République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l’Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

N° Ref :……………

**Centre Universitaire de Mila**

**Institut des sciences et de la technologie**

**Département de Mathématiques et Informatique**

# Projection Orthogonale

**Mémoire préparé En vue de l’obtention du diplôme de Licence Mathématiques**


**Préparé par :**

Guezira Wassila.

Laggoune Ibtissem.

Latreche Aziza.

**Encadré par:**

Boudjerida Nadjet


**Filière : mathématiques et Informatique**

**Spécialité : mathématiques**

**Année universitaire : 2012/2013**

# Remerciements

En premier lieu, on tenant compte à témoigner nos reconnaissance à dieu tout puissant, de nos avoir donné la possibilité de terminer ce travail.

Nous teignons à exprimer nos profond respect et de reconnaissance à la directrice de nos mémoirele professeur : BoudjeridaNadjat pour ses conseils et son encouragement durant la période de rédaction de ce mémoire.

Il est important pour nous de remercions nos famille nos très chers parents, frères, sœurs, collègues et amis, qui on toujours été une source inépuisable d'encouragements.

Et la plus importante, nous remercions aussi tout éducateurs, enseignants et professeurs qui nous appris un mot ou unelesson, et nous orienté sur le chemin de la connaissance et du savoir depuis le cycle primaire jusqu'au cycle universitaire.

Un grand merci à tous ceux qui ont participé de prés ou de loin à l'abonnissement de ce travail.

Nous souhaitons la réussite à tous les étudiants des sections Mathématique et Informatique.

# Table des matières

# Introduction Générale

Les espaces hilbertiens sont les espaces de Banach les plus réguliers, ils généralisent les espaces euclidiens étudiés en Algèbre et Géométrie sur deux points : tout d'abord, le corps de base peut être aussi bien $\mathbb{C}$ que $\mathbb{R}$ et surtout ils peuvent être de dimension infinie, on les retouve à la base de plusieurs théories mathématiques ils occupent une place centrale dans les applications des mathématiques à la physique : de la géométrie dans l'espace euclidien réel de dimension trois sur le quel est construit la mécanique classique, jusqu'à l'espace hilbertien de dimension infinie de la mécanique quadratique.....

En Géométrie élémentaire, si $P$ un plan et $x$ un point qui n'appartient pas à $P$, il existe un unique point $y \in P$ qui est le plus proche de $x$ au sens de la distance euclidien, ce point $y$ est en fait la projection orthogonale de $x$ sur ce plan, on va généraliser de manière abstraite cette propriété aux espaces de Hilbert.

Notre mémoire, comporte trois chapitre :

le premier chapitre est consacré à l'etude des espace de Hilbert ainsi quaux notions qui s'y rattachent et qui nous seront trés utiles tout au long de notre mémoire comme : le produit scalaire, l'identité du parllélogramme, celle de la mémoire et l'identité de la médiane et l'identité de la polarisation.

Dans le deuxiéme chapitre, on présente la compréhension de l'rthogonal, ensuite on démontre le théorème principal du chapitre : la projection sur un convexe complet d'un espace préhilbertien et aussi la projection orthogonale dans un espace vectoriel euclidien, et aprés sa la projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel complet.

Enfin, dans le troisiéme chapitre nous traitons quelque applications de ces théorèmes, cela nous amerie à parler des bases hilbertiennes qui généralise en un certai sens des bases algèbrique des espaces euclidien, et dont l'existance est assurée si l'espace est complet.

contrairement aux espaces euclidiens un vecteur se développe en une série dite de Fourier.

Finalement, on introduit le procédé d'orthogonalisation de "Gram-Schmidh" et quelques applications de ce procédé à la construction des polynomes orthogonaux.

**Notation**

$\mathbb{N}$ :Ensemble des entiers naturels.

$\mathbb{R}$ : Corps des nombres réel.

$\mathbb{Q}$ : Corps des nombres rationnelles.

$\mathbb{C}$ : Corps des nombres complexes.

$E$ : Espace vectoriel.

$\Bbbk$ : Corps des nombres réels ou bien des nombres complexes.

$\varphi$ :Forme hermitienne.

$[A]$ : Partie de $E$ désigne un convexe fermé.

$\overline{A}$ : Adhérence du sous-ensemble A.

$\overline{\lambda}$ : Conjugué.

$L(E)$ : L'ensemble des fonction linéaire.

$L^2([a,b],\mathbb{C})$ : Espaces des fonctions intégrables de $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Re : Partie réel.

Im : Partie imaginaire.

$|\,.\,|$: Module.

$\|.\|$ : La norme.

$\ker f$ : Noyau de l'application linéaire $f$.

# Chapitre 1

# Espace de Hilbert

Ce chapitre est consacré à l'etude des espaces hilbertiennes et les spécifications qui les caractérisent des espaces normé ; nous abordons la notion du produit scalaire et les importantes identités, à savoir l'identité du parallélogramme, l'identité de la médiane et l'identité de polarisation.

## 1.1 Formes Hermitiennes :

**Définition 1.1.1** *Soit $E$ un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$*
*on appelle forme hermitienne (ou forme sesquilinéaire)sur $E$ une application :*
$\begin{array}{rccc} \varphi : & E \times E & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (u,v) & \longmapsto & \varphi(u,v) \end{array}$ *vérifiant :*
$1 - \forall u, v \in E : \varphi(u+v, w) = \varphi(u,w) + \varphi(v,w)$
$2 - \forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall u, v \in E : \varphi(\alpha u, v) = \alpha \varphi(u,v)$
*($\varphi$ est linéaire par rapport à la première variable $u$)*
$3 - \forall u, v \in E : \varphi(u, v+w) = \varphi(u,v) + \varphi(u,w)$
$4 - \forall \alpha \in \mathbb{C} : \forall u, v \in E : \varphi(u, \alpha v) = \overline{\alpha} \varphi(u,v)$
*($\varphi$ anti-linéaire par rapport à la deuxième variable $v$)*
$5 - \varphi(u,v) = \overline{\varphi(v,u)}$

**Définition 1.1.2** *Une forme hermitienne $\varphi$ est dite* ***definie positive*** *si et seulement si :*
$$\left.\begin{array}{lll} \forall u \in E : & \varphi(u,u) \geq 0 & (\varphi \text{ positive}) \\ \varphi(u,u) = 0 & \Longleftrightarrow u = 0 & (\varphi \text{ est définie}) \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \varphi(u,u) > 0, \quad \forall u \neq 0$$

**Définition 1.1.3** *Soit $E$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ on appelle produit scalaire hermitien toute forme hermitienne $\varphi$, définie positive et on note : $\varphi(u,v) = \langle u, v \rangle$.*

**Remarque 1.1.4** *Dans le cas $E$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ :*
$\bullet \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u, v \in E : \varphi(u, \alpha v) = \alpha \varphi(u, v)$
$\bullet \varphi(u, v) = \varphi(v, u)$
*et on appelle forme bilinéaire symétrique.*
*-Un produit scalaire sur $(E, \mathbb{R})$ est une forme linéaire symétrique et définie positive.*
*-Soit $E$ un espace vectoriel réel, et soit $\langle , \rangle$ un produit scalaire sur $E$, on associe une norme$\|.\|$ posons :*

$$\forall u \in E : \|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle} = [\langle u, u\rangle]^{\frac{1}{2}}$$

**Exemple 1.1.5** *Soit $C[0,1]$ l'ensemble des fonction continues sur l'intervalle $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ on pose :*
$\varphi(f, g) = \int\limits_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt$ *est un produit scalaire.*

**Preuve.**
On montre que $\varphi(f, g)$ est un produit scalaire(hermitienne, définie positive)
1)**hermitienne :**

$$\begin{aligned}
\bullet \varphi(\alpha f, g) = \int_0^1 g(t)\overline{\alpha f(t)}dt &= \int_0^1 g(t)\alpha f(t)dt \\
&= \alpha \int_0^1 g(t)\overline{f(t)}dt \\
&= \alpha \varphi(f, g)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet \varphi(f, \alpha g) = \int_0^1 \alpha g(t)\overline{f(t)}dt &= \overline{\alpha}\int_0^1 g(t)\overline{f(t)}dt \\
&= \overline{\alpha}\varphi(f, g)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet \varphi(f, g) = \int_0^1 g(t)\overline{f(t)}dt &= \int_0^1 g(t)f(t)dt \\
&= \int_0^1 f(t)g(t)dt \\
&= \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt \\
&= \varphi(g, f) = \overline{\varphi(g, f)}
\end{aligned}$$

2)**définie positive :**

$$\begin{aligned}
\bullet \varphi(f, f) = \int_0^1 f(t)\overline{f(t)}dt &= \int_0^1 \mid f_1(t)\mid^2 + \mid f_2(t)\mid^2 dt \\
&= \int_0^1 \mid f_1^2(t) + f_2^2(t)\mid dt
\end{aligned}$$

on a :

$$\mid f_1^2(t) + f_2^2(t)\mid \geq 0 \implies \int \mid f_1^2(t) + f_2^2(t)\mid \geq 0$$

$$\begin{aligned}
\bullet \varphi(f, f) = 0 &\implies \int_0^1 f(t)\overline{f(t)}dt = 0 \\
&\implies \int f_1^2(t) + f_2^2(t)\,dt = 0 \\
&\implies \left.\begin{array}{ll} f_1(t) = 0 & ,\forall t \in [0,1] \\ f_2(t) = 0 & ,\forall t \in [0,1] \end{array}\right\} \implies f = 0_E
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} \bullet f_1(t) \longrightarrow \textit{partie réel} \\ \bullet f_2(t) \longrightarrow \textit{partie imaginaire} \end{cases} \blacksquare$$

**Proposition 1.1.6** (***L'inégalité de Cauchy Schwarz***)
*Soit $\varphi$ un produit scalaire sur un espace vectoriel $E$, alors :*

$$\forall x, y \in E : \ \varphi(x,y) \leq \sqrt{\varphi(x,x)}.\sqrt{\varphi(y,y)}$$

**Preuve.**
Soit $x, y \in E$, alors d'aprés la definition (1.1.4) on a :
$\varphi(x+\lambda y, x+\lambda y) \geq 0$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \varphi(x, x+\lambda y) + \varphi(\lambda y, x+\lambda y) \geq 0 \\
&\Longrightarrow \varphi(x,x) + \varphi(x,\lambda y) + \varphi(\lambda y, x) + \varphi(\lambda y, \lambda y) \geq 0 \\
&\Longrightarrow \varphi(x,x) + \varphi(x,\lambda y) + \lambda\varphi(y,x) + \lambda\varphi(y,\lambda y) \geq 0s \\
&\Longrightarrow \varphi(x,x) + \overline{\lambda}\varphi(x,y) + \lambda\varphi(y,x) + \lambda\overline{\lambda}\varphi(y,y) \geq 0 \\
&\Longrightarrow \varphi(x,x) + \overline{\lambda\varphi(y,x)} + \lambda\varphi(y,x) + |\ \lambda\ |^2\ \varphi(y,y) \geq 0 \\
&\Longrightarrow \varphi(x,x) + 2\operatorname{Re}(\lambda\varphi(y,x)) + |\ \lambda\ |^2\ \varphi(y,y) \geq 0 ....... (*)
\end{aligned}$$

On a deux cas :
$1^{ere}$**cas :** si $\varphi(y,y) = 0$
alors : $y = 0$, donc
$\varphi(x,y) = \varphi(0,x) = \varphi(x-x,x) = \varphi(x,x) - \varphi(x,x) = 0$
par conséquent l'inégalité de **Cauchy Schwarz** est vérifiée
$2^{ème}$ **cas** : si $\varphi(y,y) \neq 0$
posons : $\lambda = \frac{\varphi(x,y)}{\varphi(y,y)}$, $(\lambda \in \mathbb{k})$
En remplaçant dans$(*)$ on obtient

$$\varphi(x,x) + 2\operatorname{Re}\left(\frac{-\varphi(x,y)}{\varphi(y,y)}\varphi(y,x) + \frac{|\varphi(x,y)|^2}{|\varphi(y,y)|^2}\varphi(y,y)\right) \geq 0$$

D'où :

$$\begin{aligned}
&\varphi(x,x) + 2\operatorname{Re}\left(-\frac{|\varphi(x,y)|^2}{\varphi(y,y)}\right) + \frac{|\varphi(x,y)|^2}{\varphi(y,y)} \geq 0 \\
&\Longrightarrow \varphi(x,x) - \frac{|\varphi(x,y)|^2}{\varphi(y,y)} \geq 0 \\
&\Longrightarrow \varphi(x,x)\varphi(y,y) - |\ \varphi(x,y)\ |^2 \geq 0 \\
&\Longrightarrow |\ \varphi(x,y)\ | \leq \sqrt{\varphi(x,x)}\sqrt{\varphi(y,y)}. \ \blacksquare
\end{aligned}$$

## 1.2 Espace préhilbertien

**Définition 1.2.1** *On appelle espace préhilbertien complexe (ou réel) le coupl constitué par une espace vectoriel $E$ complexe (ou réel) et par un produit scalaire hermitien $\langle .,. \rangle$ on le notera $(E, \langle .,. \rangle)$.*
*-Les espaces préhilbertiens de dimension finie sont c'est de beaucoup préférable appelés :* ***espaces eucludiens****.*

***Exemple 1.2.2*** *$((L^2[0,1],\mathbb{C}),\langle f,g\rangle)$ est un espace préhilbertien.*

**Corollaire 1.2.3** *Sur un espace préhilbertien $(E,\langle .,.\rangle)$, la quantité $\|x\|=\langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}}$ définie une norme, pour laquelle le produit scalaire est continue :*

$$|\langle x,y\rangle|\leq\|x\|\|y\|$$

**Preuve.**

produit scalaire et norme dans $R^n$

$E=R$ muni du produit scalaire usuel

$\forall(x,y)\in E^2,\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^{n}x_iy_j$

la norme associée est la norme euclidienne :$\forall x\in E,\|x\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$

l'inégalité de cauchy-schwarz s'écrit :$\forall(x,y)\in E^2$

$\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)\leq\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right)$

Si un espace préhilbertien$(E,\langle .,.\rangle)$, la quantité $\|x\|=\langle x,x\rangle^{1/2}$ définit une norme pour la quelle le produit scalaire et continue $|\langle x,y\rangle|\leq\|x\|.\|y\|$

L'aplication ci-dessus est bien une norme en effet :

1)$\forall x\in E,\|x\|=0\Longrightarrow x=0_E$ car $\langle .,.\rangle$est définie positive.

2)$\forall\lambda\in C,\forall x\in E,\|x\|=\sqrt{\langle\lambda x,\lambda x\rangle}=\sqrt{\|\lambda\|^2\langle x,x\rangle}=|\lambda|\,\|x\|$

3)$\|x+y\|^2=\langle x+y,x+y\rangle=\langle x,x\rangle+\langle y,y\rangle+2\operatorname{Re}\langle x,y\rangle$

En utilisant l'inégalité de **Cauchy Schwarz**

$\operatorname{Re}\langle x,y\rangle\leq\langle x,y\rangle\leq\|x\|\|y\|$

On obtient

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2&\leq\|x\|^2+\|y\|^2+2\|x\|\|y\|\\&=(\|x\|+\|y\|)^2\end{aligned}$$

D'où :

$$\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$$

Ainsi : $\|.\|$ est bien une norme sur $E$. ■

**Remarque 1.2.4** *La continuité du produit scalaire encore une conséquence de l'inégalité de **Cauchy-Schwarz***

## 1.3 Identités remarquables

### 1.3.1 Identité du parallélogramme

Soit $E$ un espace vectoriel eucludien ou hermitien, $x$ et $y$ deux éléments

Alors : $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\|x\|^2+2\|y\|^2$

L'identité du parallélogramme signifie que, dans un parallélogramme, la somme des carrés des longueurs des diagonales est égale à la somme des carrés des longueurs des cotés

Soit $x, y \in E$ on sait que :

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle$$

et

$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y\rangle$$

donc, en sommant :

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

### 1.3.2 Identité de la médiane

Soit $a, b, c$ trois points d'un espace préhilbertien $E$ et $m$ le milieu du segment $[b, c]$ alors :

$$\|a-b\|^2 + \|a-c\|^2 = 2\|a-m\|^2 + \tfrac{1}{2}\|b-c\|^2.$$

### 1.3.3 Identité de polarisation

Soit $E$ un espace préhilbertien complexe, on a les identité suivantes :

1)$\forall x, y \in E,\ \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}(x, y) + \|y\|^2$

2)$\forall x, y \in E,\ \|x+iy\|^2 = \|x\|^2 - 2\operatorname{Im}(x, y) + \|y\|^2$

3)$\forall x, y \in E,\ \langle x, y\rangle = (\frac{1}{4}\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 - i\|x+iy\|^2 + i\|x-iy\|^2)$

## 1.4 Espace de Hilbert

**Définition 1.4.1** *Espace de Hilbert un espace préhélbertien qui est complet pour la distance associe à produit scalaire*

$$d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{\langle x-y, x-y\rangle}$$

1-Tout espace préhilbertien de démension finie est un espace de hilbert.

2-Tout espace vectoriel normé de dimension finie est complet.

3-Un espace de Hilbert est un cas particulier de espace de Banach.

**Exemple 1.4.2** *L'espace*$\left(\left(L^2[0,1], \mathbb{C}\right), \langle f, g\rangle\right)$ *est un espace de Hilbert* $(car\ un\ espace\ préhilbertien\ complet)$.

# Chapitre 2

# Théorème de projection

Dans ce chapitre nous traitons le théréme de projection qui concerne l'orthgonalité et encore le théorème de pythagore, et à la fin seront exposé le projection orthogonal sur un convexe complet, ainsi que le cas particulier de la projection sur un sous-espace vectoriel.

## 2.1 L'orthogonalité

**Définition 2.1.1** *Soit* $(E, \langle .,. \rangle)$ *un espace préhilbertienne, on dit que les deux vecteurs* $x$ *et* $y$ *sont dits orthogonaux :* $\langle x, y \rangle = 0$ *ce qu'on notera :* $x \perp y$
*-On dit que deux partie* $A \neq \varnothing$ *et* $B \neq \varnothing$ *de* $E$ *sont orthogonales si et seulement si :*
$\forall a \in A, \forall b \in B : a \perp b$ *i.e* $\langle a, b \rangle = 0$ *et on note* $A \perp B$.

**Définition 2.1.2** *Soit* $E$ *un espace préhilbertien.*
*Soit* $a \in E$*, on appelle orthogonale de* $a$*, note* $a^{\perp}$ *l'ensemble des vecteurs de* $E$ *orthogonale*

$$a^{\perp} = \{y \in E, \ \langle a, y \rangle = 0\}.$$

**Définition 2.1.3** *Si la forme bilinéaire n'est pas symétrique, il existe encore un cas ou il est possible de parler d'orthogonalité au sense précédent, celui des formes reflexives qui vérifier si et seulement si :*

$$\forall x, y \in E : \langle x, y \rangle = 0 \Longleftrightarrow \langle y, x \rangle = 0$$

**Définition 2.1.4** *Soit une partie non vide d'un espace préhilbertien* $E$.

On dit qu' un element $x$ de $E$ est orthogonal à $A$ s'il est orthogonal à chaque point $y$ de $A$ et on écrit :

$$x \perp A \Longleftrightarrow \langle x; y \rangle = 0, \ \forall y \in A$$

-Soit $A \neq \varnothing$ une partie quelconque de $E$, on note $A^{\perp}$ l'ensemble des $y \in E$ tels que $y \perp a$ pour tout $a \in A$ on appelle cet ensemble l'orthogonal de $A$ et on écrit : $A^{\perp} = \{y \in E : \langle y, a\rangle = 0, \forall a \in A\}$.

**Proposition 2.1.5** 1)*La relation $\perp$ est bien sur symétrique(i.e $x \perp y \Longrightarrow y \perp x$).*
2)*Le vecteur nul 0, est orthogonal à tous les vecteurs de E* $(\forall x \in E, x \perp 0)$.
3)*La relation $\perp$ n'est ni réflexive ni transitive.*
4)$\forall x, y \in E, \forall \alpha, \beta \in \Bbbk : x \perp y \Longrightarrow \alpha x \perp \beta y \left(\langle \alpha x, \beta y\rangle = \alpha \bar{\beta}\langle x, y\rangle = 0 \Longrightarrow \alpha x \perp \beta y\right)$.
5)$\forall x \in E, \forall \left(y_i\right)_{i \in \overline{1,n}} \in E, \forall \left(\alpha_i\right)_{i \in \overline{1,n}} \in \Bbbk : x \perp \left(y_i\right)_{i \in \overline{1,n}} \implies x \perp \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i y_i$
$\left(\langle x, \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i y_i\rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} \overline{\alpha_i}\langle x, y_i\rangle = 0 \implies x \perp \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i y_i\right)$.

**Proposition 2.1.6**
*$A^{\perp}$est un sous espace vectoriel fermé de E,si $\overline{vect}\,[A]$ est le pus petit s-espace fermé de E contenant A, on a alors $\overline{vect\,[A]} \subseteq A^{\perp\perp}$.*

$A^{\perp}$est clairement un s-espace vectoriel, pour montrer qu'il est fermé, on remarque qu'il s'ecrit sous forme d'intersection de nayaux des formes linéaires continues $L_u V = \langle u, v\rangle$ pour $u \in A, v \in E$

la fin de la proposition en resulte aisément

- Dans tous ce qui suite , $E$ designe un espace préhilbertien

**Remarque 2.1.7** *A et $A^{\perp}$ sont des parties orthogonales.*

**Proposition 2.1.8** *pour toute partie $A \neq \varnothing$ d'un espace préhilbertien E on a :*

$$A^{\perp} = \bigcap_{a \in A} a^{\perp}$$

**Preuve.**
On a : $A^{\perp} = \{y \in E : \langle y, a\rangle = 0, \forall a \in A\}$
et $y \in A^{\perp} \Longleftrightarrow \forall a \in A : \langle y, a\rangle = 0$
$\Longleftrightarrow \forall a \in A : y \in a^{\perp}$
$\Longleftrightarrow y \in \bigcap\limits_{a \in A} a^{\perp}$
D'où : $A^{\perp} = \bigcap\limits_{a \in A} a^{\perp}$ ∎

**Proposition 2.1.9**
*Soit A une partie de E alors on a :*

1)$E^{\perp} = \{0\}$
2)$A \subset A^{\perp\perp}$

**Proposition 2.1.10** *Soient $A$ et $B$ deux parties de $E$ alors on a :*
1)$B \subset A \Longrightarrow A^{\perp} \subset B^{\perp}$
*et donc, en notant* $A^{\perp\perp} = \left(A^{\perp}\right)^{\perp} : A \subset B \Longrightarrow A^{\perp\perp} \subset B^{\perp\perp}$
2)$A^{\perp} = \left[A^{\perp}\right] = \left[\overline{A}\right]^{\perp} = [A]^{\perp}$

**Preuve.**
1)Supposons que $B \subset A$, soit $x \in A^{\perp}$ alors :
$\forall y \in A : x \perp y$
$z \in B \implies z \in A \implies x \perp z$
$\implies x \in B^{\perp}$
D'où $A^{\perp} \subset B^{\perp}$
2)On a : $A \subset \overline{A}$
donc $\overline{A}^{\perp} \subset A^{\perp}$...... (d'aprés proprieté (1))
Réciproquement, soit $x \in A^{\perp}$ et $(y_n)$ une suite d'éléments de $A$ qui converge vers $y \in \overline{A}$
tel que : $\langle x, y\rangle = 0$
par continuité de l'application $\langle ., .\rangle$ on a :
$\langle x, y\rangle = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \langle x, y_n\rangle = 0$
donc : $x \in \overline{A}^{\perp}$
$A^{\perp} \subset \overline{A}^{\perp}$
D'où : $\overline{A}^{\perp} = A^{\perp}$ ■

## 2.2 Théorème de pythagore

Les vecteurs $x$ et $y$ sont orthogonaux dans $E$ si et seulement si :

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

on montre facilement par réccurrence sur $p \geq 2$, que si $x_{1,.......,}x_p$ sont deux à deux orthogonaux, alors :

$$\|\sum_{k=1}^{p} x_k\| = \sum_{k=1}^{p} \|x_k\|.$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

**Preuve.** On a :

$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle$

et comme : $x \perp y \Longrightarrow \langle x, y\rangle = 0$

donc

$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

le résultat s'en déduit le vecteur traitera le cas de $n$ vecteurs. ■

## 2.3 projection

**Définition 2.3.1** *Soit $A$ une partie non vide d'un espace préhilbertien $E$, soit $u \in E$*
*On dit qu'un élément $v$ de $A$ est une projection de $u$ sur $A$ si :*
$d(u, A) = \inf\limits_{a \in A} d(u, a) = \inf\limits_{a \in A} \|u - a\| = \|u - v\|$
*et on note : $v = p_A(u)$.*

### 2.3.1 projection sur un convexe complet d'un espace préhilbertien

**Définition 2.3.2** *Soit $E$ un espace vectoriel sur $\mathbb{k}$, et soit $A \subset E$. On dit que $A$ est convexe si :*
$\forall u, v \in A, \forall t \in [0,1] : tu + (1-t)v \in A.$

**Théorème 2.3.3** *Soit $E$ un espace préhilbertien réel, et soit $A \neq \not\emptyset$ une partie convexe et complète de $E$.*
1.***Existence :*** *pour tout $u \in E$ on a : $p_A(u) \neq \not\emptyset$.*

2.***Unicité :*** *pour tout* $u \in E$, $p_A(u)$ *est un singleton on note :* $v = p_A(u)$ *et ce point est appelé la projection de* $u$ *sur* $A$.
3.***Application projection*** *: ce qui procédé permet de considérer l'application :*

$$\begin{aligned} p_A : E &\to E \\ u &\mapsto p_A(u) \end{aligned}$$

$p_A(u)$ : le point unique
cette application est appelée la projection sur le convexe complet $A$.
4.**Caractérisations géométriques de la projection** : pour tout $u \in E$
On a $v = p_A(u)$ si est seulement si :
4.1.$v \in A$ et $\forall a \in A : \langle u - v, a - v\rangle \leq 0$ (l'angle est obtus).
4.2.$v \in A$ et $\forall a \in A : \langle u - a, v - a\rangle \geq 0$ (l'angle est aigu).

**Preuve.**
Soit $u \in E$ fixé, on pose : $d = d(u, A) = \inf\limits_{a \in A} d(u, a)$
1.Par définition de la borne inferieure, pour tout $n$ entier $\geq 1$, Il existe $a_n \in A$ tel que : $d \leq \|u - a_n\| \leq d + \frac{1}{n}$. Il existe donc une suite $(a_n)_n \geq 1$ d'éléments de $A$ vérifiant : $\lim\limits_{n \to \infty} (\|u - a_n\|) = d$. une telle suite est dite suite minimisante
2.On va démontrer que toute suite minimisante est de cauchy.
soit $\varepsilon\rangle 0$ donné, arbitraire Rappelons que dans un espace préhilbertien on a l'identité de la médiane :
$\forall x, y, z \in E : 4\|z - \frac{1}{2}(x + y)\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x - z\|^2 + \|y - z\|^2$
faisons dans cette identité : $z = u, x = a_n, y = a_m$
On a : $4\|u - \frac{1}{2}(a_n + a_m)\|^2 + \|a_n - a_m\|^2 = 2\|a_n - u\|^2 + 2\|a_m - u\|^2$
$a_n \in A$ et $a_m \in A$ implique, puisque $A$ est convexe :
$\frac{1}{2}(a_n + a_m) = \frac{1}{2}a_n + \left(1 - \frac{1}{2}\right)a_m \in A$

donc : $\|u-\frac{1}{2}(a_n+a_m)\| \geq \inf\limits_{a\in A} = \|u-a\| = d$, d'ou :
$\|a_n-a_m\|^2 \leq 2\|a_n-u\|^2+2\|a_m-u\|^2-4d^2$
comme la suite $(\|a_n-u\|)$converge vers $d$, Il existe un rang $N$ tel que pour tous $n$, $m \geq N$ on a :
$\|a_n-u\| \leq d+\varepsilon, \|a_m-u\| \leq d+\varepsilon.$
On a par conséquent : $\forall\varepsilon\rangle 0$, $\exists N$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall m\in\mathbb{N}^*$ : $n\geq N$ et $m\geq N \Longrightarrow \|a_n-a_m\|^2 \leq 2(d+\varepsilon)^2+2(d+\varepsilon)^2-4d^2 = 8d\varepsilon+4^2 = 4(2d+\varepsilon)\varepsilon$, et la suite$(a_n)$ est de cauchy.
3. $(a_n)$ est une suite de cauchy dans $A$ partie complète de $E$ : $(a_n)$ est danc convergente vers un élément $a\in A$ :

$$\lim_{n\to\infty}(a_n) = a \Longrightarrow \lim_{n\to\infty}(a_n-u) = a-u$$
$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty}(\|a_n-u\|) = \|a-u\|$$

mais $\lim\limits_{n\to\infty}(\|a_n-u\|) = d$. (suite minimisante)
d'où (unicité de la limite) :
$\|a-u\| = d.$
le point $a\in A$ appartient donc à $p_A(u)$.
4.Supposons qu'ils existent $a\in A$ et $b\in A$ tels que $\|u-a\| = \|u-b\| = d$.
la suite construite commme suit est une suite minimisante :
$a_1 = a$, $a_2 = a$, $a_3 = a$,...., $a_{2n} = b$, $a_{2n+1} = a$,...
donc cette suite est convergente, et comme les deux suites extraites$(a_{2n})_n$ et$(a_{2n+1})_n$ convergente vers $b$ et $a$ respectivement, on a nécessairement $a = b$. on a donc(2).
5.Supposons que $v = p_A(u)$, i.e. que $v$ vérifie : $v\in A$ et $\forall a\in A$ :
$\|u-v\| \leq \|u-a\|$.
soit $a\in A$ arbitraire, et soit $n\in N^*$ : $\frac{1}{n}a+\left(1-\frac{1}{n}\right)v = v+\frac{1}{n}(a-v)\in A$
car $A$ est convexe, D'où :

$$\forall a\in A, \forall n\in N^* : \|u-v\|^2 \leq \|u-\left(v+\tfrac{1}{n}(a-v)\right)\|^2 \Longrightarrow$$
$$\|u-v\|^2 \leq \|u-v\|^2-2\langle u-v,\tfrac{1}{n}(a-v)\rangle+\|\tfrac{1}{n}(a-v)\|^2$$
$$\leq \|u-v\|^2-\tfrac{2}{n}\langle u-v,a-v\rangle+\tfrac{1}{n^2}\|a-v\|^2$$

D'où : $0 \leq -2\langle u-v,a-v\rangle+\frac{1}{n}\|a-v\|^2$ et $\langle u-v,a-v\rangle \leq \frac{1}{2n}\|a-v\|^2$.
en faisant tendre $n$ vers $\infty$, il vient : $\forall a\in A$ : $\langle u-v,a-v\rangle \leq 0$.
6.supposons que $v\in A$ et que $\forall a\in A$ : $\langle u-v,a-v\rangle \leq 0, \forall a\in A$ :
$\langle u-a+a-v,a-v\rangle \leq 0 \Longrightarrow \langle u-a,a-v\rangle+\|a-v\|^2 \leq 0$
$\Longrightarrow \langle u-a,a-v\rangle \leq 0$, soit $\langle u-a,v-a\rangle \geq 0$. ■

**Remarque 2.3.4**

1)Les réalisations les plus fréquentes des hypothèses du théorème sont les suivantes :
**a.**$E$ est un espace de Hilbert réel et $A$ est une partie convexe et fermée de $E$.
**b.**$E$ est un espace préhilbertien réel et $A$ est une partie convexe est fermée contenue dans

un sous-espace vectoriel de dimention finie de $E$ sous ces hypothèses, en effet, $A$ est complète.
2)Les résultats $(1,2,3)$ du théorème s'étendent tels quels aux espaces préhilbertiens complexes, $(4,1)$ , $(4,2)$ s'étendent aussi au cas complexe en ajoutant Re (partie réelle) devant les produits scalaires.

**Proposition 2.3.5** *Soit $E$ un espace préhilbertien réel, $A \subset E$ un convexe complet non vide*
*L'application :* $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ u & \longmapsto & P_A(u) \end{array}$ *est une* ***contraction*** *:*
$\forall u,\ u' \in E : \|p_A(u') - p_A(u)\| \leq \|u' - u\|$

**Preuve.**
Soit $u$ et $u'$ dans $E$, et soient $p_A(u)$ , $p_A(u')$ leur projection respective sur $A$
D'après le théorème 1.6.3 $(4,1)$, on a :
$\forall a \in A : \langle u - p_A(u), a - p_A(u)\rangle \leq 0$ et $\langle u' - p_A(u'), a - p_A(u')\rangle \leq 0$
faisons $a = p_A(u')$ dans la première de ces deux inégalités, et : $a = p_A(u)$
dans la second, il vient :
$\langle u - p_A(u), p_A(u)\rangle \leq 0$ et $\langle u' - p_A(u'), p_A(u) - p_A(u')\rangle \leq 0$
D'où : $\langle [u - p_A(u)] - [u' - p_A(u')], p_A(u') - p_A(u)\rangle \leq 0$
Soit $\langle u - u', p_A(u') - p_A(u)\rangle + \|p_A(u') - p_A(u)\|^2 \leq 0$
Et : $\|p_A(u') - p_A(u)\|^2 \leq \langle u' - u, p_A(u') - p_A(u)\rangle \leq \|u' - u\|.\|p_A(u') - p_A(u)\|$
(d'aprés l'inégalité de **cauchy - schwarz**)
D'où $\|p_A(u') - p_A(u)\| \leq \|u' - u\|$. ■

### 2.3.2 projection orthogonale dans un espace vectoriel euclidien

Dans un espace vectoriel eucludien de dimension finie, nous savons projeter orthogonalement de façon unique un vecteur sur un sous-espace : nous"traçons"la perpendiculaire et de plus la longueur du segment ainsi créé est la plus courte distance entre
le point et le sous-espace. Les espaces de Hilbert possédent exactement la même propriété.
Représentons la géométrie du produit scalaire dans $\mathbb{R}^2$.

Les vecteures de la figure précédente vérifient (utilisons les propriétés d'un triangle) :
$\langle X, Y\rangle = \|X\|\|Y\| \cos(\theta) = \|X\|\|p_X(Y)\|$

$$\cos(\theta) = \frac{\langle X,Y\rangle}{\|X\|\|Y\|}$$

Lorsque les vecteurs sont unitaires $(\|X\| = \|Y\| = 1)$, nous avons

$$\langle X, Y\rangle = \cos(\theta) = \|p_X(Y)\|.$$

## 2.4 Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel complet

**Théorème 2.4.1**

*Soit $E$ un espace préhilbertien réel, et soit $F$ un sous-espace vectoriel complet de$E$, soit $u \in E$ quelconque $v = p_F(u)$*
*est caractérisé par :*
*$v$ est l'unique point de $F$ tel que : $u - v$ est orthogonal à $F$, soit :*
*$v \in F$ et $\langle u - v, x\rangle = 0, \forall x \in F$.*

**Preuve.**

Soit $v = p_F(u)$
D'aprés le théoréme (1.6.3) on a : $v \in F$ et $\forall x \in F : \langle u - v, x - v\rangle \leq 0$
Changeant $x$ en $(v + x)$, puis $x$ en $(v - x)$ [on peut car $v + x \in F$ et $v - x \in F$], il vient :
$\forall x \in F : \langle u - v, v + x - v\rangle = \langle u - v, x\rangle \leq 0$ et $\langle u - v, v - x - v\rangle = -\langle u - v, x\rangle \leq 0$, d'où :
$\forall x \in F : \langle u - v, x\rangle = 0$, on peut écrire : $u - v \in F^{\perp}$.
La réciproque est immédiate d'aprés le théorème1.6.3 $(4, 1)$ :
Soit $v \in F$ tel que $\langle u - v, x\rangle = 0$ pour tout $x \in F$, en particulier $\langle u - v, -v\rangle) = 0$ ; on en déduit, par addition, que $\forall x \in F : \langle u - v, x - v\rangle = 0$
On peut d'ailleurs aussi revenir à la définition de la projection :

$$\forall x \in F: \quad \|u-x\|^2 = \|(u-v)+(v-x)\|^2 = \|u-v\|^2 + 2\langle u-v, v-u\rangle + \|v-x\|^2$$
$$= \|u-v\|^2 + \|v-x\|^2$$

(car $v-u \in F \Longrightarrow u-v \perp v-x \Longrightarrow \langle u-v, v-x\rangle = 0$)

$\Longrightarrow \|u-x\|^2 = \|u-v\|^2 + \|v-x\|^2$

$\Longrightarrow \|u-x\|^2 \geq \|u-v\|^2$d'où : $\|u-v\|^2 \leq \|u-x\|^2$

$\Longrightarrow \|u-v\| \leq \|u-x\| \Longrightarrow \|u-v\| = \inf\limits_{x\in F} \|u-x\|$, on note $v = p_F(u)$. ■

**Remarque 2.4.2** 1.*Les parties complètes d'un espace complet sont les parties fermées.*
2.*Tout sous-espace vectoriel est évidemment une partie convexe.*

**Théorème 2.4.3**
*Soit $E$ un espace préhilbertien réel, et soit $F$ un sous-espace vectoriel complet de $E$*
1.*L'application $p_F : E \to F$, est linéaire et continue, de norme 1 :*
$\|p_F\|_{\pounds(E)} = 1$.
2. $\ker(p_F) = p_F^{-1}(\{0\}) = F^{\perp}$*et* $F^{\perp\perp} = F$.
3.$E = F \oplus F^{\perp}$ *(somme directe algèbrique).*
4.$\forall u \in E : \|u\|^2 = \|p_F(u)\|^2 + \|p_{F^{\perp}}(u)\|^2$.

**Preuve.**
1.$\forall u, v \in E$ et $\forall x \in F$ on a : d'aprés le théorème (2.4.1)
$\langle u - p_F(u), x\rangle = 0$ et $\langle u - p_F(v), x\rangle = 0$, donc : $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \langle \alpha u + \beta v - \alpha p_F(u) - \beta p_F(v), x\rangle =$
$\alpha\langle u - p_F(u), x\rangle + \beta\langle v - p_F(v), x\rangle = 0$
Et d'autre part : $\alpha p_F(u) + \beta p_F(v) \in F$, car $F$ est un sous-espace vectoriel, donc d'aprés le théorème2.4.1
$\alpha p_F(u) + \beta p_F(v) = p_F(\alpha u + \beta v)$, $p_F$ est linéaire; $p_F \in \pounds(E)$
D'aprés la proposition2.3.5 on a : $\forall u \in E : \|p_F(u) - p_F(0)\| \leq \|u-0\|$ et $p_F(0) = 0$ car $0 \in F$, donc :
$\|p_F(u)\| \leq 1\|u\|$ et $p_F$ est continue, de norme $\|p_F\|_{\pounds(E)} = \sup\limits_{\|u\|\leq 1} \|p_F(u)\| \leq 1$.Mais pour tout $u \in F$ tel que :
$\|u\| = 1$ on a $p_F(u) = u$ et $\|p_F\| \geq \|p_F(u)\| = \|u\| = 1$, d'où : $\|p_F\|_{\pounds(E)} = 1$.
2.$u \in \ker(p_F) \Longleftrightarrow p_{Fu} = 0 \Longleftrightarrow u - 0 = u$ orthogonal à $F$ (théorème 2.4.1)
Soit $u \in F^{\perp}$, donc : $\ker(p_F) = F^{\perp}$
Soit $u$ orthogonal à $F^{\perp}$ $\left(i.e.u \in F^{\perp\perp}\right)$, d'aprés le théorème(2.4.1)on a : $u - p_F(u) \in F^{\perp}$ d'où :
$\langle u - p_F(u), p_F(u)\rangle = 0$, car $p_F(u) \in F$ et $\langle u, u - p_F(u)\rangle = 0$
$\left(\text{car } u \in F^{\perp\perp} \text{ et } u - p_F(u) \in F^{\perp}\right)$, on en déduit :
$\langle u - p_F(u), u - p_F(u)\rangle = 0 = \|u - p_F(u)\|^2 \Longrightarrow u = p_F(u) \Longrightarrow u \in F$

On a donc : $F^{\perp\perp} \subset F$, et comme on a toujours$F \subset F^{\perp\perp}$.
3.Tout $u \in E$ peut s'écrire : $u = p_F(u) + [u - p_F(u)]$, avec $p_F(u) \in F$ et $u - p_F(u) \in F^{\perp}$
d'autre part, on a $F \cap F^{\perp} = \{0\}$, car si $u \in F \cap F^{\perp}$ :
$\langle u, u\rangle = \|u\|^2 = 0 \Longrightarrow u = 0$. par conséquent : $E = F \oplus F^{\perp}$.
4.$u = p_F(u) + [u - p_F(u)]$ et $(u - p_F(u) \perp p_F(u))$ impliquent (Le théorème de pythagore) :
$\|u\|^2 = \|p_F(u)\|^2 + \|u - p_F(u)\|^2 = \|(Id_E - p_F)(u)\|^2 + \|p_F(u)\|^2$
Si la projection $p_{F^\perp}$ existe $\left(F^{\perp}\text{complet n'est pas conséquence de } F \text{ complet}\right)$, on a :
$u - p_F(u) \in F$, soit : $\langle \text{u-p}_F(u), x\rangle = 0$ pour $x \in F$, et donc (le théorème 2.4.1)
$p_{F^\perp}(u) = u - p_F(u) = (Id_E - p_F)(u)$, soit : $p_{F^\perp} = Id_E - p_F$.
D'où dans ce cas : $\|u\|^2 \|p_F(u)\|^2 + \|p_{F^\perp}(u)\|^2$. ∎

**Remarque 2.4.4** *Pour tout sous-espace vectoriel $F$ d'un espace de Hilbert $E$ réel on a :*

$$F^{\perp\perp} = \overline{F} \text{ et } F^{\perp\perp\perp} = F^{\perp}$$

**Preuve.**
$\overline{F}$ est complet, et on peut appliquer (2) du théorème (2.4.3)
$(F)^{\perp\perp} = \overline{F}$ mais : $F \subset \overline{F} \Longrightarrow F^{\perp\perp} \subset \left(\overline{F}\right)^{\perp\perp} = \overline{F}$ d'où $F^{\perp\perp} \subset \overline{F}$
Et d'autre part , $F^{\perp\perp}$ étant fermé (d'après proposition 2.1.9). ∎

**Proposition 2.4.5** *Soit $A$ un sous-ensemble non vide d'un espace de Hilbert $E$. Alors :*

$$\overline{[A]} = E \Longleftrightarrow A^{\perp} = \{0\}$$

**Preuve.**
On a : $A^{\perp} = \overline{[A]}^{\perp}$ (d'après proposition 2.1.4) d'où :
$x \in A^{\perp} \Longleftrightarrow x \in \overline{[A]}^{\perp} \Longleftrightarrow x \in E^{\perp} \Longrightarrow x = 0$ donc $A^{\perp} = \{0\}$
Inversement, supposons que $A^{\perp} = \{0\}$ et $E \neq \overline{[A]}$
Il s'en suit qu'il existe un point $x$ de $E$ n'appartenant pas à $\overline{[A]}$
Le théorème de projection confère à $x'$ une unique projection $x$ sur $\overline{[A]}$ de sort que
$x' - x \in \overline{[A]}^{\perp} = A^{\perp} = \{0\}$
Or $\overline{[A]}^{\perp} = \{0\}$, donc : $x' - x = 0$
par suite $x' = x$ qui est absurde.
On conclut donc que $\overline{[A]} = E$. ∎

# Chapitre 3

# Bases Hilbertiennes

L'objectif de ce chapitre, la connaissance quelques applications de la projection orthogonale cela nous amène à étudier la notion des bases hélbertiennes, les series de Fourier, et à la fin nous trouvons la procédé d'orthogonalisation de **Gram-Schmidt.**

## 3.1 Familles orthogonales

**Définition 3.1.1** *Une famille de p vecteurs $\alpha_1, ....., \alpha_p$ est orthogonale si pour tout couple $(i, j)$ où $i$, $j$ sont deux éléments distincts de $\{1, ......, p\}$, Les vecteures $\alpha_i$ et $\alpha_j$ sont orthogonaux, c'est-à-dire tels que :*

$$\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = 0$$

**Proposition 3.1.2** *Si$(\alpha_i)_{i \in \overline{1.p}}$ est une famille de vecteurs(non nul) deux à deux orthogonaux, alors ces vecteurs sont **linéairement indépendants**.*

**Preuve.**

$\Big((\alpha_i)_{i\in\overline{1.p}}$ linéairement indépendants$\Big) \iff \forall\, (\lambda_i)_{i\in\overline{1.p}} \in \mathbb{k}$, $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i \alpha_i = 0 \implies \lambda_i = 0.$

On a : $\Big((\alpha_i)_{i\in\overline{1.p}}$ orthogonaux deux à deux$\Big) \iff \forall i \neq j, \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = 0$

si : $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i \alpha_i = \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + ........ + \lambda_n \alpha_p = 0$

alors pour tout $j = 1, ....., n$ on a :

$\langle \alpha_j, \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i \alpha_i \rangle = 0 \implies \sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_i \langle \alpha_j, \alpha_i \rangle = 0$

comme $\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle = \|\alpha_j\|^2 \neq 0$ on obtient $\alpha_i = 0, \forall j = \overline{1.p}$

d'où : $(\alpha_i)_{i=\overline{1.n}}$ sont linéairement indépendants. ■

**Proposition 3.1.3** *Soit* $(\alpha_i)_{i\in D}$ *une famille orthogonale d'un espace préhilbertien* $E$*, alors :*
*pour tout partie* $J$ *finie de* $D$ *et tout famille* $(\lambda_i)_{i\in J}$ *de scalaire on a :*

$$\|\sum_{i\in J}\lambda_i\alpha_i\|^2=\sum_{i\in J}\mid\lambda_i\mid^2\|\alpha_i\|^2$$

**Exemple 3.1.4** *On prend* $E=L^2([0,\pi],\mathbb{R})$
*avec :* $\langle g,h\rangle=\int_0^\pi g(x)\,h(x)\,dx$
*on considère dans* $E$ *la famille* $(g_n)_n$ *definie par :*

$$g_n(x)=\sin nx,\ n\geq 0.$$

pour tous $m,n\in\mathbb{N}$, $(m\neq n)$ on a :

$$\begin{aligned}\langle g_n,g_m\rangle&=\int_0^\pi\sin nx.\sin mxdx\\&=\frac{1}{2}\int_0^\pi(\cos(m-n)x-\cos(m+n)x)\,dx\\&=\frac{1}{2}\left[\begin{array}{c}\left(\frac{1}{m-n}\sin(m-n)\pi-\frac{1}{m+n}\sin(m+n)\pi\right)\\-\left(\frac{1}{m-n}\sin(m-n)0-\frac{1}{m+n}\sin(m+n)0\right)\end{array}\right]\\&=\frac{1}{2}(0-0)\\&=0\end{aligned}$$

## 3.2 Familles orthonormales

**Définition 3.2.1** *une famille de* $p$ *vecteurs* $\alpha_1,...,\alpha_p$ *est orthonormale si pour tout couple* $(i,j)$ *ou* $i$, $j$ *sont éléments de* $\{1,.....,p\}$ *vérêfiant :*
1)$\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle=0$ *si* $i\neq j$
2)$\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle=1$ *si* $i=j$
*On a imédiatement la propriété suivante :*
*Une famille orthonormale de* $p$ *vecteurs* $\alpha_1,......,\alpha_p$*est libre.*

**Remarque 3.2.2** *Si* $(\alpha_i)_{i\in D}$ *est une famille orthogonale, alors la famille* $(f_i)_{i\in D}$ *avec :* $f_i=\frac{\alpha_i}{\|\alpha_i\|}$ *est orthonormale.*

## 3.3 Familles sommables

La notion d'une famille sommable généralise la notion d'une série convergente.

**Définition 3.3.1** *Soit $E$ un espace hilbertienne, $D$ un ensemble quelconque et $(x_i)_{i\in D}$ une famille d'élement, on dit que la famille $(x_i)_{i\in D}$ est sommable, de somme $S \in E$ si :*
$\forall\varepsilon > 0,\ \exists J_0 \in P_f(D) : \forall J \in P_f(D) : J_0 \subset J.$
$\Longrightarrow\ \|S - S_j\| \leq \varepsilon$
*avec $P_f(D)$ l'ensemble des parties finies de $D$ et $S_j = \sum\limits_{i\in J} x_i$*
*$(S_J)_{J\in P_f(D)}$ l'ensemble des sommes partielles de $(x_i)_{i\in D}$*
*si $D = \mathbb{N}$ on a :*
*$\sum x_n$ converge vers $S \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : \|S - S_n\| < \varepsilon.$*

**Théorème 3.3.2** (***de Fibini***)
*Soit $(x_k)$ une famille sommable sur $D$, Alors :*

$$\|\sum_{k\in D} x_k\| \leq \sum_{k\in D} \|x_k\|$$

**Remarque 3.3.3** *Si $I = N$, on obtient*

$$\sum_{k\in D} x_k = \sum_{n=0}^{\infty} x_n = \lim \sum_{k=0}^{n} x_k$$

Désorais $(x_k)_{k\in D}$ disigne une famille d'éléments de $\mathbb{R}$

**Lemme 3.3.4** *Si $(x_k)_{k\in D}$est sommable, Alors $\{k \in D,\ x_k \neq 0\}$est au plus dénomrable*

**Proposition 3.3.5** *Une famille de nombres réels , positifs est sommable si et seulement si les sommes finies*
*sont majorées sa somme est alors, la forme superieure de l'ensemble des sommes finie*
*Une famile $(x_i)$ à termes réels est sommable si et seulement si elle est absolument sommable.*
*c'est -à-dire, si la famille$(\mid x_i \mid_{i\in D})$ est sommable*

**Criter de sommabilité de cauchy**

Soit $E$ un espace normé, et $(x_i)_{i\in D}$ une famille d'éléments de $E$, on dit que la famille $(x_i)_{i\in D}$ vérifie le criter de sommabilité de cauchy si :
pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie $J \in D$, telle que pour toute partie finie $k$ de $D$ disjointe de $J$, on dit :

$$\|\sum_{i\in D} x_i\| < \varepsilon$$

1.Toute famille sommable d'un espace normé vérifie le critére de sommabilité de cauchy.
2.Dans espace de Banach, tout famille vérifiant le critére de sommabilité de cauchy est sommable.

**Lemme 3.3.6** ***(Inégalité de Bessel)***
*Si $(e_i)_{i\in D}$ est une famille orthnormée d'éléments de $H$, Alors :*
*pour tout $x \in H$, La famille $(\mid \langle x, e_i\rangle \mid^2)_{i\in D}$ est sommable dans $\mathbb{R}$ et on a :*

$$\sum \mid \langle x, e_i\rangle \mid^2 \leq \|x\|^2.$$

**Preuve.**
Pour toute partie finie $J \in D$ posons :
$y = x - \sum\limits_{J\in D} \langle x, e_j\rangle e_j$
alors :$\langle y, e_k\rangle = 0$pour tout $k \in J$

$$\|x\|^2 \ = \ \|y\|^2 + \|\sum_{j\in J} \langle x, e_j\rangle e_j\|^2$$

donc :

$$= \ \|y\|^2 + \sum_{j\in J} \mid \langle x, e_j\rangle \mid^2$$

$$\geq \ \sum_{j\in J} \mid \langle x, e_j\rangle \mid^2$$

L'ensemble des somme finie d'éléments de la famille de nombres réel positifs $(\mid \langle x, e_j\rangle \mid^2)$ est donc majorée par la suite, cette famille est sommable dans $\mathbb{R}$ et on a bien :
$\sum\limits_{i\in D} \mid \langle x, e_i\rangle \mid^2 \leq \|x\|^2$ ∎

**Corollaire 3.3.7** *Soit $(e_i)_{i\in D}$ une base hilbertienne de l'espace de Hilbert $H$*
1.*pour tout $x \in H$, la famille $(\langle x, e_i\rangle e_i)$ est sommable dans $H$*
*on dit que $x_i = \langle x, e_i\rangle e_i$ sont les coordonnées de $x$ dans la base hilbertienne$(e_i)_{i\in D}$*
2.*pour tous $x, y \in H$, la famille $(\langle x, e_i\rangle\langle e_i, y\rangle)$ est sommable dans $\Bbbk$et on a :*

$$\sum \langle x, e_i\rangle\langle e_i, y\rangle = \langle x, y\rangle$$

qui s'écrit en coordonnées dans la base hilbertienne $(e_i)_{i\in D}$ :

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i\in D} x_i \overline{y}_i$$

## 3.4 Séries de fourier associées à une famille orthonrmale

**Définition 3.4.1** (***Coéfficients de Fourier***)
*Soit $E$ un espace préhilbertien, et soit $(a_i)_{i\in D}$ une famille orthonormale dans $E$, et soit $u \in E$, on appelle i-éme coéfficient de Fourier de $u$ par rapport à la famille $(a_i)_{i\in D}$ le nombre $C_i(u)$ défini par :*

$$C_i(u) \ = \ \langle u, a_i\rangle, \ i \in D$$

*la série* $\sum\limits_{i\in D} C_i\left(u\right)a_i = \sum\limits_{i\in D}\langle u, a_i\rangle a_i$ *est appellée série de Fourier de* $u$ *par rapport à la famille* $(a_i)_{i\in D}$

*si :*$D = N$, *la série* $\sum\limits_{i\in N} C_i\left(u\right)a_i$, *est dite de Fourier de* $u$ *suivante* $(a_i)_{i\in N}$

**Proposition 3.4.2** (***Inégalité de Bessel***)
*soit* $E$ *un espace préhilbertien, et soit* $(a_n)_{n\in N}$ *une suite orthonormale dans* $E$, *alors pour tout* $u \in E$, *la série* $\sum\limits_{n\in N} \mid C_n\left(u\right)\mid^2$ *converge et on a :*

$$\sum_{n\in N} \mid C_n\left(u\right)\mid^2 \quad \leq \quad \|u\|^2$$

**Preuve.**
Pour tout partie finie $J \in D$, posons :
$v = u - \sum\limits_{n\in N} \mid C_n\left(u\right)\mid^2 = u - \sum\limits_{n\in N}\langle u, e_n\rangle e_n$
alors $\langle v, e_k\rangle = 0$ pour tout $k \in N$.
donc :

$$\begin{aligned}\|u\|^2 &= \|v\|^2 + \|\sum_{n\in N}\langle u, e_n\rangle e_n\|^2\\ &= \|v\|^2 + \sum_{n\in N} \mid \langle u, e_n\rangle \mid^2\\ &\geq \sum_{n\in N} \mid \langle u, u_n\rangle \mid^2\end{aligned}$$

l'ensembles des sommes finies d'elements de la famille de nombres réels positifs $(\mid \langle u, e_n\rangle \mid)^2$ et donc majorée par la suite, cette famille est sommable dans $\mathbb{R}$ et on a bien
$\sum\limits_{n\in N} \mid \langle u, e_n\rangle \mid^2 \leq \|u\|^2$
donc

$$\sum_{n\in N} \mid C_n\left(u\right)\mid^2 \leq \|u\|^2 \quad \blacksquare$$

**Proposition 3.4.3** *Soit* $(a_i)_{i\in D}$ *une famille orthonormale dans un espace préhilbertien* $E$.
*soit* $u \in E$, *soit* $A$ *l'espace vectoriel engendré par* $(a_i)_{i\in J}$ *où* $J$ *est une patie finie de* $D$.*posons* $u' = p_A\left(u\right)$, *alors est donné par :*

$$u' = \sum_{i\in J} C_i\left(u\right)a_i.$$

**Preuve.**
Soit $u \in E, A = [\{a_i, i \in j\}]$,soit $v \in A$ alors :
$v = \sum\limits_{i\in j}\alpha_i a_i, \alpha_i \in \mathbb{k}$.

$$\|u-v\|^2 = \langle u - \sum_{i\in j}\alpha_i a_i, u - \sum_{i\in j}\alpha_i a_i\rangle$$

$$\Longrightarrow \|u-v\|^2 = \|u\|^2 - \sum_{i\in j}\overline{\alpha_i}C_i(u) - \sum_{i\in j}\alpha_i\overline{C_i(u)} + \sum_{i\in j} \mid \alpha_i \mid^2$$

$$= \|u\|^2 + \sum_{i\in j}(\alpha_i - C_i(u))\left(\overline{\alpha_i} - \overline{C_i(u)}\right) - \sum_{i\in j} \mid C_i(u) \mid^2$$

$$= \|u\|^2 - \sum_{i\in j} \mid \alpha_i - C_i(u) \mid^2 - \sum_{i\in j} \mid C_i(u) \mid^2$$

$$\geq \|u\|^2 - \sum_{i\in j} \mid C_i(u) \mid^2 = \|u - \sum_{i\in j} C_i(u)\, a_i\|^2$$

(d'aprés la preuve de la proposition inégalité de Bessel)

alors : $\forall v \in A : \|u-v\| \geq \|u - \sum_{i\in j} C_i(u)\, a_i\|$

donc : $\inf_{v\in A}\|u-v\| \geq \|u - \sum_{i\in j} C_i(u)\, a_i\|$..... (1)

d' autre part : $\sum_{i\in j} C_i(u)\, a_i \in A$

d'où : $\|u - \sum_{i\in j} C_i(u)\, a_i\| \geq \inf_{v\in A}\|u-v\|$..... (2)

(1)et(2) $\Longrightarrow \|u - \sum_{i\in j} C_i(u)\, a_i\| = \inf_{v\in A}\|u-v\|$

on déduit que : $\sum_{i\in j} C_i(u)\, a_i = P_A(u)$ ■

## 3.5 Bases hilbertiennes

**Définition 3.5.1** *Soit $H$ un espace deHilbert , une famille $(e_i)$ de vecteur de $H$ est dit :*

1− ***Orthogonale*** *si : $\langle e_i, e_j\rangle = 0$ pour tout $i, j \in D$ tel que :$i \neq j$.*

2− ***Orthonormée*** *si :$\langle e_i, e_j\rangle = 0$ pour tout $i, j \in D$ et $\langle e_i, e_i\rangle = 0$ pour tout $i \in D$*

3− ***Totale*** *si :$vect(e_i)$ est dense dans $H$*

*On appelle Base hilbertienne de $H$,une famille orthonormée totale de vecteur de $H$.*

**Exemple 3.5.2** *Les $e_n = (0, 0, 0, ....., 1, 0, 0, 0)$ constituant une base hilbertienne de l'espace de Hilbert $l^2 = l^2_{\mathbb{R}}$*

*On l'appelle le base canonique (ou naturelle) de cet espace ,les en constituant aussi une base*

*hilbertienne des sous-espace non complet de $l^2$ qui est $l^2_0$.*

$l^2 = \{u = (x_n) \in l^2 / \exists N(x), \forall x \in N\}$

$l^2_0 = \{u = (x_n) \in l^2 / \exists N(x), \forall x \in N, n \geq N \Longrightarrow x_n = 0\}$

**Proposition 3.5.3** *Toute famille orthonormée est libre.*

**Preuve.**

Une famille est dite libre si toute combinaison linéaire finie nulle est à coéfficients tous nulls.

Soit $J \subset D$ une partie finie et soit $\sum\limits_{j \in D} \alpha_j e_j$

une combinaison linéaire nulle alors pour tout $j_0 \in J$, on a :

$0 = \langle \sum\limits_{j \in J} \alpha_j e_j, e_{j_0} \rangle = \sum\limits_{j \in J} \alpha_j \langle e_j, e_{j_0} \rangle = \alpha_{j_0}$. ■

**Proposition 3.5.4** *Soit $H$ un espace préhilbertien, une famille $(e_i)_{i \in D}$ de vecteur de $H$ est une base hilbertienne si et seulement si c'est une famille orthormée maximale pour l'inclusion c'est-à-dire telle :si $(f_j)_{j \in J}$ est une autre famille vérifiant $\{e_i, i \in D\} \subset \{f_j, j \in J\}$ Alors, ces deux partie sont égales.*

**Corollaire 3.5.5** *Tout espace de Hilbert non réduit $\{0\}$ à posséde une base hilbertienne.*

**Théorème 3.5.6** *Une famille orthonormale $(x_k)_{k \in D}$ est une base hilbertienne si et seulement si le sous-espace vectoriel engendré par les $x_k$ est :*

*(Relation de perseval) une famille orthonormale $(x_k)_{k \in D}$ est unebase hilbertienne si et seulement si :*

$$\sum \mid \langle x_k, x \rangle \mid^2 = \|x\|^2.$$

**Proposition 3.5.7** *Deux bases hilbertiennes quelconque d'un meme espace de Hilbert ont meme cardinal.*

## 3.6 Le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt

**Théorème 3.6.1** *Soit $(e_1, ......, e_n)$ une famille libre de vecteurs de $E$ préhilbertien Alors,il existe une famille $(x_1, ......., x_n)$ orthonrmale de vecteur telle que :*
*$vect\,(e_1, ....., e_n) = vect\,(x_1, ....., x_n)$.*

**Preuve.**

Il suffit de fabriquer une famille orthonormale $(x_1, ....., x_n)$, la dimontion de $vect\,(e_1, ...., e_n)$ étant $n$,les $x_i$ sont non nuls.

la démonstration repose sur la fait qu'on ne change pas l'espace vectoriel engendré par une famille

la démonstration se fait par récurrence $n$

pour $n=1, x_1=\frac{e_1}{\|e_1\|}$ convient
on l'admet au rang $n$, on le montre au rang $n+1$

$$\begin{aligned} vect\left(e_1,...........,e_n,e_{n+1}\right) &= vect\left(x_1,......,x_n,e_1,.....,e_n,e_{n+1}\right) \\ &= vect\left(x_1,....,x_n,e_{n+1}\right) \end{aligned}$$

soit $x_{n+1}^*=e_{n+1}+\lambda_1x_1+...........+\lambda_nx_n$ avec
$\lambda_i=\frac{\langle e_{n+1},x_i\rangle}{\langle x_i,x_i\rangle}$, alors :$\langle x_{n+1}^*,x_i\rangle=0$ pour $1\le i\le n$
on pose $x_{n+1}=\frac{x_{n+1}^*}{\|x_{n+1}^*\|}$ avec toujours les même orthogonalités.

$$\begin{aligned} vect\left(x_1,......,x_n,e_{n+1}\right) &= vect\left(x_1,....,x_n,e_{n+1},x_{n+1}\right) \\ &= vect\left(x_1,....,x_n,x_{n+1}\right) \end{aligned}$$

la famille$(x_1,.....,x_n,x_{n+1})$ est bien orthonormae. ■

**Proposition 3.6.2** (***Orthogonalisation de Schmidt***)
*Soit $E$ un espace préhilbertien et $(e_1,....,e_p)$ une famille libre de $E$*
*La famille définie par récurrence par :*
$x=e_1$ *et pour tout* $k\in\{2,....,p\}$
$x=e_k-\sum\limits_{i=1}^{k-1}\frac{\langle x_i,e_k\rangle}{\|x_i\|^2}x_i$
*est une famille orthogonale qui engendre le meme espace vectoriel que la famille* $\{e_1,......,e_p\}$

**Exemple 3.6.3**
*on donne dans* $E=c\left(I,\mathbb{R}\right)$*, la famille :*

$$\left(a_i\left(t\right)\right)_{i=0,1,...}=\left(t^i\right)_{i=0,1,...}$$

*$I$ désignant un intervalle de $\mathbb{R}$ que l'on précisera selon les cas suivants :*
1)*Si $I=[-1,1]$ et $E$ est muni de produit scalaire.*

$$\langle f,g\rangle=\int\limits_{-1}^{1}f\left(t\right)g\left(t\right)dt$$

*Le procédé d'orthogonalisation de* ***Gram Schmidt*** *permet d'obtenir une famille de polynômes de* ***legendre****.*
***On calcule*** $b_0$, $b_1$, $b_2$ :
$\left(a_i\left(t\right)\right)_{i=0,1,...}=\left(t^i\right)_{i=0,1,...}$
$b_0=a_0=t^0=1.$
$b_1\left(t\right)=a_1{}_-P_{F_0}\left(a_1\right)=t-\lambda.$
***Calculons*** $\lambda$ :
$\langle b_1,b_0\rangle=0 \quad\Longleftrightarrow \int\limits_{-1}^{1}b_1\left(t\right)a_0\left(t\right)dt=0$

$\iff \int\limits_{-1}^{1} (t-\lambda)\, dt = 0$

$\iff \left[\frac{1}{2}t^2\right]_{-1}^{1} - [\lambda t]_{-1}^{1} = 0$

$\iff \frac{1}{2}(1-1) - \lambda(1+1) = 0$

$\iff -2\lambda = 0 \iff \lambda = 0.$

D'où $b_1(t) = t.$

$b_2(t) = a_2 - P_{F_1}(a_2) = t^2 - (\alpha t + \beta) = t^2 - \alpha t - \beta$

$\langle b_2, b_0\rangle = 0 \iff \langle b_2, 1\rangle = 0$

$\iff \int\limits_{-1}^{1} b_2(t)\, dt = 0$

$\iff \int\limits_{-1}^{1} (t^2 - \alpha t - \beta) dt = 0$

$\iff \int\limits_{-1}^{1} t^2 dt - \alpha \int\limits_{-1}^{1} t dt - \beta \int\limits_{-1}^{1} dt = 0$

$\iff \left[\frac{1}{3}t^3\right]_{-1}^{1} - \alpha\left[\frac{1}{2}t^2\right]_{-1}^{1} - \beta[t]_{-1}^{1} = 0$

$\iff \frac{1}{3}(1+1) - \frac{\alpha}{2}(1-1) - \beta(1+1) = 0$

$\iff \frac{2}{3} - 2\beta = 0 \iff -2\beta = -\frac{2}{3} \iff \beta = \frac{1}{3}.$

$\langle b_{2,} b_1\rangle = 0 \iff \langle b_2, t\rangle = 0$

$\iff \int\limits_{-1}^{1} b_2(t)\, t dt = 0$

$\iff \int\limits_{-1}^{1} (t^2 - \alpha t - \beta) t dt = 0$

$\iff \int\limits_{-1}^{1} (t^3 - \alpha t^2 + \beta t) dt = 0$

$\iff \int\limits_{-1}^{1} t^3 dt - \alpha \int\limits_{-1}^{1} t^2 dt - \frac{1}{3}\int\limits_{-1}^{1} t dt = 0$

$\iff \left[\frac{1}{4}t^4\right]_{-1}^{1} - \alpha\left[\frac{1}{3}t^3\right]_{-1}^{1} - \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}t^2\right]_{-1}^{1} = 0$

$\iff \frac{1}{4}(1-1) - \frac{\alpha}{3}(1-1) - \frac{1}{6}(1-1) = 0$

$\iff -\frac{2}{3}\alpha = 0 \iff \alpha = 0.$

D'où $b_2(t) = t^2 - \frac{1}{3}.$

2)Si $I = \mathbb{R}$ et

$$\langle f, g\rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, g(t)\, e^{-t^2} dt$$

On obtient une famille de polynôme d'**Hermite**.

3) Si I=$[0,+\infty]$ et

$$\langle f,g\rangle = \int_0^{+\infty} f(t)\,g(t)\,e^{-t^2}dt$$

On obtient une famille de polynômes de **Laguerre.**

On calcule les trois premiers éléments $b_0, b_1, b_2$.

On a : $(a_i(t))_{i=0,1,\ldots} = (t^i)_{i=0,1,\ldots}$

$b_0 = a_0 = t^0 = 1.$

$\mathrm{b}_1(t) = a_{1-}P_{F_0}(a_1) = t-\lambda.$

**Calculons** $\lambda$ **:**

On a : $\langle b_1, a_0\rangle = 0 \Longleftrightarrow \int_0^{+\infty} b_1(t)\,a_0(t)\,e^{-t}dt = 0 \Longleftrightarrow \int_0^{+\infty} (t-\lambda)\,e^{-t}dt$

En intégrant par parties : $\begin{matrix} u = t-\lambda & \Longrightarrow u' = 1 \\ v' = e^{-t} & v' = e^{-t} \end{matrix}$

$\langle b_1, a_0\rangle = 0 \Longleftrightarrow \left[-e^{-t}(t-\lambda)\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 0$

$\Longleftrightarrow \left[(\lambda-t)\,e^{-t}\right]_0^{+\infty} - \left[e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 0$

$\Longleftrightarrow -\lambda+1 = 0 \implies \lambda = 1.$

D'où $b_1(t) = t-1$

$b_2(t) = t^2-\alpha t-\beta$

$\langle b_2, a_0\rangle = 0 \Longleftrightarrow \langle b_2, 1\rangle = 0 \Longleftrightarrow \int_0^{+\infty} (t^2-\alpha t-\beta)\,e^{-t} = 0$

$\Longleftrightarrow \int_0^{+\infty} t^2e^{-t} - \alpha\int_0^{+\infty} te^{-t} - \beta\int_0^{+\infty} e^{-t} = 0$

$\begin{cases} u = t^2 & \Longrightarrow u' = 2t \\ v' = e^{-t} & \Longrightarrow v = -e^{-t} \end{cases}$

$\langle b_2, 1\rangle = 0 \Longleftrightarrow \left[-t^2e^{-t}\right]_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} te^{-t}dt$

$\begin{cases} u = t & \Longrightarrow u' = 1 \\ v' = e^{-t} & \Longrightarrow v = -e^{-t} \end{cases}$

$\langle b_2, 1\rangle = 0 \Longleftrightarrow \left[-t^2e^{-t}\right]_0^{+\infty} - \left[2te^{-t}\right]_0^{+\infty} - \left[2e^{-t}\right]_0^{+\infty} + \left[\alpha te^{-t}\right]_0^{+\infty} + \left[\alpha e^{-t}\right]_0^{+\infty} + \left[\beta e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 0$

$\Longleftrightarrow 2-\alpha-\beta = 0 \Longleftrightarrow -\alpha-\beta+2 = 0$

$\langle b_2, t\rangle = 0 \Longleftrightarrow \int_0^{+\infty} (t^2-\alpha t-\beta)\,te^{-t}dt = 0$

$\Longleftrightarrow \int_0^{+\infty} t^3e^{-t}dt - \alpha\int_0^{+\infty} t^2e^{-t}dt - \beta\int_0^{+\infty} te^{-t}dt = 0$

$\begin{cases} u = t^3 & \Longrightarrow u' = 3t^2 \\ v' = e^{-t} & \Longrightarrow v = -e^{-t} \end{cases}$

$\langle b_2, t\rangle = 0 \Longleftrightarrow \left[-t^3e^{-t}\right]_0^{+\infty} - \left[3t^2e^{-t}\right]_0^{+\infty} - \left[6te^{-t}\right]_0^{+\infty} - \left[6e^{-t}\right]_0^{+\infty} + \left[\alpha t^2e^{-t}\right]_0^{+\infty} +$

$$[2\alpha te^{-t}]_0^{+\infty} + [2\alpha e^{-t}]_0^{+\infty} + [\beta te^{-t}]_0^{+\infty} + [\beta e^{-t}]_0^{+\infty} = 0$$

$\Longleftrightarrow 6 - 2\alpha - \beta = 0 \Longleftrightarrow -2\alpha - \beta + 6 = 0$

D'où : $\begin{cases} -\alpha - \beta + 2 = 0 \\ -2\alpha - \beta + 6 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta - 2 = 0 & .....(1) \\ 2\alpha + \beta - 6 = 0 & .....(2) \end{cases}$

$(2) - (1) \Longleftrightarrow \alpha - 4 = 0 \Longleftrightarrow \alpha = 4.$

On remplace dans (2) on trouve : $\beta = -2.$

Donc : $b_2(t) = t^2 - 4t + 2.$

# Bibliographie


[1] "Jean Sait Raymand" Topologie calcule diffèrentiel et variable complexe.

[2] "Mohammed Hazi" Topologie au delà des travaux dirigés.

[3] "Georges Skandalis" Topologie et analyse 3ᵉannée.

[4] "Jean-Pierre Ramis et André Warusfel"Mathématiques tout-en-un pour la licence, niveau $L_2$.

[5] "Daniel Fredon, Myriem Maumy, Frédéric Bertrand"Mathématique algebre et géométrie en 30 fichies.

[6] "Boccara.N"Analyse fonctionnelle, paris, 1998.

[7] "Brezis.H"Analyse fonctionnelle, théorie et application, masson, paris, 1993.