



N° Ref :.....

Centre Universitaire de Mila

Institut des Sciences et de la Technologie

Département de Mathématiques et Informatique

Différents types des convergences, lois des grands nombres et théorème limites

**Mémoire préparé en vue de l'obtention du diplôme de Licence
en Mathématiques**

Préparé par:

**KHELLAF SIHAM
DIB LOUIZA
BOULKHETOUT HAKIMA**

Encadré par : AHMED GHEZAL

Filière: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques Fondamentales

Année Universitaire :2012/2013

Remerciement

*A l'issue de ce travail, nous tenons à remercier en premier lieu le dieu de nous
avoir donné l'aide afin de réaliser ce modeste travail.*

*Nous remercions mes chers parents, frères sœurs et à toute la famille pour leur
inestimable soutien.*

*On tient à remercier notre promoteur Mr. Ahmed Ghezal de nous avoir suivis,
orienté et soutenu durant toute cette année et durant la réalisation de
notre projet de fin d'étude.*

*Nous remercions également les membres de jury qui ont accepté
d'examiner et de juger ce modeste travail.*

*Enfin nous remercions toutes les profs qui enseignent de primaire
jusqu'à la dernière année de l'université, et toutes les personnes
qui de près ou de loin ont contribué à l'élaboration
de cette étude.*

Table des matières

1	Différents types des convergences	3
1.1	Convergence en loi	3
1.2	convergence en probabilité	5
1.3	la convergence en moyenne d'ordre k	6
1.4	convergence presque-sûre	7
1.5	converge faible	9
1.6	convergence étroite	9
1.7	liens entre les différents modes de convergence	9
1.7.1	liens entre la converge en probabilité et la converge en loi	9
1.7.2	lien entre la convergence en moyenne d'ordre k et la convergence en probabilité	11
1.7.3	lien entre la convergence presque sûre et la convergence en probabilité	14
2	Lois des grands nombres	16
2.1	lois faibles des grands nombres	16
2.2	Lois fortes des grands nombres	17
2.3	Loi du tout ou rien	18
2.4	Lemme de Borelle Cantelli	20
2.5	Théorème limite central	21
2.5.1	Converge vers loi de Poisson	22
2.5.2	Converge vers loi de Gauss	23
3	Convergences des martingales	25
3.1	Filtration	25
3.2	Martingale	25
3.2.1	Sous-martingale et sur-martingale	26
3.3	Inégalité de Doob	26

3.3.1	Inégalité maximale de Doob	26
3.3.2	Inégalité de moments de Doob	27
3.4	Théorèmes de convergence	28
Bibliographie		29

Introduction

La convergence en calcul des probabilités est une notion multiforme et difficile à définir, et en même temps les théorèmes de convergence représentent l'outil mathématique indispensable pour fonder le calcul des probabilités et la statistique mathématique, ainsi que leur connexion.

Cette mémoire comprend trois chapitres que nous ne pouvons plus changer l'ordre, en premier chapitre, nous représentons les différents types des convergences en représentant aussi l'outil mathématique (calcul des probabilités et statistique). Dans le deuxième chapitre, nous parlons des deux théorèmes limites qui sont la base de la théorie des probabilités et des statistiques, à savoir, la loi des grands nombres et le théorème des limites centrales, ainsi que le lemme de Borell et la loi de tout ou rien. Finalement dans le troisième chapitre nous étudions la convergence martingale, l'inégalité de Doob et le théorème de convergence.

Chapitre 1

Différents types des convergences

Le comportement asymptotique de suite de variable aléatoire, très importante en statistique. Les autres de convergence couramment utilisés sont : la convergence en loi, la convergence en probabilité, la convergence en moyenne d'ordre k , la convergence presque sûre et convergence étroite et convergence faible de suite de mesures bornées. Nous passons en revue ces différents types de convergence et nous signalerons éventuellement les relations qui existent entre elles.

1.1 Convergence en loi

Définition 1.1.1 Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variable aléatoire on dit que (X_n) converge en loi vers X si : en tout point de $x \in \mathbb{R}$ continuité de F . On a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x)$$

tel que

F_n : fonction de répartition de X_n .

F : fonction de répartition de X .

Notation 1.1.2 Si (X_n) converge en loi vers X . On note $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Exemple 1.1.3 pour tout $n \geq 1$, on se donne une variable aléatoire X_n de densité alors

$$f_n := x \mapsto \begin{cases} 1 - \cos(2n\pi x) & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La fonction de répartition de x est

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x - \frac{1}{2n\pi} \sin(2n\pi x) & \text{si } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \xrightarrow{n \rightarrow \infty}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

donc (X_n) converge en loi vers une variable aléatoire en loi sur $[0, 1]$.

Exemple 1.1.4 Soit la suite $X_n = (-1)^n X$ où X est une variable aléatoire normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$

$$F_n(t) = P(X \leq t) = P((-1)^n X \leq t).$$

Si n est paire

$$F_n(t) = P(X \leq t) = F_X(t).$$

Si n est impaire

$$F_n(t) = P(-X \leq t) = P(X \geq -t) = F_X(t).$$

$$\forall n \quad F_n(t) = F_X(t)$$

alors

$$\lim F_n(t) = F_X(t)$$

donc

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X.$$

Proposition 1.1.5 $\forall c \in \mathbb{R}, X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \text{ et } Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} c \Rightarrow \begin{cases} X_n \cdot Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \cdot c \\ X_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X + c \\ X_n/Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X/c \\ c \neq 0 \end{cases}$

Remarque 1.1.6

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \text{ et } Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Y \not\Rightarrow X_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X + Y.$$

1.2 convergence en probabilité

Définition 1.2.1 La suite de variable aléatoire $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire X si :

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} P\{|X_n - X| > \varepsilon\} = 0.$$

Notation 1.2.2 (X_n) converge en probabilité vers X on note

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} X.$$

Exemple 1.2.3 soit une suite (X_n) de variable aléatoire tel que chaque X_n pour valeur 0 et n et que

$$P(X_n = n) = \frac{1}{n}$$

donc

$$P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$$

on voit qu'elle converge en probabilité

$$\forall \varepsilon > 0, \forall n \geq \varepsilon, P(|X_n| > \varepsilon) = P(X_n = n) = \frac{1}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

donc

$$X_n \xrightarrow{p} 0.$$

Exemple 1.2.4 soit la suite

$$X_n = (-1)^n X$$

où X est une variable aléatoire normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$

$$P(|X_{2n+1} - X| > \varepsilon) = P(2|X| > \varepsilon) = P\left(|X| > \frac{\varepsilon}{2}\right) = \text{const}, \text{const} \neq 0$$

donc X_n ne converge pas vers X en probabilité.

Proposition 1.2.5 On pose

$$X_n \xrightarrow{p} X \text{ et } Y_n \xrightarrow{p} Y \Rightarrow \begin{cases} X_n Y_n \xrightarrow{p} XY \\ X_n + Y_n \xrightarrow{p} X + Y \\ X_n \div Y_n \xrightarrow{p} X \div Y \end{cases}$$

Proposition 1.2.6 Si (X_n) converge en probabilité vers X alors si de plus

$$X_n \xrightarrow{p} Y$$

alors

$$X = Y.$$

Preuve. Si

$$X_n \xrightarrow{p} X$$

on montrons que $X = Y$ on a

$$\{|X - Y| > \varepsilon\} \subset \left\{|X_n - X| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{|X_n - Y| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

donc

$$P\{|X - Y| > \varepsilon\} = 0$$

en faisant tendre n vers ∞ c'est vrai $\forall \varepsilon > 0$, donc

$$P[X = Y] = 1$$

c'est-à-dire

$$X = Y.$$

■

1.3 la convergence en moyenne d'ordre k

Définition 1.3.1 On dit que la suite de variable aléatoire $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en moyenne d'ordre k vers la variable aléatoire X si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|X_n - X\|_{L^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{E |X_n - X|^k\right\}^{\frac{1}{k}} = 0.$$

- Si $k = 1$ on dit que (X_n) converge en moyenne.
- Si $k = 2$ on dit que (X_n) converge en moyenne quadratique.

Notation 1.3.2 On dit que (X_n) converge en moyenne d'ordre k vers X on note

$$X_n \xrightarrow{L^k} X.$$

On dit que (X_n) converge en moyenne quadratique vers X , on note

$$X_n \xrightarrow{m.q} X.$$

Exemple 1.3.3 Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ variable aléatoire telle que

$$P(X_n = 1) = \frac{1}{n},$$

$$P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}.$$

Alors

$$E(X_n) = \sum_{i=1}^n x_i P(x_i) = 1 \times \frac{1}{n} + 0 \times \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n) = 0 \Rightarrow (X_n) \text{ converge en moyenne.}$$

Proposition 1.3.4 la convergence en moyenne d'ordre k entraîne la convergence en probabilité si

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^k} X$$

alors

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} X.$$

Preuve. Il suffit d'appliquer l'inégalité de Markov soit X variable aléatoire à valeur dans un espace dénombrable $\mathbb{E}$ avec $\mathbb{E} \subset \bar{\mathbb{R}}$ alors pour toute $\varepsilon > 0$

$$P(|X_n - X| \geq \varepsilon) \leq \frac{E[|X_n - X|^k]}{\varepsilon^k} = \frac{\|X_n - X\|^k}{\varepsilon^k} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

■

1.4 convergence presque-sûre

Définition 1.4.1 On dit que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variable aléatoire converge presque-sûrement vers la variable aléatoire s'il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que

$$P(A) = 1$$

et $\forall \omega \in A$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega).$$

On dit que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variable aléatoire converge presque-sûrement de Cauchy s'il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que

$$P(A) = 1$$

et $\forall \omega \in A, X_n(\omega)$ est de Cauchy c'est-à-dire

$$X_n - X_m \xrightarrow[n, m \rightarrow \infty]{p.s} 0$$

Une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge presque-sûrment vers X si la convergence est vraie avec une probabilité 1

$$P\left(\omega \in \Omega \left(\lim_{n \rightarrow \infty} |X_n(\omega)| \right)\right) = X(\omega) = 1.$$

Notation 1.4.2 On note la convergence presque-sûre

$$X_n \xrightarrow{p.s} X.$$

Exemple 1.4.3 Soit u la variable aléatoire uniforme sur $[0, 1]$, et $Z_n = 1_{\{u \leq \frac{1}{n}\}}$;

$$P(Z_n = 1) = \frac{1}{n}, P(Z_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$$

donc Z_n converge presque-sûrment vers 1.

Proposition 1.4.4 Soit f une fonction

$$X_n \longrightarrow X$$

presque-sûrement alors

$$f(X_n) \longrightarrow f(X)$$

presque-sûrement continue.

Preuve. Soit N l'ensemble des événements ω tel que

$$X_n(\omega) \not\rightarrow X(\omega)$$

si $\omega \notin N$ par continuité de f

$$\lim f(X_n(\omega)) = f(\lim X_n(\omega))$$

comme $\omega \notin N$

$$\lim X_n(\omega) = X(\omega).$$

On note

* μ_0 : ensembles des mesures bornées sur $\mathbb{R}$.

* $\varphi_0(\mathbb{R})$: ensembles des fonctions réels continues sur $\mathbb{R}$ et tend vers 0 à l'infini
(i.e. $\lim_{|X| \rightarrow \infty} f(X) = 0$).

■

1.5 converge faible

Définition 1.5.1 Une suite (μ_n) d'éléments de $\mathcal{M}_0$ converge faiblement vers une mesure μ de $\mathcal{M}_0$ si $\forall f \in \varphi_0(\mathbb{R})$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f d\mu_n = \int f d\mu.$$

Exemple 1.5.2 Soit μ_n la mesure de Dirac. $\forall f \in \varphi_0(\mathbb{R})$

$$\int f d\mu_n = f(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 = \int f d\mu \text{ où } \mu = 0.$$

Ceci constitue un exemple d'une suite de mesure de probabilité qui converge faiblement vers une mesure qui n'est pas une probabilité d'où la notion :

1.6 convergence étroite

Définition 1.6.1 une suite (μ_n) de mesure de $\mathcal{M}_0$ converge étroitement vers la mesure μ de $\mathcal{M}_0$ si μ_n converge faiblement vers μ et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(\mathbb{R}) = \mu(\mathbb{R}).$$

Notation 1.6.2 μ_n converge vers μ en étroite on note $\mu_n \xrightarrow{e} \mu$.

Remarque 1.6.3 i) Si (μ_n) est une suite de mesure de probabilité et μ est une probabilité alors μ_n converge faiblement vers μ équivaut μ_n converge étroitement vers μ

ii) Si (μ_n) est une suite de mesure de probabilité alors (μ_n) converge étroitement vers μ seulement si (μ_n) converge faiblement vers μ est une probabilité.

1.7 liens entre les différents modes de convergence

1.7.1 liens entre la convergence en probabilité et la convergence en loi

Proposition 1.7.1 Si $X_n \xrightarrow{p} X$ alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Preuve. Soit $f \in \varphi_b(\mathbb{R})$ (l'ensemble de fonction continue et bornée réel) montrons que

$$\int f dp_{X_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int f dp_X$$

on encore que

$$\int f(X_n) dp \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int f(X) dp$$

comme $f \in \varphi_b(\mathbb{R})$, alors f est uniformément continue d'où :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, |X - Y| < \delta \Rightarrow |f(X_n) - f(Y)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall X$$

donc

$$\left| \int f(X_n) - f(X) dp \right| \leq \int_{\{|X_n - X| < \delta\}} |f(X_n) - f(X)| dp + \int_{\{|X_n - X| > \delta\}} |f(X_n) - f(X)| dp$$

donc

$$\left| \int f(X_n) - f(X) dp \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2 \|f\| P\{|X_n - X| > \delta\}.$$

Mais $X_n \xrightarrow{p} X$ entraine le résultat. ■

Proposition 1.7.2 Si $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} a$ (conts) alors $X_n \xrightarrow{p} a$.

Preuve. Soit $F(X_n)$ la fonction de répartition de X_n et soit $F(X)$ la fonction de répartition de X choisissons $\varepsilon > 0$, de sorte que $a + \varepsilon$ et $a - \varepsilon$, soient des points de continuité de F

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|X_n - a| > \varepsilon\} = \lim_{n \rightarrow \infty} P\{|X_n < a - \varepsilon|\} + P\{|X_n > a + \varepsilon|\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(a - \varepsilon) + \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - F_{X_n}(a + \varepsilon))$$

$$= F_X(a - \varepsilon) + (1 - F_X(a + \varepsilon)) \quad \text{car } P_{X_n} \xrightarrow{e} P_X$$

entraine

$$F_{X_n} \xrightarrow{\mathcal{L}} F_X = F.$$

Mais

$$F(X) = \begin{cases} 1 & \text{si } a < X \\ 0 & \text{si } a \geq X \end{cases}$$

d'où

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \{ |X_n - a| > \varepsilon \} = 0 + 1 - 1 = 0.$$

■

1.7.2 lien entre la convergence en moyenne d'ordre k et la convergence en probabilité

Proposition 1.7.3 Si $X_n \xrightarrow{L^k} X$ alors $X_n \xrightarrow{p} X$.

Preuve. Soit $\delta > 0$, montrons que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P (|X - X_n| > \delta) = 0$$

si

$$X_n \xrightarrow{L^k} X$$

alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int |X - X_n|^k dp = 0.$$

Mais

$$\int |X_n - X|^k dp = \int_{|X - X_n| > \delta} |X_n - X|^k dp + \int_{|X_n - X|^k \leq \delta} |X_n - X|^k dp$$

Donc

$$\int |X_n - X|^k dp \geq \int_{|X_n - X| > \delta} |X_n - X|^k dp \geq \delta^k P \{ |X_n - X| > \delta \}.$$

Par conséquent

$$0 \leq P \{ |X_n - X| > \delta \} \leq \frac{1}{\delta^k} \int |X_n - X|^k dp \xrightarrow{p} 0.$$

■

Remarque 1.7.4 Si Y est une variable aléatoire réel P intégrable alors $\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0$

$$\int_{(|Y| > M)} |Y| dp < \varepsilon.$$

Si X est une variable aléatoire réel P intégrable alors $\forall \varepsilon > 0, \exists \gamma > 0/$

$$P(A) < \gamma \Rightarrow \int_A |X| dp < \varepsilon.$$

Définition 1.7.5 La suite de variable aléatoire réel (X_n) est dite équi-intégrable ou uniformément intégrable si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\int_{(|X_n|>M)} |X_n| dp < \varepsilon \left(c'est\text{-}\grave{a}\text{-}dire \sup_n \int_{|X_n|>M} |X_n| dp \xrightarrow{M \mapsto \infty} 0 \right).$$

Toute suite finie de variable aléatoire réel intégrable et équi-intégrable.

Proposition 1.7.6 $\circ$ Si $X_n \xrightarrow{L^1} X$ alors (X_n) est équi-intégrable.

$\circ$ Si $X_n \xrightarrow{P} X$ et si (X_n) est équi-intégrable alors $X_n \xrightarrow{L^1} X$.

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$, et soit $M_0 > 0$

$$\begin{aligned} M_0 P[|X_n| \geq M_0] &\leq \int_{|X_n| \geq M_0} |X_n| dp \leq \int_{|X_n| \geq M_0} |X_n - X| dp + \int_{|X_n| \geq M_0} |X| dp \\ &\leq \int_{\Omega} |X_n - X| dp + \int_{\Omega} |X| dp \leq K. \end{aligned}$$

Constante en n car $X_n \xrightarrow{L^1} X$ et X est intégrable donc

$$P\{|X_n| \geq M_0\} \leq \frac{K}{M_0}$$

Par ailleurs X étant intégrable on a $\forall \varepsilon > 0, \exists \gamma > 0$,

$$P[|X_n| \geq M_0] \leq \gamma \Rightarrow \int_{|X_n| \geq M_0} |X| dp < \frac{\varepsilon}{2}. \text{D'après (ii) du remarque.}$$

Pour un choix de M_0 telle que $\frac{K}{M_0} < \gamma$ on a

$$\int_{|X_n| \geq M_0} |X| dp < \frac{\varepsilon}{2}.$$

De plus

$$X_n \xrightarrow{L^1} X$$

donc

$$\int |X_n - X| dp \xrightarrow{n \mapsto \infty} 0.$$

Donc $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0$

$$\int |X_n - X| dp < \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'où $\forall n \geq n_0, \int_{|X_n| \geq M_0} |X_n| dp < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Pour $n < n_0, \exists M_n > 0 / \int_{|X_n| \geq M_n} |X_n| dp < \varepsilon$.

D'après (i) du remarque. Il suffit donc poser $M = \sup(M_0, M_1 \cdots M_{n_0-1})$. Pour avoir

$$\int_{|X_n| \geq M} |X_n| dp < \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Montrons d'abord que X est intégrable, $X_n \xrightarrow{p} X \Rightarrow \exists$ une suite $(X_{n_k}) \xrightarrow{p.s} X$. D'après le lemme de Fotou on a

$$\int |X| dp \leq \liminf \int |X_{n_k}| dp \leq \sup_{n_k} \int |X_{n_k}| dp < \infty.$$

D'après l'équi-intégrable soit $\delta > 0$

$$\begin{aligned} \int |X - X_n| dp &\leq \int_{|X - X_n| < \delta} |X - X_n| dp + \int_{|X - X_n| \geq \delta} |X - X_n| dp \\ &\leq \delta + \int_{|X - X_n| \geq \delta} |X| dp + \int_{|X - X_n| \geq \delta} |X_n| dp \\ &\leq \delta + \int_{|X - X_n| \geq \delta} |X| dp + \int_{|X - X_n| \geq \delta \text{ et } |X_n| < M} |X_n| dp + \int_{|X - X_n| \geq \delta \text{ et } |X_n| \geq M} |X_n| dp \\ &\leq \delta + \int_{|X - X_n| \geq \delta} |X| dp + MP \{|X - X_n| \geq \delta\} + \int_{|X_n| \geq M} |X_n| dp. \end{aligned}$$

Mais l'équi-intégrabilité de suite (X_n) entraîne $\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0,$

$$\int_{|X_n| > M} |X_n| dp < \frac{\varepsilon}{4}$$

$$P \{|X - X_n| \geq \delta\} < \frac{\varepsilon}{4M}$$

pour $n \geq n_1$ car $X_n \xrightarrow{p} X$

$$\int_{|X-X_n| \geq \delta} |X| dp < \frac{\varepsilon}{4} \text{ si } P(|X_n - X| > \gamma).$$

Cette dernière inégalité est réalisée pour $n \geq n_2$ car $X_n \xrightarrow{p} X$. Pour un choix de $\delta < \frac{\varepsilon}{4}$ on obtient $\forall n \geq n_0$,

$$\max(n_1, n_2) \int |X - X_n| dp < \varepsilon.$$

c'est-à-dire

$$X_n \xrightarrow{L^1} X.$$

■

1.7.3 lien entre la convergence presque sûre et la convergence en probabilité

Proposition 1.7.7 Si $X_n \xrightarrow{p.s.} X$ alors $X_n \xrightarrow{p} X$.

Preuve. Soit $\delta > 0$, montrons que

$$P\{|X_n - X| > \delta\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Si $X_n \xrightarrow{p.s.} X$ alors il existe $\Omega_0 \in \mathcal{A}$ telle que $P(\Omega_0) = 0$ (Ω_0 est l'ensemble de divergence de X_n) et $\forall \omega \notin \Omega_0, \exists n, \forall r > n \Rightarrow |X_r - X| \leq \delta$. Mais

$$0 \leq P\{|X_n - X| > \delta\} \leq P\left\{\bigcup_{r \geq n} |X_r - X| > \delta\right\} \leq P\{(A_n^\delta)^c\}$$

on a $A_n^\delta = \bigcap_{r \geq n} \{|X_r - X| \leq \delta\}$ par hypothèse $\Omega_0^c \subset \bigcup_n A_n^\delta$, d'où $\bigcap (A_n^\delta)^c \subset \Omega_0$. Mais $(A_n^\delta)^c$ étant une suite décroissante d'événements. On a

$$\lim P((A_n^\delta)^c) = P\left\{\bigcap (A_n^\delta)^c\right\} \leq P(\Omega_0) = 0.$$

D'où

$$P\{|X_n - X| > \delta\} \leq \lim P((A_n^\delta)^c) = 0.$$

■

Proposition 1.7.8 De toute suite (X_n) convergente en probabilité vers X on peut extraire une sous suite convergente presque sûrement vers X .

Preuve. D'où

$$X_n \xrightarrow{p} X \Rightarrow X_{n+v} - X_n \xrightarrow{p} 0,$$

$\forall v \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, \exists N_k \in \mathbb{N}$. Si

$$m \geq N_k \Rightarrow P \left\{ |X_{m+v} - X_m| > \frac{1}{2^k} \right\} < \frac{1}{2^k}.$$

Posons $n_1 = N_1, n_2 = \max(N_2, n_1 + 1) \cdots n_k = \max(N_k, n_{k-1} + 1)$. On construit ainsi une sous suite (X_{n_k}) de (X_n) telle que

$$\sum_{k=1}^{\infty} P \left\{ |X_{n_{k+1}} - X_{n_k}| > \frac{1}{2^k} \right\} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \infty.$$

La sous suite (X_{n_k}) converge presque-sûrment. D'après le critère de convergence presque sûrment.

$$\lim P \{ |X_n - X| > \delta \} \leq \lim P \left((A_n^\delta)^c \right) = 0.$$

■

Chapitre 2

Lois des grands nombres

Il s'agit ici d'étudier le comportement asymptotique de la suite des variables aléatoires $\left(\frac{1}{n} \sum_{n \geq 1} X_n, n \geq 1\right)$, ou $(X_n, n \geq 1)$ est une suite de variable aléatoire indépendantes et équidistribuées. Sous des hypothèses que l'on spécifiera, cette suite converge soit en loi vers la loi normale (théorème central limite), soit en probabilité ou presque-sûrement vers $E(X)$.

2.1 lois faibles des grands nombres

Théorème 2.1.1 Soit $(X_n, n \geq 1)$ une suite de variable aléatoire à valeurs dans un espace euclidien Ω on dit de la suite (X_n) qu'elle satisfait la loi faible des grands nombres, si la suite des sommes partielles $\left(S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers une espérance finie et existe $E(X)$ alors

$$S_n \xrightarrow{p} E(X).$$

Exemple 2.1.2 On réalise n lancers successifs d'un dé cubique, non pipé, dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On note X_i la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de point marqué lors du $i^{\text{ème}}$ jet. La moyenne de X_i est

$$E(X) = \frac{1}{6} (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{7}{2} = m$$

Sa variance est

$$\sigma^2 = E(X_i^2) - m^2,$$

d'ou

$$\sigma^2 = \frac{1}{6} (1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36) - \left(\frac{7}{2}\right)^2$$

soit

$$\sigma^2 = \frac{35}{12}.$$

Proposition 2.1.3 Soit (X_n) une suite de variable aléatoire indépendante, de même loi ayant une espérance $E(X)$ fini on alors

$$\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow{p} E(X_1).$$

Preuve. La variable aléatoire limite est la constante $E(X_1) = E(X_i)$ pour tout i car les variable aléatoire X_i ont même loi, donc même espérance. Il s'agit de vérifier $\forall \varepsilon > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - E(X_1) \right| \geq \varepsilon \right) = 0.$$

Posons

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

par linéarité, on a

$$E(M_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = E(X_i)$$

d'autre part, par indépendance des X_i

$$\begin{aligned} Var(S_n) &= Var \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right) = \frac{1}{n^2} Var \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n Var(X_i) = \frac{1}{n^2} \sum Var(X_1) \\ &= \frac{1}{n^2} (n Var(X_1)) = \frac{Var(X_1)}{n}. \end{aligned}$$

l'inégalité de tchebychev appliquée à S_n alors pour tout $\varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$P \left(\left| \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) - E(X_1) \right| \geq \varepsilon \right) = P(|S_n - E(S_n)| \geq \varepsilon) \leq \frac{Var(M_n)}{\varepsilon^2}$$

on conclut en faisant tendre n vers $+\infty$. ■

2.2 Lois fortes des grands nombres

Théorème 2.2.1 Soit $(X_n, n \geq 1)$ une suite de variable aléatoire à valeurs dans un espace euclidien Ω . On dit que la suite (X_n) qu'elle satisfait la loi forte des grands nombres, si la suite des sommes partielles $\left(S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right)_{n \geq 1}$ converge presque sûrement vers un élément

$E(X)$ alors

$$S_n \xrightarrow{p.s} E(X).$$

Proposition 2.2.2 (Kolmogorov-Khintchine) (X_k) est une suite de variable aléatoire réel $\frac{S_n}{n}$ converge presque-sûrement $\iff E|X_1| < +\infty$.

Preuve. Par hypothèse, il existe une constante telle que $\frac{S_n}{n}$ converge presque-sûrement vers c alors

$$\frac{X_n}{n} = \frac{S_n - S_{n-1}}{n} = \frac{S_n}{n} - \frac{n-1}{n} \times \frac{S_{n-1}}{n-1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s} c - c = 0.$$

En fixant $\varepsilon > 0$, on en déduit

$$P\left\{\omega \in \Omega; \exists n_0 = n_0(\omega), \forall n \geq n_0, \frac{|X_n(\omega)|}{n} < \varepsilon\right\} = 1.$$

Soit en passant au complémentaire $P\left\{\frac{|X_n|}{n} = \text{une infinité de fois}\right\} = 0$. Par lemme de Borelle

$$\sum P\left\{\frac{|X_n|}{n} \geq \varepsilon\right\} < +\infty$$

les X_i , ayant même lois, ceci s'écrit

$$\sum_{i=1}^n P\{|X_1| \geq n\varepsilon\} < +\infty$$

pour finir la preuve on observe que

$$E(X_1) \leq E\left(\sum (n+1)\varepsilon 1_{\{n\varepsilon \leq |X_1| < (n+1)\varepsilon\}}\right) =$$

$$\sum (n+1)\varepsilon P(n\varepsilon \leq |X_1| < (n+1)\varepsilon) = \varepsilon \sum P(n\varepsilon \leq |X_1|) < +\infty.$$

■

2.3 Loi du tout ou rien

Définition 2.3.1 Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variable aléatoire indépendante, à valeur dans des espaces mesurables quelconques, pour tout $n \geq 1$ soit

$$B_n = \sigma(X_k; k \geq n)$$

alors la tribu asymptotique B_∞ définie par $B_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ et grossière, au sens où $P(B) = 0$ ou $P(B) = 1$ pour tout $B \in B_\infty$

Proposition 2.3.2 soit (X_n) une suite de variable aléatoire indépendante de loi tout ou rien par

$$P(X_n = 1) = P(X_n = -1) = \frac{1}{2}$$

pour tout $n \geq 1$ posons

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

alors presque-sûrement $\sup S_n = +\infty$ et $\inf S_n = -\infty$ en particulier, il existe presque-sûrement des entiers n arbitrairement grands telle que

$$S_n = 0.$$

Preuve. $P\left(-t \leq \inf_n S_n \leq \sup_n S_n \leq t\right)$ pour cela on fixe un entier $k > 2t$ et on remarque

$$\bigcup_{j=0}^n \{X_{jk+1} = \dots = X_{jk+k} = 1\} \subset \left(\left\{-t \leq \inf_n S_n \leq \sup_n S_n \leq t\right\}\right)^c$$

or une application du lemme Borelle montre que l'ensemble de gauche à probabilité 1 ce qui donne le résultat annoncé. En faisant tendre p vers ∞ . On trouve

$$P(\{\inf S_n > -\infty\} \cap \{\sup S_n < +\infty\}) = 0$$

d'où

$$P(\{\inf S_n = -\infty\} \cap \{\sup S_n = +\infty\}) = 1$$

$$P(\{\inf S_n = -\infty\} + \{\sup S_n = +\infty\}) \geq 1$$

un argument de symétrie

$$P(\{\inf S_n = -\infty\}) = P(\{\sup S_n = +\infty\})$$

d'après ce qui précède ces deux probabilité sont strictement positives pour conclure, on remarque que

$$\{\sup S_n = +\infty\} \in B_\infty.$$

En effet, pour tout entier $k \geq 1$

$$\{\sup S_n = +\infty\} = \{\sup (X_k + X_{k+1} + \dots + X_n) = \infty\} \in B_k$$

et donc l'événement $\{\sup S_n = +\infty\}$ est mesurable par rapport à l'intersection du tribus B_k c'est à dire B_∞ . la loi du tout ou rien montre alors que

$$P(\{\sup S_n = +\infty\}) = 1 \text{ ou } P(\{\sup S_n = +\infty\}) = 0.$$

■

2.4 Lemme de Borelle Cantelli

Définition 2.4.1 soit (Ω, A) un espace mesurable soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'ensemble mesurable la limite superieur des A_n est l'ensemble (ou événement)

$$\limsup A_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{k \geq n} A_k \right) = \{\omega \in \Omega, \forall n \in \mathbb{N}, \exists k \geq n, \omega \in A_k\}$$

c'est ensemble (événement) qui ne dépend pas n de la même manière, la limite inferieure de suite (A_n) est l'ensemble

$$\liminf A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \bigcap_{k \geq n} A_k \right\} = \{\omega \in \Omega, \exists n \in \mathbb{N}, \forall k \geq n, \omega \in A_k\}.$$

Théorème 2.4.2 Soit (Ω, A, P) un espace de probabilité, et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'ensemble mesurable

* $\sum_{n \geq 0} P(A_n) < \infty$ alors $P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sup P(A_n)\right) = 0$.

** Si $P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sup P(A_n)\right) = 0$ et si les (A_n) sont deux à deux indépendants alors $\sum_{n \geq 0} P(A_n) < \infty$.

*** Si $\sum_{n \geq 0} P(A_n) = \infty$ et si les (A_n) sont deux à deux indépendants alors

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sup P(A_n)\right) = 1.$$

Preuve. Soit X la variable aléatoire $X = \sum 1_{A_n}$ on a

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} P(A_n) = \int_{\mathbb{R}} X dp < \infty$$

donc X est integrable, donc $X < \infty$ presque-sûrement, or $X(\omega) < \infty$ seulement si

ω appartient à un nombre fini de A_n . Donc presque-sûrement, ω n'appartient pas à $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$. Soit encore

$$P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n\right) = 0.$$

Avant de montrer $(***)$, vérifions que $(***)$ implique $(**)$. en effet si

$$P(\limsup A_n) \neq 0$$

alors

$$P(\limsup A_n) \neq 1.$$

Donc la conclusion de $(***)$ est fausse. Si de plus les (A_n) sont indépendants, alors

$$\sum P(A_n) < \infty.$$

■

2.5 Théorème limite central

Théorème 2.5.1 Soit (X_n) une suite de variable aléatoire indépendante et de même loi telle que $E[|X_1|] < +\infty$ et $E[|X_1|]^2 < +\infty$. On note $m = E[X_1]$ et $\sigma^2 = \text{Var}(X_1)$. Alors, lorsque n tend vers l'infini, on a

$$\sqrt{n} \times \left(\frac{S_n}{n} - m \right) = \frac{(X_1 - m) + \dots + (X_n - m)}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\text{loi}} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

on de manière équivalente :

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma} \times \left(\frac{S_n}{n} - m \right) = \frac{(X_1 - m) + \dots + (X_n - m)}{\sigma \times \sqrt{n}} \xrightarrow{\text{loi}} \mathcal{N}(0, 1).$$

Autrement dit, pour tout x dans $\mathbb{R}$, lorsque n tend vers l'infini, on a

$$P\left[\frac{\sqrt{n}}{\sigma} \times \left(\frac{S_n}{n} - m \right) \leq x\right] \longrightarrow P(\mathcal{N}(0, 1) \leq x)$$

ou encore pour tout l'intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$:

$$P\left[\frac{\sqrt{n}}{\sigma} \times \left(\frac{S_n}{n} - m \right) \in [a, b]\right] \longrightarrow P(\mathcal{N}(0, 1) \in [a, b])$$

Remarque 2.5.2 Le théorème limite central exprime le fait que dans la loi des grands

nombres, les fluctuations sont universelles : elle est gaussienne et ne dépend pas de la loi initiale des variables X_i

$$S_n = n \times m + \sigma \times \sqrt{n} \mathcal{N}(0, 1) + o(\sqrt{n}) \quad \text{i.e.} \quad \frac{S_n}{\sqrt{n}} = m + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \mathcal{N}(0, 1)$$

l'universalité des fluctuations explique pourquoi la loi normale omniprésente dans la modélisation aléatoire.

Exemple 2.5.3 On précise maintenant l'évolution du gain dans un jeu pile ou face symétrique, i.e lorsque $t = \frac{1}{2}$ la loi des grands nombres donne :

$$\frac{S_n}{n} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow{p} E[X_1] = 2t - 1 = 0.$$

2.5.1 Convergence vers loi de Poisson

Convergence de loi Binomiale vers loi de Poisson

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une variable aléatoire réelle telle que $X_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$ et telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} np_n = \lambda.$$

On a pour tout $k \in \mathbb{N}$, $n \geq k$

$$P(X_n = k) = \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k}$$

on a

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n-k)!} = \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (n-j)$$

Or pour k fixé, on a pour tout $j \leq k-1$, $n-j \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n$. Donc

$$\binom{n}{k} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}$$

On a

$$np_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \lambda$$

donc

$$p_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\lambda}{n}$$

On a donc

$$\binom{n}{k} p_n^k \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \left(\frac{\lambda}{n}\right) \frac{n^k}{k!} = \frac{\lambda^k}{k!}$$

On a également

$$\ln \left((1 - p_n)^{n-k} \right) = (n - k) \ln (1 - p_n)$$

Or

$$p_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Donc

$$\ln (1 - p_n) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -p_n$$

On encore

$$\ln (1 - p_n) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{\lambda}{n}$$

On en déduit que

$$(n - k) \ln (1 - p_n) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{\lambda (n - k)}{n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\lambda$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left((1 - p_n)^{n-k} \right) = -\lambda$$

Et donc par composition des limites

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - p_n)^{n-k} = \exp (-\lambda)$$

On en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = k) = \frac{\lambda^k \exp (-\lambda)}{k!}$$

On reconnaît une loi de Poisson de paramètre de λ .

2.5.2 Convergence vers loi de Gauss

Convergence de loi Binomial vers de Gauss

le théorème limite central permet de préciser la convergence des quotients

$$\frac{S_n}{n} \left(S_n = \sum_{k=1}^n X_k; \text{où } (X_k)_{k \geq 0} \right)$$

est une variable aléatoire réel de Bernoulli indépendantes de même paramètre p vers p pour tout intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$

$$P(np + a\sqrt{npq} \leq S_n \leq np + \sqrt{npq}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \exp \left(-\frac{x^2}{2} \right) dx.$$

où $q = 1 - p$ comme S_n suite la loi Binomiale de paramètre n et p , la limite de droite représente une valeur approchée de

$$\sum_{np+a\sqrt{npq} \leq k \leq np+b\sqrt{npq}} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

Ce théorème fournit donc une approximation d'une loi Binomiale et de paramètre p pas trop proche de 0 ou de 1 par la loi de Gauss.

Chapitre 3

Convergences des martingales

Une brève introduction est faite dans ce chapitre sur les martingales. Dans un premier paragraphe on donne les définition de filtration et martingale, deuxième inégalité de Doob, et théorème convergence.

3.1 Filtration

Définition 3.1.1 Une filtration sur $(\Omega, \mathcal{F}, p)$ est une suite croissante de sous-tribus $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$: $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \dots \subset \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1} \subset \dots \mathcal{F}$ on note

$$\mathcal{F}_\infty = \sigma(U_n \mathcal{F}_n)$$

le quadruplet $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n), p)$ est appelé espace filtré. Ici n représente le temps $\mathcal{F}_n$ est l'information disponible au temps n (elle est croissante).

3.2 Martingale

Définition 3.2.1 La suite de variable aléatoire $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en abrégé est une $(\mathcal{F}_n)$ martingale si pour tout $\forall n \in \mathbb{N}$

1 $E |M_n| < \infty$.

2 M_n est $\mathcal{F}_n$ mesurable.

3 Pour tout $m \leq n$, $E(M_n | \mathcal{F}_m) = M_m$ presque — sûrement.

Exemple 3.2.2 Soient $Z \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, p)$, $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une filtration et définition pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M_n := E(Z | \mathcal{F}_n)$. Alors $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$. vérification.

D'abord chaque M_n est $\mathcal{F}_n$ mesurable par construction l'intégrabilité de M_n en utilisant la conservation de l'espérance, on obtient

$$E |M_n| = E |E(Z | \mathcal{F}_n)| \leq E |Z| < \infty.$$

Enfin pour $0 \leq m \leq n$

$$E(M_n | \mathcal{F}_m) = E(E(Z | \mathcal{F}_n) | \mathcal{F}_m) = (E_{\mathcal{F}_m} \circ E_{\mathcal{F}_n})(Z) = E_{\mathcal{F}_m}(Z) = M_n$$

en utilisant

$$\mathcal{F}_m \subset \mathcal{F}_n.$$

3.2.1 Sous-martingale et sur-martingale

Définition 3.2.3 La suite variable aléatoire $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une sous-martingale ou une sur-martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)$ si pour tout $n \in \mathbb{N}$

1 $E |Z_n| < \infty$.

2 Z_n est $\mathcal{F}_n$ mesurable.

3 Pour tout $m \leq n$ presque-sûrement $\begin{cases} E(Z_n | \mathcal{F}_m) \geq Z_m & (\text{sous- martingale}). \\ E(Z_n | \mathcal{F}_m) \leq Z_m & (\text{sur- martingale}). \end{cases}$

Théorème 3.2.4 toute martingale bornée dans L^1 (en particulier tout martingale positive ou bornée) converge presque-sûrement

Preuve. Soit (M_n) une telle martingale, alors ses parties positive M_n^+ et négative M_n^- sont des sous-martingales positives bornées dans L^1 qui convergent donc presque-sûrement. Il en va donc de même de

$$M_n = M_n^+ - M_n^-.$$

■

3.3 Inégalité de Doob

3.3.1 Inégalité maximale de Doob

Définition 3.3.1 Soit $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une sous-martingale, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$P(\max Z_n \geq t) \leq \frac{E(Z_n^+)}{t}$$

si $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une martingale $\forall n \in \mathbb{N}$

$$P(\max M_j \geq t) \leq \frac{E(M_n)}{t}$$

3.3.2 Inégalité de moments de Doob

Définition 3.3.2 Soit $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une sous-martingale positive ou une martingale pour tout $1 < k < \infty$ il existe une constante universelle c_k telle qu'en notant

$$M_n^* := \max_{j \leq n} |M_j|$$

on ait $\forall n \in \mathbb{N}$

$$E(M_n^*)^k \leq c_k E|M_n|^k$$

la valeur optimale de c_k est $\left(\frac{k}{k-1}\right)^k$ d'ou $\forall n \in \mathbb{N}$

$$E \|M_n^*\|^k \leq \left(\frac{k}{k-1}\right) \|M_n\|_k.$$

Théorème 3.3.3 Soit X une martingale et soient $N \in \mathbb{N}$ et $k > 1$ alors

$$\|\max(|X_n|; 0 \leq n \leq N)\|_k \leq \frac{k}{k-1} \|X_N\|_k.$$

Preuve. Notons $X_N^* = \max(|X_n|; 0 \leq n \leq N)$ pour $N \in \mathbb{N}$: on a par l'inégalité maximale

$$\lambda_k(\max(|X_n|; 0 \leq n \leq N) \geq \lambda) \leq E(|X_N| 1_{\min(-X_n, 0 \leq n \leq N \leq -\lambda)})$$

cela revient à $\lambda_k(X_N^* \geq \lambda) \leq E(|X_N| 1_{X_N \geq \lambda})$ on sait de plus par fubini que

$$\begin{aligned} E((X_N^*)^k) &= \int P((X_N^*)^k > \mu) d\mu = \int P(X_N^* > \lambda) k \lambda^{k-1} d\lambda \\ &\leq P \int E(|X_n| 1_{X_N \geq \lambda}) \lambda^{k-2} d\lambda = P E\left(|X_N| \int \lambda^{k-2} d\lambda\right) \\ &= \frac{k}{k-1} E(|X_N| (X_N^*)^{k-1}) = \frac{k}{k-1} \left(E|X_N|^k\right)^{\frac{1}{k}} \left(E|X_N^*|^k\right)^{\frac{k-1}{k}} \\ &= \frac{k}{k-1} \|X_N\|_k \|X_N^*\|_{\frac{k}{k-1}}^{k-1} = \frac{k}{k-1} \|X_N\|_k \left(E(X_N^*)^k\right)^{\frac{k-1}{k}}. \end{aligned}$$

Donc si $\|X_N\|_p < \infty$, on a bien $\|X_N^*\|_p < \infty$ et on conclut si $\|X_N^*\|_p = \infty$ alors l'égalité est triviale par Jensen pour tout $0 \leq k \leq N$, $\|X\|_p = \|E(X_N | \mathcal{F}_k)\|_p \leq \|X_N\|_p$.

■

3.4 Théorèmes de convergence

Dans cette section, la notion d'uniforme intégrabilité est importante. On renvoie à un cours de probabilité de base pour la définition de cette notion.

Théorème 3.4.1 (*convergence presque-sûrement*) Soit $X = (X_t)_{t \geq 0}$ une sur-martingale continue à droite et bornée dans L^1 . Alors il existe une variable aléatoire $X_{\infty-} \in L^1$ telle que $\lim_{t \rightarrow \infty} X_t = X_{\infty-}$ presque-sûrement.

Remarque 3.4.2 Un énoncé adapté donne la convergence des sous-martingales continues à droite. Une sous-martingale $(X_t)_{t \geq 0}$ est bornée dans L^1 seulement si

$$\sup_{t \geq 0} E[X_t^-] < \infty.$$

En effet comme

$$E[X_t] \leq E[X_0], \text{ on a } E[X_t^+] \leq E[X_0].$$

Il vient

$$E[X_t^-] \leq E[|X_t|] = E[X_t^+] + E[X_t^-] = 2E[X_t^-] + E[X_0]$$

et donc

$$\sup_{t \geq 0} E[|X_t|] \leq E[X_0] + 2 \sup_{t \geq 0} E[X_t^-].$$

Preuve. Soit D une sous-ensemble dénombrable dense de $\mathbb{R}_+$. On déduit pour tous $a < b$, on a

$$E[M_{a,b}^X(D)] = \lim_{t \rightarrow \infty} E[M_{a,b}^X([0, t] \cap D)] \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E[(X_t - a)^-]}{b - a} \leq \frac{\sup_{t \geq 0} E[(X_t - a)^-]}{b - a} < \infty.$$

On a donc

$$M_{a,b}^X(D) < \infty \text{ presque-sûrement}$$

pour tout rationnels $a < b$ et aussi pour tout rationnels $a < b$ p.s on déduit pour que

$$X_{\infty-} := \lim_{t \in D \rightarrow \infty} X_t$$

existe presque-sûrement (sinon, il existe $a < b$ rationnels tels que

$$\liminf_{t \in D \rightarrow \infty} X_t < a < b < \limsup_{t \in D \rightarrow \infty} X_t$$

ce qui exige un nombre infini de montées de a vers b le long de D). De plus, le lemme de Fatou permet de voir cette limite est dans L^1 d'abord, on a

$$E[|X_{\infty-}|] = E\left[\lim_{s \rightarrow \infty} |X_s|\right] = E\left[\lim_{s \rightarrow \infty} \inf |X_s|\right] \leq \liminf_{s \rightarrow \infty} E[|X_s|] \leq \sup_{s \geq 0} E[|X_s|] < \infty.$$

■

Bibliographie

- [1] P_Barbe, M_Ledoux.2007. Probabilité,EDP Sciences.
- [2] M.Bousseboua. 2006. Eléments de la théorie des probabilités.Place centrale de Ben aknoun. 107 ;216-221.
- [3] F. Messaci. 2001. Notions fondamentales de la théorie de probabilité .Les édiutions de l'inversité Mentouri Constantine.pp 156-167.
- [4] J_Y_Ouvrard. 2000. Probabilité, maitrice, agrégation. Cassini.
- [5] S.M.Ross. 2007. Limitation aux probabilité. Américane. 451-452.

0.1 Inégalité de Markov

Théorème 0.1.1 Soit X une variable aléatoire à valeur non négatives pour tout réel $a > 0$

$$P\{X \geq a\} = \frac{E[X]}{a}$$

Preuve $I = \begin{cases} 1 & \text{si } X \geq a \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

et noter que, puisque $X \geq 0$ $I \leq \frac{X}{a}$. En prenant les espérances de l'expression cidessus, on obtient :

$$E[I] \leq \frac{E[X]}{a}$$

ce que comme $E[I] = P\{X \geq a\}$, prouve le résultat le théorème suivant est alors

un corollaire de l'inégalité de Markov

0.2 Inégalité de tchebychev

Théorème 0.2.1 Soit X une variable aléatoire d'espérance μ et variance σ^2 , pour tout réel $K > 0$:

$$P\{|X - \mu| \geq K\} \leq \frac{\sigma^2}{K^2}.$$

Preuve on peut appliquer l'inégalité de Markov, avec $a = K^2$, à la variable $(X - \mu)^2$ puisque celle-ci est valeurs non négatives. on obtient $P\{(X - \mu)^2 \geq K^2\} \leq \frac{E[(X - \mu)^2]}{K^2}$

Mais, comme $(X - \mu)^2 \geq K^2$, équivaut à $|X - \mu| \geq K$, peut être réécrite

$$P\{|X - \mu| \geq K\} \leq \frac{E[(X - \mu)^2]}{K^2} = \frac{\sigma^2}{K^2}$$

Mots Cles

- * variable aléatoire
- * Fonction de répartition
- * Fonction caractéristique
- * Converge même loi (même espérance et variance)
- * Loi des probabilité : loi de Bernoulli, $B(1, p)$, $E(X) = p$, $Var(X) = p(1 - p)$, $P(X_i = x_i) = p^{x_i} (1 - p)^{1 - x_i}$.
- Loi de Poisson, $P(\lambda)$, $E(X) = \lambda$, $Var(X) = \lambda$, $P(X_i = x_i) = \exp(-\lambda) \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}$.

Loi Normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, $E(X) = m$, $Var(X) = \sigma^2$, $P(X_i = x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i - m)^2\right)$.

Loi Binomial, $Bin(M, p)$, $E(X) = Mp$, $Var(X) = Mpq$, $P(X_i = x_i) = C_M^{x_i} p^{x_i} (1-p)^{M-x_i}$.