda_1\right)\left(\bar{\lambda}_2 - \lambda_2\right).$$

Par conséquent :

$$\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_2\bar{\lambda}_2 u_0 - \left(\bar{\lambda}_2+\lambda_2\right)u_1 + u_2}{(\lambda_2-\lambda_1)\left(\bar{\lambda}_2-\lambda_1\right)} \\ \frac{-\bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_2 u_0 + \left(\bar{\lambda}_2+\lambda_1\right)u_1 - u_2}{(\lambda_2-\lambda_1)\left(\bar{\lambda}_2-\lambda_1\right)} \\ \frac{\lambda_1\lambda_2 u_0 - (\lambda_2+\lambda_1)u_1 + u_2}{\left(\bar{\lambda}_2-\lambda_1\right)\left(\bar{\lambda}_2-\lambda_2\right)} \end{bmatrix}.$$

Donc :

$$B = \bar{C}.$$

■

2.3 traitement de problème

Dans cette section, nous traitons chacun des trois cas, selon $D > 0$, $D = 0$, $D < 0$ séparément

Afin de faciliter l'écoulment de la preuve du résultat principal, nous distinguer deux lemmes auxiliaires suivants

Lemme 2.3.1 *Soit a, b deux nombres réels positifs appartenant à l'intervalle $(0,1)$ et soit B et C deux nombres réels positifs. Considérons les trois polynômes exponentielles suivants*

$$P(n) = a^n (B - Cb^n), Q(n) = a^n (B + Cb^n), R(n) = a^n (-B + Cb^n), \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

les conclusions suivantes sont vérifiets :
$(Type\ F - Z)$: Il existe des entiers explicitement calculables $N_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ et $N \in \mathbb{N}$, de telle sorte que :

$$\sup\{P(n);\ n \geq 0\} = \max\{P(n);\ N_0 \leq n \leq N_1\}.$$

$(Type\ F + Z)$:

$$\sup\{Q(n);\ n \geq 0\} = Q(0)$$

($Type\ \ -F+Z$) *: Il existe un entier explicitement calculable $N_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, tel que :*

$$\sup \{R(n)\,;\ n \geq 0\} = \max \{0,\ R(n)\,;\ 0 \leq n \leq N_2\}.$$

Preuve. ($Type\ F-Z$) : Puisque $b^n \downarrow 0\ (n \to \infty)$, il existe $N_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tel que :

$$B - Cb^i \leq 0 < B - Cb^n, \text{ pour tout } n \geq N_0, 0 \leq i < N_0$$

Alors

$$p(n) > 0, \text{ pour tout } n \geq N \text{ et } p(n) \leq 0, \text{ pour } 0 \leq n < N_0$$

Puisque $p(n) \to 0$,quand $n \to \infty$, il existe un entier positif $N_1 > N_0$, tel que :

$$P(n) < p(N_0) \quad \text{pour tout } n > N_1,$$

et le résultat souhaite suit.
($Type\ F+Z$) : Dans ce cas, la conclusion est immédiate, car

$$Q(n) > 0 \text{ et } Q(n) \downarrow 0, \text{ quand } n \to \infty$$

($Type\ \ -F+Z$) : Puisque $b^n \downarrow 0\ (n \to \infty)$, il existe $N_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tel que :

$$-B + Cb^n < 0, \text{ pour tout } n > N_2,$$

et le résultat désire decoule directement. ■

Lemme 2.3.2 *Soit $\varphi, \theta \in [-\pi,\ \pi]$ avec $\theta \notin \{-\pi,\ 0\}$*
1- *Si θ est un rationnel multiple de π, alors la suite $(\cos(\varphi + n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique et ne prend que un nombre fini de valeurs explicitement calculable pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
2- *Si θ n'est pas un rationnel multiple de π, alors $\{\cos(\varphi + n\theta)\,;\ n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1,\ 1]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$*

Preuve. 1. Supposons que θ est un rationnel multiple de π.
Posons

$$\theta = \frac{s\pi}{t}, \text{ pour tous } (S, t > 0) \in \mathbb{Z} \diagdown \{0\} \times \mathbb{Z} \diagdown \{0\} \text{ et } (S,\ t) = 1$$

Comme la fonction cos est périodique de période 2π, il est facile de vérifie que le $\cos(\varphi + n\theta) = \cos(\varphi + nS\pi/t)$ prend $2t$ valeurs explicitement calculable correspondant à $n = 0,\ 1,\ 2, ...,$ $2t - 1$.
2. Supposons maintenant que θ n'est pas un rationel multiple de π .

Pour cela , on suppose

$$\theta = \gamma t, \text{ où } \gamma \in \mathbb{R} \diagdown \mathbb{Q}$$

Soit

$$\gamma = [\gamma] + \xi,$$

où $[\gamma]$ désigne sa partie entière ,et $\xi = \{\gamma\} \in (0,\ 1)$ désigne sa partie fractionnaire qui doit être irrationnelle.
Alors, pour $n = 2k \, (k \in \mathbb{N} \cup \{0\})$, nous avons

$$\cos(\varphi + n\theta) = \cos(\varphi + 2kv\pi) = \cos(\varphi + \{k\varepsilon\} 2\pi) = \cos(\varphi + \{k\varepsilon\} 2\pi) .$$

Comme ξ est irrationnelle, d'aprés le théorème d'approximation de Kronecker, nous avons que l'ensemble

$$k\xi; k \in \mathbb{N},$$

est dense dans $[0,\ 1]$.
Par conséquent, l'ensemble $\{2\pi k\xi;\ n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[0,\ 2\pi]$.
Ce qui implique que la gamme des valeurs de

$$\cos(\varphi + \{k\varepsilon\} 2\pi) \, k \in \mathbb{N}$$

est dense dans $[-1,\ 1]$. ■

Lemme 2.3.3 *Supposons que*

$$u_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n + C\lambda_3^n \, (n \geq 0) ;$$

où $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ sont des réels distincts, alors le problème de positivité de la suite $(u_n)_{n=0}^{\infty}$ peut être éfficacement résolu.

Preuve. *Puisque, il y deux racines ayant la même valeur absolue, nous avons donc deux posibilité :*
1. S'il ya deux racines $\lambda_i,\ \lambda_j \, (i,\ j \in \{1,\ 2,\ 3\},\ i \neq j)$, telle que $|\lambda_i| = |\lambda_j|$.
Sans perte de généralité, soient $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 = -\lambda_1$.
Alors

$$u_n = \{A + (-1)^n B\} \lambda_1^n + C\lambda_3^n \text{ , pour tout } n \geq 0$$

a) $\lambda_1 > |\lambda_3|$.
On peut écrire

$$u_n = \lambda_1^n \{A + (-1)^n B + C (\lambda_3 \diagup \lambda_1)^n\} \text{ , pour tout } n \geq 0$$

Nous considérons deux possibilités correspondant aux signes de λ_3.
a. i. Si $\lambda_3 < 0$.
Pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, nous avons

$$u_n = \left\{ \begin{array}{c} \lambda_1^n \left(A + B + C \left(|\lambda_3| \diagup \lambda_1 \right)^n \right); \ n \ paire \\ \lambda_1^n \left(A - B - C \left(|\lambda_3| \diagup \lambda_1 \right)^n \right); \ n \ impaire \end{array} \right\}$$

Si $C \geq 0$, alors

$$u_n \geq 0 \Leftrightarrow A \geq \max \left\{ -B, B + C \left| \lambda_3 \right| \diagup \lambda_1 \right\}.$$

Si $C < 0$, alors

$$u_n \geq 0 \Leftrightarrow A \geq \max \left\{ B, -B + |C| \right\}.$$

a. ii. Si $\lambda_3 > 0$.
Pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, nous avons :

$$u_n = \left\{ \begin{array}{c} \lambda_1^n \left(A + B + C \left(\lambda_3 \diagup \lambda_1 \right)^n \right); \ n \ \ paire \\ \lambda_1^n \left(A - B + C \left(\lambda_3 \diagup \lambda_1 \right)^n \right); \ n \ impaire \end{array} \right\}$$

Si $C \geq 0$, alors

$$u_n \geq 0 \Leftrightarrow A \geq |B|.$$

Si $C < 0$, alors

$$u_n \geq 0 \Leftrightarrow A \geq \max \left\{ -B + |C|, B + |C| \lambda_3 \diagup \lambda_1 \right\}.$$

b) Si $\lambda_1 > |\lambda_3|$. On peut écrire

$$u_n = \lambda_3^n \left\{ \left(A + (-1)^n B \right) \left(\lambda_3 \diagup \lambda_1 \right)^n + C \right\} (n \geq 0)$$

Nous avons deux choix selon le signe de λ_3.
b. i. Si $\lambda_3 < 0$. Pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, nous avons

$$u_n = \left\{ \begin{array}{c} |\lambda_3^n| \left((A + B) \left| \lambda_1 \diagup \lambda_3 \right|^n + C \right); \ n \ \ paire \\ -|\lambda_3^n| \left((B - A) \left| \lambda_1 \diagup \lambda_3 \right|^n + C \right); \ n \ \ impaire \end{array} \right\}$$

Alors

$$\begin{aligned} u_n & \geq 0 \Leftrightarrow (A + B) \left| \lambda_1 \diagup \lambda_3 \right|^{2k} \geq -C \ \ et \ \ (B - A) \left| \lambda_1 \diagup \lambda_3 \right|^{2k+1} \leq -C \\ & \Longleftrightarrow C = 0, B < A, A + B > 0, \text{ pour tout } k \geq 0 \end{aligned}$$

b. ii. Si $\lambda_3 > 0$*. Pour tout* $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *, nous avons*

$$\begin{cases} u_n = & \lambda_3^n \left((A+B) \left(\lambda_1 / \lambda_3^n \right)^n + C \right); \; n \text{ paire} \\ & \lambda_3^n \left((A-B) \left(\lambda_1 / \lambda_3^n \right)^n + C \right); \; n \quad \text{impaire} \end{cases}$$

Alors

$$u_n \geq 0 \Leftrightarrow C \geq -(A+B) \left(\lambda_1 / \lambda_3^2 \right)^{2k} \text{ et } C \geq -(A-B) \left(\lambda_1 / \lambda_3 \right)^{2k+1}, \text{ pour tout } k \geq 0 \tag{2.6}$$

Si $A \geq |B|$*, alors (2.6) est satisfaite si et seulement si :* $C \geq 0$.
Si $A < |B|$*, alors (2.6) est satisfaite si et seulement si :*

$$\begin{cases} C \geq -(A-B) \left(\lambda_1 / \lambda_3 \right) \; , \text{ où } B > 0 \\ C \geq -(A+B) \; , \text{ où } B \leq 0. \end{cases}$$

2. Si les trois racines λ_1*,* λ_2 *et* λ_3 *ayant des valeurs absolues différentes..*
Sans perte de généralité, Supposons que $|\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3|$*. Alors*

$$u_n = \lambda_1^n \left\{ A + B \left(\lambda_2 / \lambda_1 \right)^n + C \left(\lambda_3 / \lambda_1 \right)^n \right\} (n \geq 0).$$

2.1 Si $\lambda_1 < 0$*.Puisque* λ_1 *a des signes alternés, et* $(\lambda_2 / \lambda_1)^n$ *et* $(\lambda_3 / \lambda_1)^n \rightarrow 0$ *,quand* $n \rightarrow \infty$*; alors*

$$u_n \geq 0 \Leftrightarrow A = 0$$

Ainsi :

$$u_n = B\lambda_2^n + C\lambda_3^n = \lambda_2^n \left\{ B + C \left(\lambda_3 / \lambda_2 \right)^n \right\}.$$

Ce cas particulier, se réduit donc à une suite linéaire du dexième ordre, et la positivité de ce problème est décidable par (Halava et al, 2006).
2.2 Si $\lambda_1 > 0$:
** Si* $B = C = 0$*, alors*

$$u_n = \lambda_1^n A \geq 0 \Leftrightarrow A \geq 0, \text{ pour tout } n \geq 0$$

** Si* $B = 0$*, alors pour* $C > 0$*, la suite* (u_n) *est positive si et seulement si :*

$$\begin{aligned} u_n \quad & \geq \quad 0 \Leftrightarrow A \geq -C \left(\lambda_3 / \lambda_1 \right)^n, \text{ pour tout } n \geq 0 \\ & \Longleftrightarrow \begin{cases} A/C \geq 0, \text{ où } \lambda_3 > 0 \\ A/C \geq |\lambda_3 / \lambda_1|, \text{ où } \lambda_3 < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Et pour $C < 0$:

$$\begin{aligned} u_n &\geq 0 \Leftrightarrow A \geq -C\left(\lambda_3/\lambda_1\right)^n, \text{ pour tout } n \geq 0 \\ &\Longleftrightarrow A \geq |C| \end{aligned}$$

**Si* $C = 0$, *alors pour* $B > 0$

$$\begin{aligned} u_n &\geq 0 \Leftrightarrow A \geq -B\left(\lambda_2/\lambda_1\right)^n \text{ pour tout } n \geq 0 \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} A/B \geq 0 \text{ , où } \lambda_2 > 0 \\ A/B \geq \left|\lambda_2/\lambda_1\right|, \lambda \text{où } \lambda_2 < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Et pour $B < 0$,

$$\begin{aligned} u_n &\geq 0 \Leftrightarrow A \geq -B\left(\lambda_2/\lambda_1\right)^n, \text{ pour tout } n \geq 0 \\ &\Longleftrightarrow A \geq |B|. \end{aligned}$$

** Si* $B < 0$, $C < 0$,

$$u_n \geq 0 \Leftrightarrow A \geq |B| + |C|.$$

** Si* $B < 0$, $C > 0$,

$$u_n \geq 0 \Leftrightarrow A \geq |B|\left(\lambda_2/\lambda_1\right)^n - |C|\left(\lambda_3/\lambda_1\right)^n, \text{ pour tout } n \geq 0.$$

*** Pour* $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 > 0$, *considérons le polynôme exponentiel :*

$$P_1(n) = \left(\lambda_2/\lambda_1\right)^n \left\{|B| - |C|\left(\lambda_3\lambda_1\right)^n\right\}, \text{ pour } n \geq 0.$$

Ce polynôme exponentiel est de type $F - Z$.
D'aprés lemme (2.3.1),

$$\begin{aligned} u_n &\geq 0 \Leftrightarrow A \geq \max\left\{P_1(n);\ N_0 \leq n \leq N_1\right\} \\ A &\geq \Leftrightarrow \max\left\{|B|\left(\lambda_2/\lambda_1\right)^n - |C|\left(\lambda_3/\lambda_1\right)^n;\ N_0 \leq n \leq N_1\right\} > 0, \text{ Pour tout } N_1 > N_0 \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

*** Pour* $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 < 0$,*on a :*

$$|B|\left(\lambda_2/\lambda_1\right)^n - |C|\left(\lambda_3/\lambda_1\right)^n = \begin{cases} |B|\left(\lambda_2/\lambda_1\right)^n - |C|\left(\lambda_3/\lambda_1\right)^n;\ n \text{ paire} \\ |B|\left(\lambda_2/\lambda_1\right)^n - |C|\left(\lambda_3/\lambda_1\right)^n;\ n \text{ impaire} \end{cases}$$

Pour $n=2k$, puisque le polynôme exponentiel :

$$P_2(k)=(\lambda_2/\lambda_1)^{2k}\left\{|B|-|C|\left(|\lambda_3|/\lambda_2\right)^{2k}\right\},\ k\geq 0$$

est de type $F-Z$. D'aprés le lemme (2.3.1), il existe des entiers calculables $k_1>k_0\in\mathbb{N}$, de telle sorte que :

$$\sup\{P_2(k)\,;\ k\geq 0\}=\max\{P_2(k)\,;\ K_0\leq K\leq K_1\ \}.$$

Et pour $n=2k+1$, le polynôme exponentiel :

$$P_3(k)=(\lambda_2/\lambda_1)^{2k+1}\left\{|B|+|C|\left(|\lambda_3|/\lambda_2\right)^{2k+1}\right\},\ k\geq 0$$

est de type $F+Z$, ainsi par le lemme (2.3.1) ,

$$u_n\geq 0\Leftrightarrow A\geq\max\{P_2(K_1)\,,P_3(0)\ ;\,K_0\leq k_1\leq K_1\ \}$$

*** Pour $\lambda_2<0,\ \lambda_3>0$,on a :*

$$|B|(\lambda_2/\lambda_1)^n-|C|(\lambda_3/\lambda_1)^n=\left\{\begin{array}{r}|B|\left(|\lambda_2|/\lambda_1\right)^n-|C|(\lambda_3/\lambda_1)^n\,;\ n\ paire\\ -|B|\left(|\lambda_2|/\lambda_1\right)^n-|C|(\lambda_3/\lambda_1)^n\,;\ n\ \ impaire\end{array}\right..$$

Le cas de n impaire $n=2k+1$ peut être ignorée car les termes sont négatifs .
Et pour $n=2k$, le polynôme exponentiel P_3 est de type $F-Z$.
D'aprés le lemme (2.3.1),il existe des entiers calculables $K_4>K_3\in\mathbb{N}$ tel que

$$u_n\geq 0\Leftrightarrow A\geq\max\left\{|B|\left(|\lambda_2|/\lambda_1\right)^{2k}-|C|(\lambda_3/\lambda_1)^{2k}\ ;\,K_3\leq k\leq K_4\ \right\}.$$

*** Pour $\lambda_2<0,\ \lambda_3<0$,on a :*

$$|B|(\lambda_2/\lambda_1)^n-|C|(\lambda_3/\lambda_1)^n=\left\{\begin{array}{r}|B|\left(|\lambda_2|/\lambda_1\right)^n-|C|\left(|\lambda_3|\diagup\lambda_1\right)^n;\ n\ \ paire\\ -|B|\left(|\lambda_2|/\lambda_1\right)^n-|C|\left(|\lambda_3|\diagup\lambda_1\right)^n;\ n\ \ impaire\end{array}\right..$$

Le cas de n pair $n=2k$, le polynôme exponentiel :

$$P_4(k)=\left(|\lambda_2|/\lambda_1\right)^{2k}\left\{|B|-|C|\left(|\lambda_3|\,/\,|\lambda_2|\right)^{2k}\right\}(k\geq 0)$$

est de type $F-Z$.
D'aprés le lemme (2.3.1), l existe des entiers calculables $K_6>K_5\in\mathbb{N}$, de telle sorte que :

$$\sup\{P_4(k)\,;\ k\geq 0\}=\max\{P_4(k)\,;\ K_5\leq K\leq K_6\ \}>0.$$

Pour $n = 2k+1$, le polynôme exponentiel :

$$P_5(k) = (|\lambda_2|/\lambda_1)^{2k+1}\left\{-|B| + |C|\,(|\lambda_3|/|\lambda_2|)^{2k+1}\right\}(k \geq 0)$$

est de type $-F+Z$.
D'aprés le lemme (2.3.1), il existe $K_7 \in \mathbb{N}$, tel que :

$$\sup\{P_5(k)\,;\ k \geq 0\} = \max\{0\ P_5(k)\,;\ 0 \leq K \leq K_7\ \}.$$

Ainsi,

$$u_n \geq 0 \Leftrightarrow A \geq \max\{P_4(K_1), P_5(K_2)\ ;\ K_5 \leq k_1 \leq K_6\ ;\ 0 \leq K_2 \leq K_7\}.$$

** Si $B < 0$, $C < 0$, alors*

$$u_n \geq 0 \Leftrightarrow A \geq -|B|\,(\lambda_2/\lambda_1)^n + |C|\,(\lambda_3/\lambda_1)^n.$$

*** Pour $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 > 0$, le polynôme exponentiel :*

$$P_6(k) = (\lambda_2/\lambda_1)^n\{-|B| + |C|\,(\lambda_3/\lambda_2)^n\}(n \geq 0)$$

est de type $-F+Z$, et donc d'aprés le lemme (2.3.1), il existe un entier calculable $K_8 \in \mathbb{N}$ tel que

$$u_n \geq 0 \Leftrightarrow A \geq \max\{0, P_6(n)\,;\ 0 \leq n \leq K_8\}.$$

*** Pour $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 < 0$, on a :*

$$-|B|\,(\lambda_2/\lambda_1)^n + |C|\,(\lambda_3/\lambda_1)^n = \begin{cases} -|B|\,(\lambda_2/\lambda_1)^n + |C|\,(|\lambda_3|/\lambda_1)^n\,;\ n\ \text{ paire} \\ -|B|\,(\lambda_2/\lambda_1)^n - |C|\,(|\lambda_3|/\lambda_1)^n\,;\ n\ \text{impaire} \end{cases}.$$

Le cas de n impaire $n = 2k+1$ peut être ignorée car les termes sont négatifs .
Le cas de n paire $n = 2k$, le polynôme correspondant est de type $-F+Z$, et donc par le lemme (2.3.1),

$$u_n \geq 0 \Leftrightarrow A \geq \max\left\{0, -|B|\,(\lambda_2/\lambda_1)^{2k} + |C|\,(|\lambda_3|/\lambda_1)^{2k}\,;\ 0 \leq k \leq K_9\right\}.$$

où $K_9 \in \mathbb{N}$.
*** Pour $\lambda_2 < 0$, $\lambda_3 > 0$, on a :*

$$-|B|\,(\lambda_2/\lambda_1)^n + |C|\,(\lambda_3/\lambda_1)^n = \begin{cases} -|B|\,(|\lambda_2|/\lambda_1)^n + |C|\,(\lambda_3/\lambda_1)^n\,;\ n\ \text{paire} \\ -|B|\,(|\lambda_2|/\lambda_1)^n - |C|\,(\lambda_3/\lambda_1)^n\,;\ n\ \text{ impaire} \end{cases}.$$

Dans le cas où $n = 2k$, le polynôme exponentiel :

$$P_7(k) = (|\lambda_2|/\lambda_1)^{2k}\left\{-|B| + |C|(\lambda_3/|\lambda_2|)^{2k}\right\},\ k \geq 0$$

est de type $-F + Z$, et donc par le lemme , il existe un entier calculable :$K_{10} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tel que :

$$\sup\{P_7(k);\ k \geq 0\} = \max\{0\ P_7(k);\ 0 \leq k \leq K_{10}\ \}.$$

Dans le cas où n impair $n = 2k + 1$, le polynôme exponentiel :

$$P_8(k) := (|\lambda_2| \diagup \lambda_1)^{2k+1}\left\{|B| + |C|(\lambda_3 \diagup |\lambda_2|)^{2k+1}\right\}(k \geq 0)$$

est de type $F + Z$, et donc par le lemme (2.3.1),

$$\sup\{P_8(k);\ k \geq 0\} = P_8(0) = (|\lambda_2|/\lambda_1)\{|B| + |C|(\lambda_3/|\lambda_2|)\} > 0$$

Par conséquent

$$u_n \geq 0 \Leftrightarrow A \geq \max\{P_7(k_1), P_8(0);\ 0 \leq k_1 \leq K_{10}\}.$$

*** Pour $\lambda_2 < 0$, $\lambda_3 < 0$, on a :*

$$-|B|(\lambda_2/\lambda_1)^n + |C|(\lambda_3/\lambda_1)^n = \begin{cases} -|B|(|\lambda_2|/\lambda_1)^n + |C|(|\lambda_3|/\lambda_1)^n;\ n \ \ \textit{paire} \\ |B|(|\lambda_2|/\lambda_1)^n - |C|(|\lambda_3|/\lambda_1)^n;\ n \ \ \textit{impaire} \end{cases}.$$

Pour $n = 2k$, le polynôme exponentiel :

$$P_9(k) = (|\lambda_2|/\lambda_1)^{2k}\left\{-|B| + |C|(|\lambda_3|/|\lambda_2|)^{2k}\right\},\ k \geq 0$$

est de type $-F + Z$, et donc par le lemme (2.3.1), il existe un entier calculable $K_{12} \in \mathbb{N}$, tel que :

$$\sup\{P_9(k);\ k \geq 0\} = \max\{0\ P_9(k);\ 0 \leq k \leq K_{12}\}.$$

Pour $n = 2k + 1$, le polynôme exponentiel :

$$P_{10}(k) = (|\lambda_2|/\lambda_1)^{2k+1}\left\{|B| + |C|(|\lambda_3|/|\lambda_2|)^{2k+1}\right\},\ k \geq 0$$

est de type $F - Z$, et donc par le lemme (2.3.1), il existe des entiers calculables $K_{14} > K_{13} \in \mathbb{N}$, tel que :

$$\sup\{P_{10}(k);\ k \geq 0\} = \max\{P_{10}(k);\ K_{13} \leq k \leq K_{14}\} > 0.$$

La suite (u_n) est donc positive, si et seulement si :

$$A \geq \max\left\{P_9\left(k_1\right), P_{10}\left(0\right);\ 0 \leq k_1 \leq K_{12},\ K_{13} \leq k_2 \leq K_{14}\right\}.$$

** Si $B > 0$, $C > 0$, la suite (u_n) est positive si et seulement si :*

$$A \geq -B\left(\lambda_2/\lambda_1\right)^n - C\left(\lambda_3/\lambda_1\right)^n (n \geq 0).\ (7) \tag{2.7}$$

*** Si $\lambda_2 > 0$ et $\lambda_3 > 0$, alors (2.7)satisfaite si et seulement si :*

$$A \geq 0.$$

*** Si $\lambda_2 > 0$ et $\lambda_3 < 0$, alors :*

$$-B\left(\lambda_2/\lambda_1\right)^n - C\left(\lambda_3/\lambda_1\right)^n = \begin{cases} -B\left(\lambda_2/\lambda_1\right)^n - |C|\left(|\lambda_3|/\lambda_1\right)^n;\ n \text{ paire} \\ -B\left(\lambda_2/\lambda_1\right)^n + C\left(|\lambda_3|/\lambda_1\right)^n;\ n \text{ impaire} \end{cases}.$$

Le cas de n pair est ignorée car les termes sont négatifs.
Pour n impair $n = 2k+1$, ce cas est de type $-F+Z$, et donc par le lemme(2.3.1) , il existe un entier calculable $K_{15} \in \mathbb{N}$, tel que

$$u_n \geq 0 \Leftrightarrow A \geq \max\left\{0,\ -B\left(\lambda_2/\lambda_1\right)^{2k+1} + C\left(|\lambda_3|/\lambda_1\right)^{2k+1};\ 0 \leq k \leq K_{15}\right\}.$$

*** Si $\lambda_2 < 0$, $\lambda_3 > 0$, alors :*

$$-B\left(\lambda_2/\lambda_1\right)^n - C\left(\lambda_3/\lambda_1\right)^n = \begin{cases} -B\left(|\lambda_2|/\lambda_1\right)^n - C\left(\lambda_3/\lambda_1\right)^n;\ n \text{ paire} \\ B\left(|\lambda_2|/\lambda_1\right)^n - C\left(\lambda_3/\lambda_1\right)^n;\ n \text{ impaire} \end{cases}.$$

Le cas de n pair est ignorée car les termes sont négatifs.
Pour $n = 2k+1$, ce cas est de type $F+Z$, et donc par le lemme (2.3.1) , il existe des entiers calculables $K_{17} > K_{16} \in \mathbb{N}$, tel que

$$u_n \geq 0 \Leftrightarrow A \geq \max\left\{B\left(|\lambda_2|/\lambda_1\right)^{2k+1} - C\left(\lambda_3/|\lambda_2|\right)^{2k+1};\ K_{16} \leq k \leq K_{17}\right\}.$$

***Pour $\lambda_2 < 0$, $\lambda_3 < 0$, alors :*

$$-B\left(\lambda_2/\lambda_1\right)^n - C\left(\lambda_3/\lambda_1\right)^n = \begin{cases} -B\left(|\lambda_2|/\lambda_1\right)^n - C\left(|\lambda_3|/\lambda_1\right)^n;\ n \text{ paire} \\ B\left(|\lambda_2|/\lambda_1\right)^n - C\left(|\lambda_3|/\lambda_1\right)^n;\ n \text{ impaire} \end{cases}.$$

Le cas de n pair est ignorée car les termes sont négatifs.

Pour n impair, ce cas est de type $F+Z$, et donc par le lemme (2.3.1)

$$u_n \geq 0 \Leftrightarrow A \geq B\left(|\lambda_2| \diagup \lambda_1\right)^n + C\left(|\lambda_3| \diagup \lambda_1\right)^n.$$

■

Lemme 2.3.4 *Supposons que :*

$$u_n = \left(A + Bn + Cn^2\right)\lambda^n \,(n \geq 0)\,,\ \text{où } \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}\,.$$

Alors le problème de positivité de la suite $(u_n)_{n=0}^{\infty}$ peut être effectivement résolu.

Preuve. Nous avons deux sous_cas selon le signe de $\lambda < 0$.
1. Si $\lambda < 0$.
La suite (u_n) est positive si et seulement si, pour chaque n, soit $A + Bn + Cn^2 = 0$ où :

$$sign\left(A + Bn + Cn^2\right) = sign\left(\lambda^n\right)$$

La suite (u_n) est positive si et seulement si :

$$A + Bn + Cn^2 \equiv 0$$

i.e, si et seulement si :

$$A = B = C = 0.$$

2. $\lambda > 0$.
La suite (u_n) est positive si et seulement si :

$$A + Bn + Cn^2 \geq 0, \text{ pour tout } n \geq 0$$

Puisque $A + Bn + Cn^2$ est un polynôme quadratique en n, alors

$$u_n \geq 0 \Leftrightarrow C \geq 0$$

■

Lemme 2.3.5 *Supposons que :*

$$u_n = A\lambda_1^n + (B + Cn)\,\lambda_2^n,\ n \geq 0, \text{où } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} - \{0\}\,, \lambda_1 \neq \lambda_2.$$

Alors le problème de positivité de la suite $(u_n)_{n=0}^{\infty}$ peut être efficacement résolu.

Preuve. On distingue trois possibilitées en fonction des valeurs absolues de deux racines.
1. Si $|\lambda_1| > |\lambda_2| > 0$. On peut écrire

$$u_n = \lambda_1^n \left\{ A + (B + Cn) (\lambda_2/\lambda_1)^n \right\},$$

Nous subdivisons en deux sous_cas selon le signe de λ_1
* Si $\lambda_1 < 0$.
Puisque :

$$(B + Cn) (\lambda_2/\lambda_1)^n \to 0, \text{ quand } n \to \infty \ ,$$

et $sign(\lambda_1^n) = \mp |\lambda_1^n|$. Alors

$$u_n \geq 0 \Leftrightarrow A = 0,$$

Ce qui donc :

$$u_n = (B + Cn) \lambda_2^n$$

C'est exactement le même que le lemme (4) de positivité d'une suite réccurence linéaire du dexième ordre (Halava et al, 2006), ce qui déja a été montré pour être décidable.
* Si $\lambda_1 > 0$. Puisque

$$sign \left\{ A + (B + Cn) (\lambda_2/\lambda_1)^n \right\} = sign (A)$$

où n est assez grand, alors

$$u_n \geq 0 \Leftrightarrow A \geq 0 \text{ et } A \geq -(B + Cn) (\lambda_2/\lambda_1)^n \, (n \geq 0) \tag{2.8}$$

De toute évidence, il existe un entier calculable $T \in \mathbb{N}$, tel que la relation (2.8) est vérifié si et seulement si :

$$A \geq \max \left\{ -(B + Cn) (\lambda_2/\lambda_1)^n ; \ 0 \leq n \leq T \right\}.$$

Par conséquent

$$A \geq \max \left\{ (0, -(B + Cn) (\lambda_2/\lambda_1)^n) ; \ 0 \leq n \leq T \right\}.$$

2. Si $|\lambda_1| < |\lambda_2|$.
Ecrivons

$$u_n = \lambda_2^n \left\{ A (\lambda_1/\lambda_2)^n + (B + Cn) \right\}. \tag{2.9}$$

On distingue deux sous_cas selon le signe de λ_2.
* Si $\lambda_2 < 0$.
Puisque :

$$sign\left(A\left(\lambda_1/\lambda_2\right)^n + \left(B + Cn\right)\right) = sign\left(C\right).$$

où n assez grand, et $sign\left(\lambda_2^n\right) = \mp\left|\lambda_1^n\right|$, alors

$$u_n \geq 0 \Leftrightarrow C = 0$$

L'expression (2.9) devient

$$u_n = \lambda_2^n \left(A\left(\lambda_1 \diagup \lambda_2\right)^n + B\right).$$

Puisque

$$sign\left(A\left(\lambda_1 \diagup \lambda_2\right)^n + B\right) = sign\left(B\right).$$

Lorsque n est suffisament grand.
Nous concluons que la suite (u_n) est positive uniquement lorsque $B = 0$ et donc

$$u_n = A\lambda_1^n$$

Par conséquent, la suite (u_n) est positive si et seulement si :

$$A \geq 0 \text{ et } \lambda_1 > 0$$

* Si $\lambda_2 > 0$. Alors

$$u_n \geq 0 \Leftrightarrow B \geq R\left(n\right) = -A\left(\lambda_1 \diagup \lambda_2\right)^n - Cn \text{ , pour tout } n \geq 0 \tag{2.10}$$

Il s'agit maintenant de trouver $\sup_{n\geq 0} R\left(n\right)$.
De tout évidence, nous ne pouvons exclue la situation où $C < 0$ car pas de nombre réel B satisfait (2.10), pour tout $n \geq 0$.
Si $C = 0$, alors

$$R\left(n\right) = -A\left(\lambda_1 \diagup \lambda_2\right)^n \rightarrow 0, \text{ quand } n \rightarrow \infty,$$

Et donc, il ya $T_2 \in \mathbb{N}$ telle que :

$$\sup\left\{R\left(n\right);\ n \geq 0\right\} = \max\left\{0,\ R\left(n\right);\ 0 \leq n \leq T_2\right\}$$

Ainsi, (2.10) est satisfaite si et seulement si :

$$B \geq \max\left\{0,\ R\left(n\right);\ 0 \leq n \leq T_2\right\}.$$

Si $C > 0$. Puisque $R(n) \to -\infty$, quand $n \to \infty$, il existe un entier calculable $T_3 \in \mathbb{N}$, de telle sorte que :

$$\max\{R(n); n \geq 0\} = \max\{R(n);\ 0 \leq n \leq T_3\}.$$

Ainsi, (2.10) est satisfaite, si et seulement si :

$$B \geq \max\{R(n);\ 0 \leq n \leq T_3\}.$$

3. Si $|\lambda_1| = |\lambda_2|$:
$*$ Si $\lambda_1 = -\lambda_2 > 0$. Le terme générale de la suite est :

$$u_n = \{A + (-1)^n (B + Cn)\}\lambda_1^n = \begin{cases} \{A + (B + 2Ck)\}\lambda_1^{2k},\ si\ n = 2k \\ \{A - (B + C + 2Ck)\}\lambda_1^{2k+1}\ ,si\ n = 2k+1 \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} u_n &\geq 0 \Leftrightarrow A - B - C \geq 0 \geq 2Ck \geq -A - B,\ \text{pour tout } k \geq 0. \\ &\Leftrightarrow A - B \geq 0 \geq -A - B \Leftrightarrow A \geq |B|. \end{aligned}$$

$*$ $\lambda_1 = -\lambda_2 < 0$. Nous avons

$$u_n = \{(-1)^n A + B + Cn\}\lambda_2^n = \begin{cases} (A + B + 2Ck)\lambda_2^{2k}\ ,\ si\ n = 2k \\ (-A + B + C + 2Ck)\lambda_2^{2k+1},\ si\ n = 2k+1 \end{cases}$$

La suite (u_n) est positive si et seulement si :

$$A + B + 2Ck \geq 0 \text{ et} - A + B + (2k+1)C \geq 0, \text{ pour tout } k \geq 0$$

Puisque les deux inégalités ne détiennent pas si $C < 0$, lorsque k assez grand.
Les deux inégalités donc valables pour tout $k \geq 0$ si et seulement si :

$$C \geq 0, A + B \geq 0 \ \text{ et } C \geq -A - B.$$

■

Lemme 2.3.6 *Supposons que :*

$$u_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n + \overline{B\lambda_2^n},$$

où A, $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{C}$ *et* $\lambda_2 \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$, *alors :*

1. Si $\lambda_1 < 0$, alors $(u_n)_{n=0}^{\infty}$ comporte des éléments négatifs.
2. Si $\lambda_1 > 0$, alors le problème de positivité de la suite $(u_n)_{n=0}^{\infty}$ peut être éfficacement résolu.

Preuve. Supposons que :

$$\lambda_2 = |\lambda_2| \exp i\theta, \;\; B = |B| \exp i\varphi,$$

où θ, $\varphi \in [-\pi, \;\pi)$, $\theta \notin \{-\pi, \;0\}$.
Alors

$$u_n = A\lambda_1^n + 2\,|B|\,|\lambda_2|^n \cos(\varphi + n\theta).$$

Si $A = 0$, alors :

$$u_n = 2\,|B|\,|\lambda_2|^n \cos(\varphi + n\theta).$$

C'est exactement le même que les lemmes (5 et 6) de positivité d'une suite réccurence linéaire du dexième ordre (Halava et al, 2006), ce qui déja a été montré pour être décidable.
Supposons désormais que $A \neq 0$.
1. Si $\lambda_1 < 0$.
* Si $B = 0$, alors :

$$u_n = A\lambda_1^n$$

Puisque $\lambda_1^n = \mp |\lambda_1^n|$, donc u_n n'est pas positive.
* Si $B = 0$, alors :
1.1 Si $|\lambda_1| > |\lambda_2|$, on a :

$$u_n = \lambda_1^n \left\{A + 2\,|B|\,(|\lambda_2|\,/\lambda_1)^n \cos(\varphi + n\theta)\right\}$$

Puisque :

$$sign\left\{A + 2\,|B|\,(|\lambda_2|\,/\lambda_1)^n \cos(\varphi + n\theta)\right\} = sign\,(A)\,,$$

où n assezgrand, et $\lambda_1^n = \pm |\lambda_1|^n$, la suite (u_n) est positive seulement où $A = 0$,
1.2 Si $|\lambda_1| = |\lambda_2|$, on a :

$$u_n = |\lambda_2|^n \left\{(-1)^n A + 2\,|B| \cos(\varphi + n\theta)\right\}$$

La suite (u_n) est positive si et seulement si :

$$-2\,|B| \cos(\varphi + n\theta) \leq A \leq 2\,|B| \cos(\varphi + (2k+1)\,\theta)\,, \;\; k \geq 0.$$

les fonctions $\cos(\varphi + 2k\theta)$ et $\cos(\varphi + (2k+1)\,\theta)$ prend des valeurs positives et négatives, alors

$$u_n \geq 0 \Leftrightarrow A = B = 0$$

1.3 Si $|\lambda_1| < |\lambda_2|$, on a :

$$\begin{aligned} u_n &= A\lambda_1^n + 2\left|B\lambda_2^n\right|\cos(\varphi + n\theta) \\ &= \left|\lambda_2^n\right|\left\{A\left(\lambda_1/\left|\lambda_2\right|\right)^n + 2\left|B\right|\cos(\varphi + n\theta)\right\}. \end{aligned}$$

Puisque $A\left(\lambda_1/\left|\lambda_2\right|\right)^n \rightarrow 0$, quand $n \rightarrow \infty$, et la fonction $\cos(\varphi + n\theta)$ prend des valeurs positives et négatives, alors

$$u_n \geq 0 \Leftrightarrow B = 0$$

Ce qui implique

$$u_n = A\lambda_1^n \geq 0 \Leftrightarrow A = 0$$

2. Suposons maintenant que $\lambda_1 > 0$.
Si $B = 0$, alors

$$u_n = A\lambda_1^n$$

Donc la suite (u_n) est positive si et seulement si $A \geq 0$.
Si $B = 0$.
2.1 Si $|\lambda_1| > |\lambda_2|$, on a :

$$u_n = \lambda_1^n\left\{A + 2\left|B\right|\left(\left|\lambda_2\right|/\lambda_1\right)^n\cos(\varphi + n\theta)\right\}$$

Puisque

$$sign\left\{A + 2\left|B\right|\left(\left|\lambda_2\right|/\lambda_1\right)^n\cos(\varphi + n\theta)\right\} = sign(A),$$

où n est suffisament grand, alors

$$u_n \geq 0 A \geq 0 \text{ et } \Leftrightarrow A \geq -2\left|B\right|\left(\left|\lambda_2\right|/\lambda_1\right)^n\cos(\varphi + n\theta), \; n \geq 0$$

Par le lemme (5) de de positivité d'une suite récurrente linéaire du dexième ordre (Halava et al,2006), il existe $N_L \in \mathbb{N}$, tel que $\cos(\varphi + N_L\theta) < 0$.
Puisque $\left(\left|\lambda_2\right|/\lambda_1\right)^n \rightarrow 0$, quand $n \rightarrow \infty$; il ya donc $N_M > N_L$, tel que pour tout $n \geq N_M$, on a :

$$-2\left|B\right|\left(\left|\lambda_2\right|/\lambda_1\right)^n\cos(\varphi + n\theta) < -2\left|B\right|\left(\left|\lambda_2\right|/\lambda_1\right)^{N_L}\cos(\varphi + N_L\theta).$$

Par conséquent, la suite (u_n) est positive si et seulement si :

$$A \geq \max\left\{-2\left|B\right|\left(\left|\lambda_2\right|/\lambda_1\right)^n \cos\left(\varphi + n\theta\right);\ N_L \leq n \leq N_M\right\}.$$

2.2. Si $|\lambda_1| = |\lambda_2|$, on a :

$$u_n = \lambda_1^n \left\{A + 2\left|B\right|\cos\left(\varphi + n\theta\right)\right\}$$

la suite (u_n) est positive si et seulement si :

$$A \geq \max\left\{-2\left|B\right|\cos\left(\varphi + n\theta\right);\ n \geq 0\right\}.$$

Envisageons deux cas :
* Si θ est un rationnel multiple de π. D'aprés le lemme (2.7), la suite $\left(\cos\left(\varphi + n\theta\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique.
C'est-à dire, il existe des réels négatif $C_1, ..., C_m$, tels que la relation(2.11) satisfaite si et seulement si :

$$A \geq \max\left\{-2\left|B\right|C_1, ..., -2BC_m\right\} \tag{2.11}$$

*Si θ estun multiple irrationnel de π. Toujours, d'aprés le lemme (2.7), la relation(2.11) satisfaite si et seulement si :

$$A \geq 2\left|B\right|.$$

2.3 Si $|\lambda_1| < |\lambda_2|$, on a :

$$u_n = \left|\lambda_2^n\right|\left\{A\left(\lambda_1/\left|\lambda_2\right|\right)^n + 2\left|B\right|\cos\left(\varphi + n\theta\right)\right\}.$$

Puisque $A\left(\lambda_1/\left|\lambda_2\right|\right)^n \to 0$, quand $n \to \infty$, et la fonction $\cos\left(\varphi + n\theta\right)$ prend des valeurs positives et négatives, alors

$$u_n \geq 0 \Leftrightarrow A = B = 0$$

■

Théorème 2.3.7 *Le problème de positivité pour les suites récurrentes linéaires du troisième ordre est décidable .*

Bibliographie

[1] Bell, J. P. and S. Gerhold. 2007. On the positivity set of a linear recurrence sequence. Israel J. Math. 157 : 333-345.

[2] Burke, J. R. and Webb, W. A., 1981, Asymptotic behavior of linear recurrences. Fibonacci Quart. 19, 318-321.

[3] Halava, V., T. Harju and M. Hirvensalo. 2006. Positivity of second order linear recurrent sequences. Discrete Appl. Math. 154 : 447-451

[4] Halava, V., T. Harju, M. Hirvensalo and J. Karhumaki. 2005. Skolem's problem. On the border between decidability and undecidability. TUCS. Technical Report 683.

[5] Gerhold, S. 2005. Point lattices and oscillating recurrence sequences. J. Differ. Equations Appl. 11(6) : 515-533.

[6] Pinthira Tangsupphathawat. 2009. Positivity and Periodicity of Linear Recurrence Relation. Kasetsart University, Thailand.

[7] Nagasaka, K. and Shiue, J., 1990, Asymptotic positiveness of linear recurrence sequences. Fibonacci Quart. 28, no. 4, 340-346.

[8] Schultz, P. 1977. Mortality of $2 \times 2 matrices. Amer. Math. Monthly 84 : 463-464$.