

N° Ref :.....

Centre Universitaire de Mila

Institut des sciences et de la technologie

Département de Mathématiques et Informatique

Système dynamique chaotique : Attracteur de Lorenz

Mémoire préparé en vue de l'obtention du diplôme de Licence
en Mathématiques

Préparé par : GUERINI TEFFAHA
HAMOUDA SOUMIA
SAADALLAH SAMIA

Encadré par : ARROUD
CHEMS EDDINE

Filière : *Mathématiques*

Spécialité : *Mathématiques Fondamentales*

Année universitaire :2012/2013

Remerciement

A Notre dieu

Pour nous avoir guidé et donné la patient d'élaborer ce travail

A Mr ARROUD CHEMS EDDINE pour nous avoir guidé et accompagné tout au long de ce travail .

Et grand remerciement specifiquement à ZAHIR HAMOUDA enseignant à lécole supèrieur des techniciens d'aéronotique , dar el beida, pour leur aide .

A NOS parents et NOS frères

Pour nous avoir supporté et guidé à travers ces longues études .

« SOUMIA ,TEFFAHA ,SAMIA »



Table des matières

0 .1 Introduction	3
-------------------------	---

Chapitre01

Notions préliminaires

1-1	Système dynamique.....	4
1-2	Système dynamique chaotique	4
1-3	Système linéaire.....	5
1-4	Stabilité d'un système linéaire	5
1-5	Système non linéaire	6
1-6	Stabilité d'un système non linéaire.....	6
1-7	Matrice jacobienne	7
1-8	La linéarisation.....	8
1-9	Flot	8
1-10	Espace des phases :(espace d'état).....	9

Chapitre02

2-1	Point d'équilibre.....	11
2-2	La linéarisation.....	12
2-3	Programmations de matlab.....	19

Table des figures :

01. Evolution du paramètre x,y,z dans le temps.....	21
2.1. l'évolution dans le temps de la coordonnée z pour $r= 0,5$	22
2.2. L'évolution dans le temps de la coordonnée z Pour $r=5$	22
2.3. L'évolution dans le temps de la coordonnée z Pour $r=15$	23
2.4. L'évolution dans le temps de la coordonnée z Pour $r=25$	23
3.1. Trajectoire on 3D pour $r>1$	25
3.2. Trajectoire on 3D pour $r<1$	27
3.3. Trajectoire on 3D pour $r=1$	29

0.1 Introduction

Les systèmes dynamiques se sont développés et spécialisés au cours du XIX^e siècle il concernait en premier lieu l'itération des applications continues et la stabilité des équations différentielles mais progressivement, au fur et mesure de la diversification des mathématiques.

L'histoire des systèmes dynamiques modernes est relativement récente. Elle commence avec Henri Poincaré en (1854 -1912) qui fut le premier à entreprendre l'étude formelle d'un système dynamique.

Les premiers résultats sont apparus avec Lyapunov à la fin du 19^e siècle et au début de 20^e siècle. Il donne alors une condition nécessaire et suffisante de stabilité.

Dans ce mémoire, nous étudions un système dynamique chaotique celui de l'attracteur de Lorenz.

Le premier chapitre est un rappel de notions sur les systèmes dynamiques tels que : la stabilité et la linéarisation de système linéaire et le système non linéaire...

Le deuxième chapitre nous étudions l'attracteur de Lorenz à l'aide de la programmation matlab.

Chapitre 1

Notions préliminaires

1.1 Systèmes dynamiques

Définition1 :

Un système dynamique est un modèle évoluant avec le temps ; en suivant une loi, qui peut être décrite par un ensemble fini d'équations qui peut prendre des formes mathématiques diverses : équations différentielles ordinaires, équations aux dérivées partielles...

La présentation mathématique des systèmes dynamiques est :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t, v), x \in U \subseteq \mathbb{R}^n, v \in V \subseteq \mathbb{R}^p$$

$$\text{Ou } f(x) = \begin{pmatrix} F_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ F_n(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

1.2 Système dynamique chaotique

Définition2 : [3]

Système chaotique est un système dynamique, un problème où l'on a un point qui se déplace au cours du temps, de manière déterministe, (c'est à dire que si l'on sait la position exacte de ce point au départ, on peut en théorie avoir où il se trouve à tout instant ultérieur), et on appelle chaotique tout système dynamique qui a les deux caractéristiques suivantes :

1. Une grande sensibilité aux conditions initiales
2. Il y a partout des orbites périodiques.

3. Définition 3 : [2]

L'orbite du système dynamique est la courbe image de l'ensemble des temps par une trajectoire (l'orbite est une collection des points reliés par évolution du temps) .

1.2 Système linéaire

1.3 Définition 4 : [1]

Un système linéaire est un système qui écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A(t)x(t) & , t > t_0 \\ X(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Où $A(t)$ est une matrice $n \times n$ à valeur dans $\mathbb{R}^n$, $B(t)$ est une matrice $n \times m$ à valeur dans $\mathbb{R}^n$ et $x(t) \in \mathbb{R}^m$.

1.4 Stabilité d'un système linéaire

Valeur propre		Type de point singulier	Stabilité
$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$		nœud	Instable
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$		nœud	Asymptotiquement stable
$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$		Col (point selle)	Instable
$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$		Nœud propre ou impropre	Instable
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$		Nœud propre ou impropre	Asymptotiquement stable
$\lambda_1 = \alpha + i\beta$	$\alpha > 0$	foyer	Instable
$\lambda_2 = \alpha + i\beta$	$\alpha < 0$	foyer	asymptotiquement stable
	$\alpha = 0$	centre	Stable

1.5 Système non linéaire

Définition 5 : [1]

Un système non linéaire est un système écrit par l'équation suivant :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A(t)x(t) + B(t) \\ X(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Où $A(t)$ est une matrice $n \times n$ à valeur dans $\mathbb{R}^n$, $B(t)$ est une matrice $n \times m$ à valeur dans $\mathbb{R}^n$.

1.6 Stabilité d'un système non linéaire

Soit ce système dynamique non linéaire ce système est modélisé par :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = f(x(t), B(t)), & t \geq t_0 \\ x(t_0) = x \end{cases}$$

- 1) Si toutes les valeurs propres λ_i du système linéaire associé à ce système ont leurs parties réelles strictement négatives le point fixe est asymptotiquement stable.
- 2) si une ou plusieurs valeurs propres sont des imaginaires, les autres valeurs propres ayant leur partie réelle négative, le point fixe est un centre ou un point elliptique stable.
- 3) si au moins une des valeurs propres a sa partie réelle strictement positive le point fixe est instable.

1.7 Matrice jacobienne

Définition 6:

La matrice jacobienne est la matrice des dérivées partielles du premier ordre d'une fonction vectorielle

Soit F une fonction d'un ouvert de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, une telle fonction est définie par ses m fonctions composantes à valeurs réelles :

$$F : \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

Les dérivées partielles de ces fonctions en un point M , si elles existent peuvent être rangées dans une matrice à m lignes n colonnes appelée matrice jacobienne de F

$$J_f(M) = \begin{pmatrix} \frac{df_1}{dx_1} & \dots & \frac{df_1}{dx_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{df_m}{dx_1} & \dots & \frac{df_m}{dx_n} \end{pmatrix}$$

Cette matrice est notée : $J_f(M)$.

1.8 La linéarisation

Nous désirons linéariser ce système autour d'un point de fonctionnement stationnaire stable correspondant à l'état x et u , s'il est un état stationnaire stable nous avons

$$\dot{X}=0 \quad f(x, u)=0$$

Supposons que par un changement de coordonnées le point fixe ait été ramené à l'origine :

$$F(0)=0$$

On trouve notre système linéaire :

$$\dot{X}= D f(0) x.$$

Où $D f(0)$ est la matrice Jacobéenne de $F(X)$ au point 0.

1.9 Flot

Définition7 : [4]

on appelle flot l'action du groupe additif $(\mathbb{R}, +)$ sur l'espace des phases noté M , le flot est donné d'une application définie par :

$$\Phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$$

$$(t, x) \rightarrow \Phi(t, x) = \Phi_t(x)$$

Qui vérifié

$$1. \quad \Phi(0, x)=x, \forall x \in M$$

$$2. \quad \Phi(t+s, x)=\Phi(s, \Phi_t(x)) \quad \forall t, s \in \mathbb{R}, \forall x \in M$$

1.10 Espace des phases :(espace d'état)

***Définition 8* : [4]**

Est l'ensemble des états possibles d'un système dynamique, on peut également le définir comme un espace abstrait dont chaque variable représente une dimension nécessaire à la description du système à moment donné, le degré de liberté caractérise l'espace des phases

Il représente l'ordre qui est égal à la dimension de l'espace d'Etat.

Chapitre 02

Attracteur de Lorenz

En 1983, Lorenz étudie numériquement un système de trois équations différentielles.

Censées représenter grossièrement la convection thermique dans l'atmosphère. C'est un exemple célèbre de système différentiel au comportement chaotique pour certaines valeurs du paramètre.

Les équations du modèle :

$$\begin{cases} X' = \sigma(y - x) \\ Y' = rx - y - xz \\ Z' = xy - bz \end{cases}$$

Les valeurs de σ et b sont fixées, $\sigma=10$, $b=\left(\frac{8}{3}\right)$

R est positif :

R est proportionnel au gradient thermique vertical imposé au fluide. σ au nombre de Prandtl et a à l'élongation de la boucle contenant le fluide.

La solution triviale $x=y=z=0$. (*fluide et au repos*)

Pour r grand, cet équilibre du fluide est instable.

2.1 Point d'équilibre

On cherche les point d'équilibre (x, y, z) vérifiant $\dot{x}=\dot{y}=\dot{z}=0$.

Pour $r < 1$ il n ya qui un seul point d'équilibre l'origine $(0,0,0)$ ety pour

$$p_0 = \begin{pmatrix} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{pmatrix}.$$

$r > 1$ il ya deux autres

$$\begin{cases} \sigma(y - x) = 0 & \dots\dots\dots (1) \\ rx - y - xz = 0 & \dots\dots\dots (2) \\ xy - bz = 0 & \dots\dots\dots (3) \end{cases}$$

de (1)

$$\Rightarrow \sigma y - \sigma x = 0$$

$$\Rightarrow \sigma x = \sigma y$$

$$\text{de (1)} \Rightarrow x = y$$

On met (1) dans (3) donne

$$z = \frac{xx}{b} = \frac{x^2}{b} \Rightarrow x^2 = zb$$

$$\Rightarrow x = \mp \sqrt{zb} \dots\dots\dots (4)$$

$$(1) \text{ dans (2) donne : } -x z + r x - x = 0$$

$$\Rightarrow -x z + x (r-1) = 0$$

$$\Rightarrow x z = x (r-1)$$

$$\Rightarrow z = r-1 \dots\dots\dots (5)$$

$$(5) \text{ dans (4) donne } x = \mp \sqrt{b(r-1)}$$

$$\text{De (1) on a : } x = y \Rightarrow y = \mp \sqrt{b(r-1)}$$

Les points fixes p_1 et p_2 sont donc

$$P_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{b(r-1)} \\ \sqrt{b(r-1)} \\ r-1 \end{pmatrix} \quad p_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{b(r-1)} \\ -\sqrt{b(r-1)} \\ r-1 \end{pmatrix}$$

Pour $r = 1$ $p_0 = p_1 = p_2$ donc

pour $r < 1$ il n'y a qu'un seul point fixe p_0 et

Pour $r > 1$ il y a trois points fixes p_0, p_1, p_2

2.2 La linéarisation

L'étude de la stabilité des points d'équilibre repose sur le signe de la partie réelle des valeurs propres de la matrice jacobienne A du système est :

$$DF \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dfx}{dx} & \frac{dfx}{dy} & \frac{dfx}{dz} \\ \frac{dfy}{dx} & \frac{dfy}{dy} & \frac{dfy}{dz} \\ \frac{dfz}{dx} & \frac{dfz}{dy} & \frac{dfz}{dz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r-z & -1 & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix}$$

Stabilité de l'équilibre nulle

Au point (0, 0,0) les valeurs propres λ de la jacobienne A pour p_0 :

$$A = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} = DF \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et comme}$$

$\det (DF-\lambda I)=0$ nous avons l'équation suivante :

$$\det \left(\begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \det \begin{pmatrix} -\sigma-\lambda & \sigma & 0 \\ r & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -b-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (-\sigma-\lambda) (-1-\lambda) (-b-\lambda) - \sigma (r (-b-\lambda))$$

$$\Rightarrow (-b-\lambda) ((-\sigma-\lambda) (-1-\lambda) - \sigma r)$$

$$(-b-\lambda) (\sigma+\sigma\lambda+\lambda+\lambda^2-\sigma r)$$

$$(-b-\lambda) (\lambda^2+\lambda (\sigma+1) +\sigma (1-r))$$

$$- (b+\lambda) (\lambda^2+\lambda (\sigma+1) +\sigma (1-r)) = 0 \dots\dots\dots(6)$$

La solution de (6) $\rightarrow - (b+\lambda) (\lambda^2+\lambda) \sigma+1) +\sigma (1-r) = 0$

$$\text{Donc } \left\{ \begin{array}{l} - (b+\lambda) = 0 \dots\dots\dots(1) \\ \vee \\ \lambda^2+\lambda (\sigma+1) +\sigma (1-r) = 0 \dots\dots\dots(2) \end{array} \right.$$

$$(1) \Rightarrow \lambda_3 = -b$$

$$(2) \Rightarrow \lambda^2+\lambda (\sigma+1) +\sigma (1-r) = 0$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{((\sigma + 1)^2 - 4(\sigma(1 - r)))}$$

$$\lambda_1 = \frac{-(\sigma+1)+\sqrt{((\sigma + 1)^2 - 4(\sigma(1 - r)))}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{-(\sigma+1)-\sqrt{((\sigma + 1)^2 - 4(\sigma(1 - r)))}}{2}$$

Tant que $0 < r < 1$, toutes les valeurs propres sont négatives : le point fixe est stable

Si $r = 1$ les valeurs propres sont : $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -(\sigma+1)$, $\lambda_3 = -b$

L'équilibre est instable

$$\lambda_1 = \frac{-(1+\sigma)+\sqrt{(1+\sigma)^2}}{2} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{-1-\sigma+1+\sigma}{2} = 0$$

Donc : $\lambda_1 = 0$

$$\lambda_2 = \frac{-(1+\sigma)-\sqrt{(1+\sigma)^2}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{-2(1+\sigma)}{2}$$

$$\Rightarrow \lambda_2 = -(\sigma+1)$$

$$\lambda_3 = -b$$

Pour $r > 1$

$$\lambda_1 = \frac{-(\sigma+1)+\sqrt{((\sigma+1)^2-4(\sigma(1-r)))}}{2} > 0$$

$$\lambda_2 = \frac{-(\sigma+1)-\sqrt{((\sigma+1)^2-4(\sigma(1-r)))}}{2} < 0$$

$$\lambda_3 = -b < 0$$

l'origine est devenue instable (col instable)

Pour $r < 1$

$$\lambda_1 = \frac{-(\sigma+1)+\sqrt{((\sigma+1)^2-4(\sigma(1-r)))}}{2} > 0$$

$$\lambda_2 = \frac{-(\sigma+1)-\sqrt{((\sigma+1)^2-4(\sigma(1-r)))}}{2} < 0$$

$$\lambda_3 = -b < 0$$

Donc $\lambda_3 < \lambda_2 < \lambda_1 < 0$ (nœud stable).

Pour les deux autres points d'équilibre, les valeurs propres de la jacobinne sont solution de l'équation en λ pour p_1, p_2

$$\text{DF} \begin{pmatrix} \sqrt{b(r-1)} \\ \sqrt{b(r-1)} \\ r-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & -\sqrt{b(r-1)} \\ \sqrt{b(r-1)} & \sqrt{b(r-1)} & -b \end{pmatrix}$$

$$\det (DF-\lambda I) = 0$$

$$\text{Det} \left(\begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & -\sqrt{b(r-1)} \\ \sqrt{b(r-1)} & \sqrt{b(r-1)} & -b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right) = 0$$

$$\text{Det} \begin{pmatrix} -\sigma-\lambda & \sigma & 0 \\ 1 & -1-\lambda & -\sqrt{b(r-1)} \\ \sqrt{b(r-1)} & \sqrt{b(r-1)} & -b-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (-\sigma-\lambda) ((-1-\lambda) (-b-\lambda) + b(r-1)) - \sigma((-b-\lambda) + b(r-1)) = 0$$

$$\Rightarrow -(\sigma+\lambda) ((1+\lambda) (b+\lambda) + b(r-1)) - \sigma ((-b-\lambda) + br-b) = 0$$

$$\Rightarrow -(\sigma+\lambda) (b+\lambda+b\lambda+\lambda^2+br-b) - \sigma (-b-\lambda+br-b) = 0$$

$$\Rightarrow -\lambda^3 - \lambda^2 (1+b+\sigma) - \lambda b (\sigma+r) - 2\sigma b (r-1) = 0$$

$$\Rightarrow +\lambda^3 + \lambda^2 (1+b+\sigma) + \lambda b (\sigma+r) + 2\sigma b (r-1) = 0$$

On peut simplifier ce calcul en utilisant le fait qu'il existe une valeur propre $\lambda_1=0$, si $r=1$ donc on peut supposer que $\lambda_1 \ll 1$ si $r-1 \ll 1$ on peut donc négliger λ_1^2 et λ_1^3 de l'équation $\lambda_1 \approx -\frac{2\sigma b (r-1)}{\sigma b + br} < 0$ pour $r > 1$

Les autres valeurs propres λ_2, λ_3 ne dépendent pas fortement de r , i.e. : $\lambda_2(r), \lambda_3 \approx \lambda_{2,3}(1) + 0(r-1)$, il suffit de déterminer leur valeur $r = 1$. En fait ce raisonnement est analogue à celui que l'on a fait pour p_0

$$-\lambda^2 - \lambda (\sigma+1+b) - (\sigma b+b) = 0$$

On résout donc

$$-\lambda^2 - \lambda (\sigma+1+b) - (\sigma b+b) = 0$$

$$\Delta = (\sigma + 1 + b)^2 - 4b(\sigma + 1)$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{(\sigma + 1 + b)^2 - 4b(\sigma + 1)}$$

$$\lambda_2 \approx -\frac{(\sigma + 1 + b) - \sqrt{(\sigma + 1 + b)^2 - 4b(\sigma + 1)}}{2} < 0$$

$$\lambda_3 \approx -\frac{(\sigma + 1 + b) + \sqrt{(\sigma + 1 + b)^2 - 4b(\sigma + 1)}}{2} < 0$$

$$\lambda_3 < \lambda_2 < \lambda_1 < 0 \text{ (nœud stable)}$$

Pour p_2

On peut chercher s'il existe une valeur critique de r pour la quelle les équilibres deviennent instables. la déstabilisation de ces équilibres par changement de signe d'un valeur propre réel est impossible car si $\lambda = 0$ on a forcément $r = 1$ on peut donc recherche pour quelles valeur de r on peut obtenir deux racines $i\omega$ et $-i\omega$ de partie réel nulle. En reportant $\lambda = i\omega$ dans l'équation.

$$\det (DF - \lambda I) = 0$$

$$\Rightarrow DF \begin{pmatrix} -\sqrt{b(r-1)} \\ -\sqrt{b(r-1)} \\ r-1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & \sqrt{b(r-1)} \\ -\sqrt{b(r-1)} & -\sqrt{b(r-1)} & -b \end{pmatrix} = 0$$

$$\det (DF - \lambda I) = 0$$

$$\text{Det} \left(\begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & -\sqrt{b(r-1)} \\ \sqrt{b(r-1)} & \sqrt{b(r-1)} & -b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right) = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} -\sigma-\lambda & \sigma & 0 \\ 1 & -1-\lambda & -\sqrt{b(r-1)} \\ \sqrt{b(r-1)} & \sqrt{b(r-1)} & -b-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

On a: $\det (DF-\lambda I) = 0$

$$\Rightarrow (-\sigma-\lambda) ((1+\lambda) (b+\lambda) + b(r-1) - \sigma ((-b-\lambda) + b(r-1))) = 0$$

$$\Rightarrow -(\sigma+\lambda) (br+\lambda+\lambda b+\lambda^2) - \sigma(br-2b-\lambda) = 0$$

$$\Rightarrow -\sigma br - \sigma\lambda - \sigma\lambda b - \sigma\lambda^2 - \lambda br - \lambda^2 - \lambda^2 b - \lambda^3 - \sigma br + 2b\sigma + \sigma\lambda = 0$$

$$\Rightarrow -\lambda^3 - \lambda^2 (\sigma+1+b) - \lambda (\sigma b + b r_C) + 2\sigma b (1-r_C) = 0$$

$$\Rightarrow -(iw)^3 - (iw)^2 (\sigma+1+b) - iw (\sigma b + b r_C) + 2\sigma b (1-r_C) = 0$$

$$\begin{cases} w^2 (\sigma+1+b) + 2\sigma b (1-r_C) = 0 \\ w^3 - w (\sigma b + b r_C) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} w^2 = \frac{2\sigma b (r_C-1)}{\sigma+1+b} \\ r_C = \frac{\sigma b + \frac{2\sigma b}{\sigma+1+b}}{\frac{2\sigma b}{\sigma+1+b} - b} \Rightarrow r_C = \frac{\sigma (\sigma+b+3)}{(\sigma-b-1)} \end{cases}$$

$$w = \pm \left(\sigma b + b \frac{\sigma b + \frac{2\sigma b}{\sigma+1+b}}{\frac{2\sigma b}{\sigma+1+b} - b} \right)$$

Etude du système de Lorenz :

Dans cette partie on va varier r pour voir les cas où $r < 1$, $r > 1$

On étudiera la programmation matlab.

```
Function [xvec, yvec, zvec, tvec] = Lorenz(p0, tmax, r, sigma,
b) ;
% une fonction qui calcule l'évolution
% le temps pour le système de Lorenz, avec condition
% initiale donnée, et paramètre r
% le pas de temps
dt=0.001;
tvec=0:dt:tmax;
n=length(tvec);
% initialisation pour le résultat
xvec=zeros(n,1);
yvec=zeros(n,1);
zvec=zeros(n,1);
% condition initiale
x=p0(1);
xvec(1)=x;
y=p0(2);
yvec(1)=y;
z=p0(3);
zvec(1)=z;
% boucle de simulation
% discrétisation de 'Euler explicite'
for ind=2:n
% calcul des dérivées temporelles
xdot=sigma*(y-x);
ydot=x*(r-z)-y;
zdot=x*y - b*z;
% marche un pas de temps
x=x+dt*xdot;
y=y+dt*ydot;
z=z+dt*zdot;
% mémorise l'évolution
xvec(ind)=x;
yvec(ind)=y;
zvec(ind)=z;
end
```

```

% tpl: attracteur de Lorenz
clear all; clf
r=35;
sigma=10;
b=8/3;
% position initiale
p0=[10 10 10];
% temps final
tmax=20;
% simulation
[x,y,z,t]=Lorenz(p0,tmax,r,sigma,b);
% évolution des trois coordonnées
subplot(3,1,1);
plot(t,x);
xlabel('t')
ylabel('x')
title('évolution de x y et z dans le temps');
grid on
subplot(3,1,2);
plot(t,y);
xlabel('t')
ylabel('y')
title('évolution de x y et z dans le temps');
grid on
subplot(3,1,3);
plot(t,z);
xlabel('t')
ylabel('z')

title('évolution de x y et z dans le temps');
grid on

```

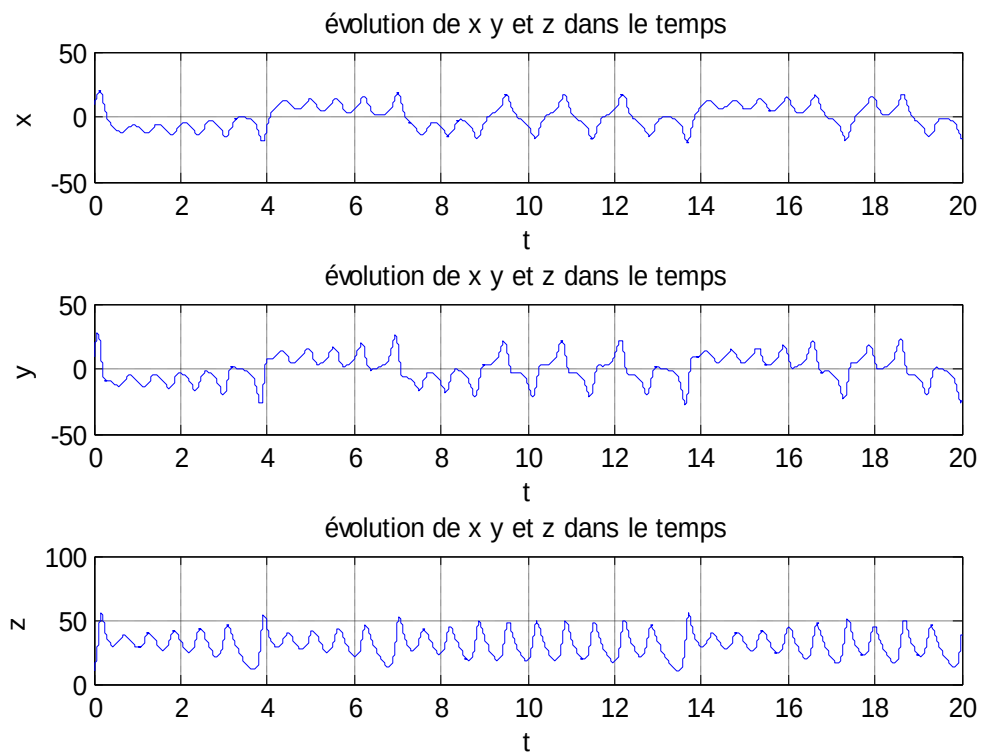


Figure 01. Evolution du paramètre x,y,z dans le temps

```
% étude du paramètre r
r=0.5
[x,y,z,t]=lorentz(p0,tmax,r,sigma,b);
plot(t,z)
grid on
xlabel('t');
ylabel('z');
title('r=0.5');
```

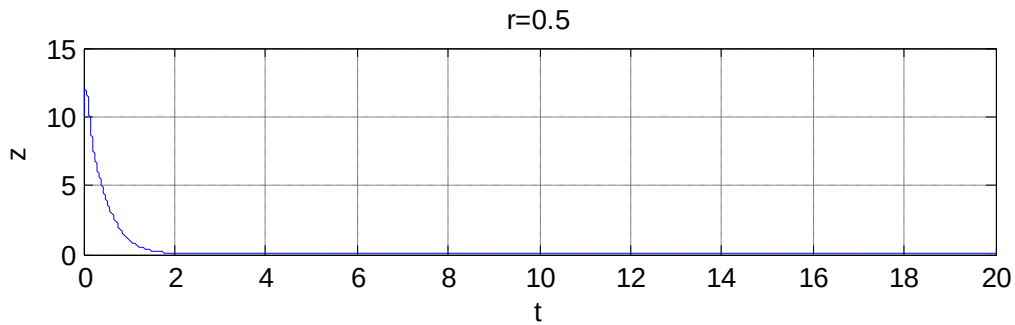


Figure 2.1. L'évolution dans le temps de la coordonnée z pour $r=0,5$

```
% etude du parametre r
r=5
[x,y,z,t]= lorentz(p0,tmax,r,sigma,b);

entz(p0,tmax,r,sigma,b);
plot(t, z)
grid on
xlabel('t');
ylabel('z');
title('r=5');
```

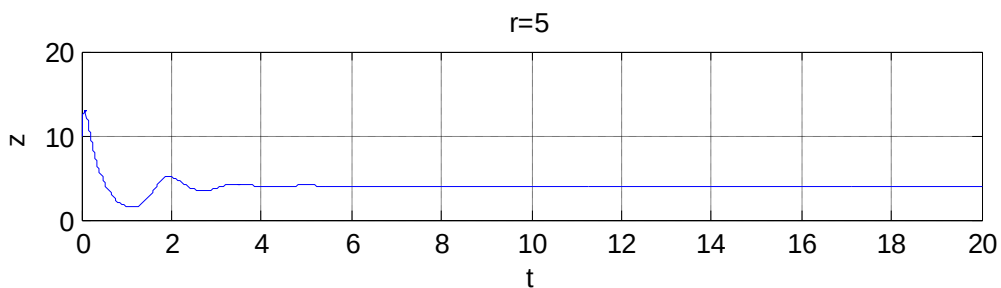


Figure 2.2. L'évolution dans le temps de la coordonnée z Pour $r=5$


```

% étude du paramètre r
r=15
[x, y, z, t]=lorentz(p0,tmax,r,sigma,b);
plot(t, z)
grid on
xlabel('t');
ylabel('z');
title('r=15');

```

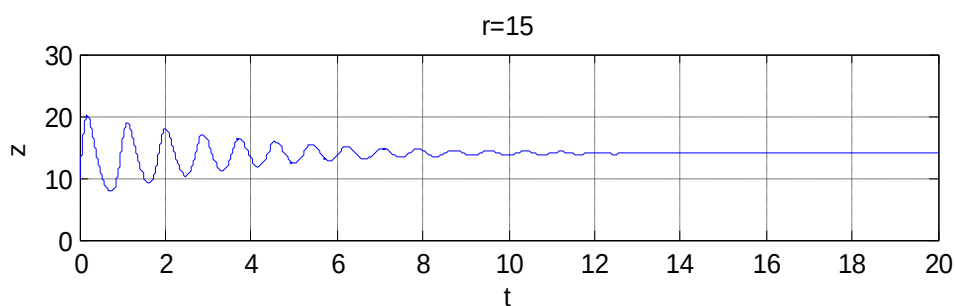


Figure 2.3. L'évolution dans le temps de la coordonnée z Pour $r=15$

```

% étude du paramètre r
r=25
[x, y, z ,t]= lorentz (p0,tmax,r,sigma,b);
subplot(4, 1,4);
plot(t, z)
grid on
xlabel('t');
ylabel('z');
title('r=25');

```

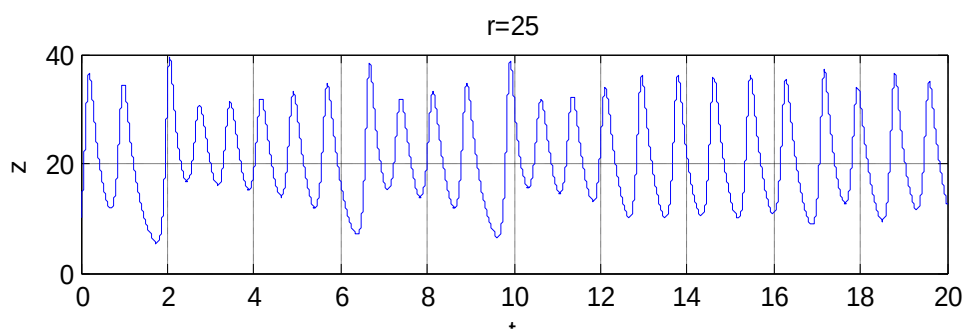


Figure 2.4. L'évolution dans le temps de la coordonnée z Pour $r=25$

```

% la trajectoire statique

clf
plot3(x, y, z)
box on
grid on
xlabel('x')
ylabel('y')
zlabel('z')
title('trajectoire en 3D');
view(18,22)
% animation de la trajectoire
for ind=1:5:length(t)
    sel=1:ind;
    plot3(x (sel), y (sel), z (sel))
    hold on
    plot3(x (ind), y (ind), z (ind), 'ro')
    hold off
    box on
    grid on
    xlabel('x')
    ylabel('y')
    zlabel('z')
    title('trajectoire en 3D');
    xlim([-40,40]);
    ylim([-40,40]);
    zlim([0,60]);
    view(18,22)
    drawnow
end

```

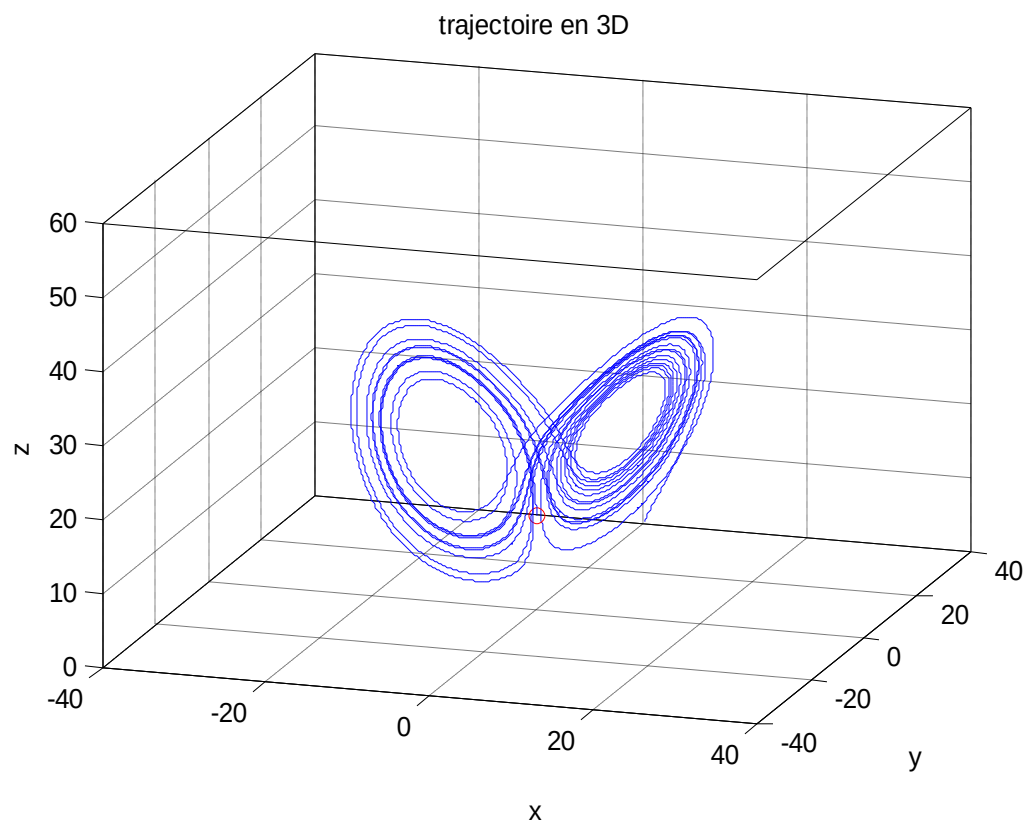


Figure 3.1. Trajectoire en 3D pour $r > 1$

Pour $r < 1$

```
% la trajectoire statique
clf
plot3( x , y , z)
box on
grid on
xlabel('x')
ylabel('y')
zlabel('z')
title('trajectoire en 3D');
view(18,22)

% animation de la trajectoire
for ind=1:5:length(t)
    sel=1:ind;
    plot3(x (sel), y (sel), z (sel))
    hold on
    plot3(x (ind), y (ind), z (ind), 'ro')
    hold off
    box on
    grid on
    xlabel('x')
    ylabel('y')
    zlabel('z')
    title('trajectoire en 3D');
    xlim([-40,40]);ylim([-40,40]);zlim([0,60]);
    view(18,22)
    drawnow
end
```

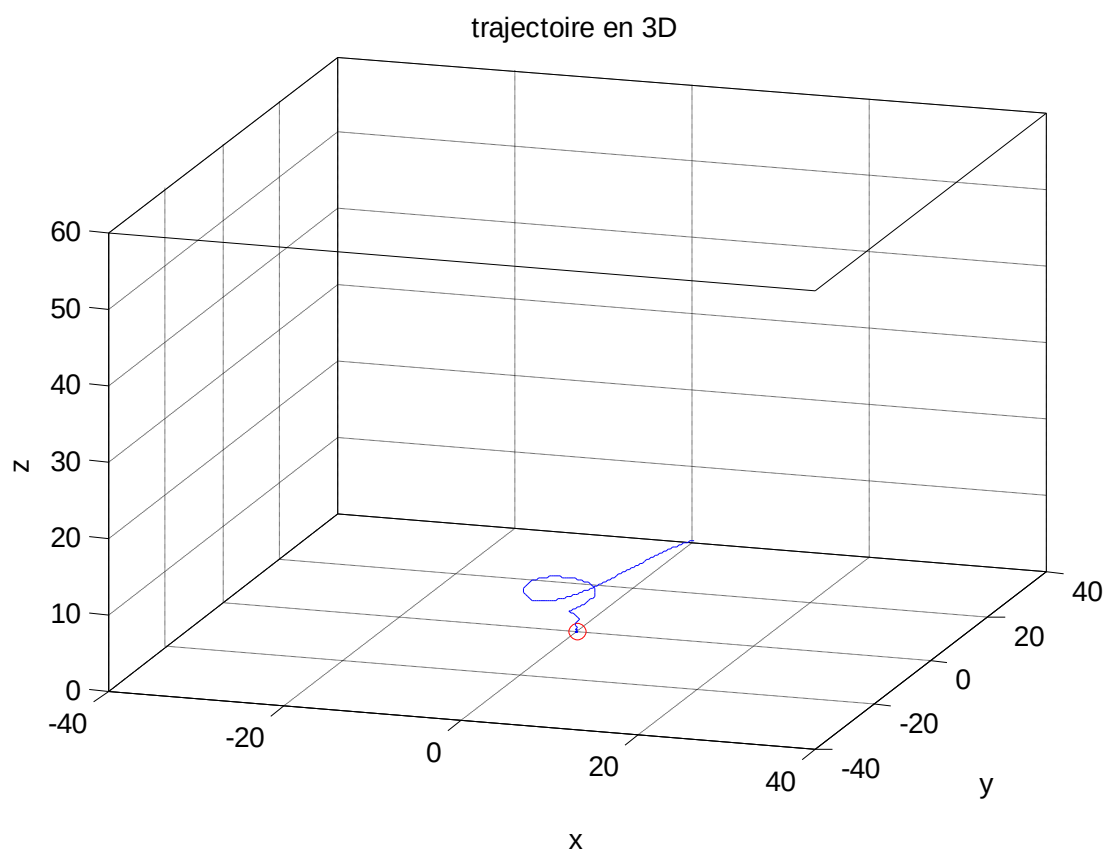


Figure 3.2. Trajectoire en 3D pour $r < 1$

Pour r=1

```
% la trajectoire statique

clf

plot3(x, y, z)
box on
grid on
xlabel ('x')
ylabel ('y')
zlabel ('z')
title('trajectoire en 3D');
view(18,22)
% animation de la trajectoire
for ind=1:5:length(t)
    sel=1:ind;
    plot3(x (sel), y (sel), z (sel))
    hold on
    plot3(x (ind), y (ind), z (ind), 'ro')
    hold off
    box on
    grid on
    ylabel ('x')
    ylabel ('y')
    zlabel ('z')
    title('trajectoire en 3D');
    xlim([-40,40]);
    ylim([-40,40]);
    zlim([0,60]);
    view(18,22)
    drawnow
end
```

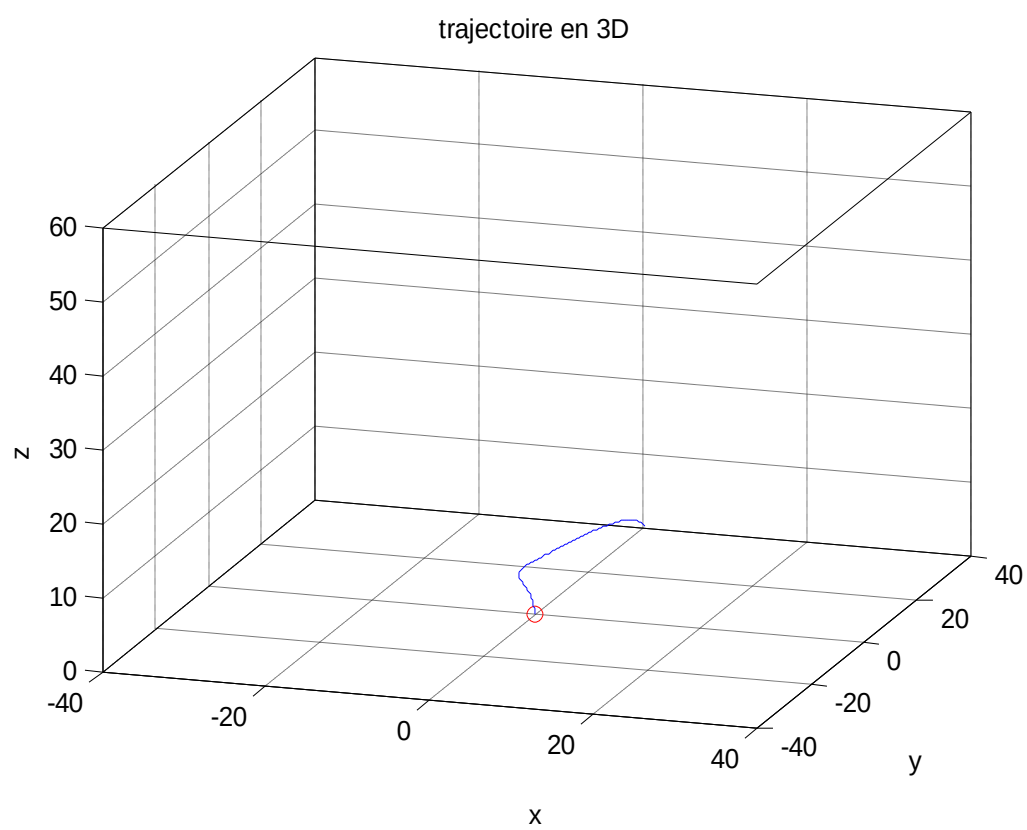


Figure 3.3. Trajectoire en 3D pour $r = 1$

Conclusion

Dans notre travail on a étudié un modèle d'un système dynamique chaotique celui de Lorenz .

Après étude de ce système à l'aide de la programmation Matlab on a trouvé que les résultats théoriques sont les mêmes que notre résultat pratique concernant les notions de stabilité .

Mais il serait bien d'étudier d'autre modèle chaotique avec d'autre application.

Référence

[1]] A.L Jai, E_zrriki, K_ztot. ; Système dynamique, analyse et contrôle des systèmes localisent .

[2] Anatole Katok et Bois hasselblatt ; La théorie modère de système dynamique, Cambridge(1996).

[3] Camille Laurent_ Gengoux , conférence prononcée à Chauvigny , 22 avril 2008.

[4] KESMIA MOUNIRA mémoire présente pour l'obtention du diplôme de magistère en mathématique «phénomènes chaotiques dissipatifs » Mai 2007.