



N° Ref :.....

Centre Universitaire de Mila

Institut des sciences et de la technologie

Département de Mathématiques et Informatique

Fonction harmonique et sous-harmonique

**Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de Licence
en Mathématiques**

**Préparé par : Saadi roukia
Bennedjar dounia
Aiouaz nadjah**

**Encadré par : ARROUD
CHEMS EDDINE**

Filière : Mathématiques

Spécialité : Mathématiques Fondamentales

Année universitaire :2012/2013

REMERCIEMENTS

Nous tenons tout d'abords à remercien le bon dieu pour nous avoir , donné le courage, la patience et le privilège d'étudier et terminer ce modeste travail.

Nous remercions notre encadreuse Mr Arroud chems eddine pour son sautien et ses consentes précieux qui nous ont considérablement aidé.

Nous remercions nos familles pour leur patience et soutien sans oublier toutes les personnes qui nous ont aidés de prêt au de loin.

R

N

D



Table des matières

Introduction Générale	2
1 <i>Analyse complexe</i>	3
1.1 <i>Notion primilaire sur l'analyse complexe</i>	3
1.2 <i>Nombre complexe</i>	3
1.2.1 <i>Ecriture cartésienne</i>	3
1.2.2 <i>Le conjugué</i>	3
1.2.3 <i>Module</i>	4
1.2.4 <i>Forme polair</i>	
1.2.5 <i>Formule de moivre</i>	4
1.2.6 <i>Formule d'euler</i>	4
1.2.7 <i>Plan complexe</i>	4
1.3 <i>Fonction holomorphe</i>	6
1.3.1 <i>Fonction holomorphe</i>	6
1.3.2 <i>Proprietes des fonctions holomorphes</i>	7
1.4 <i>Topologie du plan complexe</i>	7
1.5 <i>Rappels sur la dérivation partielle</i>	10
2 <i>Fonction harmonique</i>	12
2.1 <i>L'équation de laplace</i>	12
2.2 <i>Fonction harmonique</i>	13
2.3 <i>Proprietés des fonctions harmonique</i>	16
2.4 <i>Un proplème de fonction harmonique</i>	19
2.4.1 <i>Problème de dirichlet</i>	19
2.4.2 <i>Exposé du problème</i>	19
2.4.3 <i>Solution au problème</i>	19
2.5 <i>Fonction sous -harmonique</i>	20

Introduction Générale

L'analyse complexe est un domaine des mathématiques traitant des fonctions à valeurs complexes (ou, plus généralement, à valeurs dans un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel) et qui sont dérivables par rapport à une ou plusieurs variables complexes.

Les nombres complexes, nés dans l'Italie, sont apparus à travers la résolution de l'équation algébrique du troisième degré donnée par Tartaglia (1539) puis par Cardan, alors qu'ils eussent pu demeurer enfouis dans les équations du second degré déclarées impossibles. Dans son algèbre, Bombelli invente $\sqrt{-1}$ ainsi la naissance du plan complexe qui a été imaginée par Argand.

Cette mémoire est concernant les fonctions harmoniques et sous-harmoniques

il est divisé en deux chapitres, dans le premier chapitre, on appelle les notions primaires sur l'analyse complexe, les fonctions holomorphes, ...

Dans le deuxième chapitre on va commencer par la définition de l'équation de Laplace, puis de fonction harmonique et on résoudrons un problème de fonction harmonique (problème de Dirichlet).

Enfin on va présenter les fonctions sous-harmoniques.

Chapitre 1

Analyse complexe

1.1 *Notion primilaire sur l'analyse complexe*

L'objet de l'analyse complexe est l'étude de fonction $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, nous rappelons les règles de calcul avec les nombres complexes, qui sont les dérivées partielles, nous terminons ce chapitre par les ensembles topologie.

1.2 *Nombre complexe*

Définition 1.2.1 [7] *Un nombre complexe est un couple de nombre réel*

$$\mathbb{Z} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, z = x + iy\}, i^2 = -1$$

l'ensemble des nombre complexe note $\mathbb{C}$.

1.2.1 *Ecriture cartésienne*

On a pour tout nombre complexe $\mathbb{Z} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, z = x + iy\}$ qui a l'écriture plus simplement $z = x + iy$ c'est ce qu'on appelle l'écriture cartésienne de z

x et y sont des nombres réelles quelconques et i est un nombre particulier $i^2 = -1$

-Le nombre réel x est la partie réel de z : $x = \Re z$.

-Le nombre réel y est la partie imaginair de z : $y = \Im z$.

Remarque 1.2.2 *Les complexe de la forme bi avec $b \in \mathbb{R}$ et la partie réel nulle sont appeles imaginaires pure* .

1.2.2 *Le conjugué*

$z = x + iy$ avec x et $y \in \mathbb{R}$, on appelle conjugué de z le nombre complexe $\bar{z} = x - iy$.

Remarque 1.2.3 -Un nombre complexe z est réel ssi $\bar{z} = z$.

-Un nombre complexe z est imaginaire ssi $\bar{z} = -z$.

1.2.3 Module

Pour tout nombre complexe z on appelle module de z le nombre réel positif

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

On remarque que $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

1.2.4 Forme polaire

Si $z \neq 0$ on peut écrire $z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = r \exp(i \theta)$ et l'angle $\theta = \arg z$, $r = |z|$

$$\theta = \arg z = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} + 2k\pi \\ \arctan \frac{y}{x} + (2k+1)\pi \end{cases}$$

qui sont argument par définition $-\pi < \arg z < \pi$.

1.2.5 Formule de Moivre

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$

$$z^n = (r(\cos(\theta) + i \sin(\theta)))^n \implies z^n = r^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)).$$

1.2.6 Formule d'Euler

$$\cos \theta = \frac{\exp(i\theta) + \exp(-i\theta)}{2}, \quad \sin \theta = \frac{\exp(i\theta) - \exp(-i\theta)}{2i}.$$

1.2.7 Plan complexe

Dans un plan complexe muni d'un repère orthonormé, l'image d'un nombre complexe est le point M de coordonnées (a, b) , son image vectorielle est le vecteur $\overrightarrow{OM}$. Le nombre z est appelé affixe du point M ou du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

Le module $|z|$ est alors la longueur du segment $[OM]$.

Si z est différent de 0, son image est distincte de l'origine O du repère. On appelle alors argument de z et on note $\arg(z)$ n'importe quelle mesure θ de l'angle , bien définie à un multiple de près.

Les imaginaires purs non nuls ont un argument congru à ou modulo , selon le signe de leur partie imaginaire.

Le plan , muni de son repère orthonormé et des actions des nombres complexes par addition et multiplication, est appelé plan complexe. Puisque tous les plans complexes sont canoniquement isomorphes, on parle du plan complexe sans préciser davantage.

1.3 Fonction holomorphe

Définition 1.3.1 : On appelle un domaine D de $\mathbb{C}$ chaque ouvert de $\mathbb{C}$ c'est à dire on peut lier chaque deux points de D par une trajectoire qui appartient à D .

la limite : Soit f une fonction sur D , on dit que w_0 est la limite de f au voisinage de z_0

$$\text{c'est-à-dire : } \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$$

$$\text{ssi } \forall \varepsilon > 0, \exists \sigma > 0, |z - z_0| < \sigma \Rightarrow |f(z) - w_0| < \varepsilon.$$

Dérivation : Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, et soit f définie et continue sur un voisinage de z_0 , on dit que f est dérivable en z_0 Si l'expression admet une limite quand z tend vers z_0 on note alors cette limite $f'(z_0)$.

Exemple 1.3.2 : Considérons la fonction f définie et continue sur $\mathbb{C}$ et telle que $f(z) = z^2$

f est dérivable ?

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z_0 + \Delta z)^2 - z_0^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{z_0^2 + 2z_0\Delta z + \Delta z^2 - z_0^2}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta z(2z_0 + \Delta z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} 2z_0 + \Delta z = 2z_0 \text{ (Existe)} \Rightarrow f \text{ est dérivable.} \end{aligned}$$

1.3.1 Fonction holomorphe

Définition 1.3.3 Soit f une fonction à valeurs complexes définie sur un domaine U du plan complexe et différentiable (au sens du calcul à plusieurs variables).

On note U et V les parties réelles et imaginaires de f , fonction des deux variables réelles x et y ou $z = x + iy$.

On dit que f est holomorphe ssi : elle vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes.

- f est $\mathbb{C}$ -dérivable en tout point de U autrement dit :

$$\forall z_0 \in U, f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \text{ existe.}$$

- La matrice jacobienne de l'application $(x, y) \rightarrow (U(x, y), V(x, y))$ est une matrice de similitude directe en tout point $x_0 + iy_0 \in U$
- f vérifie les relations de Cauchy-riemann :

$$\forall z_0 = x_0 + iy_0 \in U \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \end{cases}$$

1.3.2 Propriétés des fonctions holomorphes

Proposition 1.3.4 1. Soient U un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ et f une application de U dans $\mathbb{C}$. si f est holomorphe en z_0 alors f est continue en z_0

2. Soient U un ouvert non vide de $\mathbb{C}$. λ un complexe et f et g deux applications de U dans $\mathbb{C}$, si f et g sont holomorphes en z_0 alors :

• $f + g$ est holomorphe en z_0 et $(f + g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$.

• La fonction $\lambda.f$ est holomorphe en z_0 et $(\lambda.f)'(z_0) = \lambda.f'(z_0)$.

• $f * g$ est holomorphe en z_0 et $(f * g)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$.

• Si de plus $g(z_0) \neq 0$. Alors $\frac{f}{g}$ est holomorphe en z_0 et :

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2}$$

Proposition 1.3.5 3 : Soient U un ouvert non vide de $\mathbb{C}$, f une application de U dans $\mathbb{C}$, z un ouvert de $\mathbb{C}$ telle que $F(u) \subset z$ et g une application de z dans $\mathbb{C}$. Si f est holomorphe en $z_0 \in U$ et si g est holomorphe en $f(z_0)$ alors l'application composée $g \circ f$ est holomorphe en z_0 et $(g \circ f)'(z_0) = f'(z_0) \times g'(f(z_0))$.

1.4 Topologie du plan complexe

Ouverts et fermés de $\mathbb{C}$: [8]

Soient z_0 un complexe et r un réel strictement positif

Définition 1.4.1 On appelle boule ouverte (ou disque ouvert) de centre z_0 et de rayon r l'ensemble

$$D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| \leq r\}.$$

Définition 1.4.2 On appelle boule fermé (ou disque fermé) de centre z_0 et de rayon r l'ensemble

$$\overline{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| \leq r\}.$$

Remarque 1.4.3 : On peut étendre la définition au cas où $r = 0$ la boule ouverte $D(z_0, r)$ est l'ensemble vide et la boule fermé $\overline{D}(z_0, r)$ est le singleton $\{z_0\}$.

Définition 1.4.4 2 (Voisinage d'une complexe)

On dit que le sous-ensemble z de $\mathbb{C}$ est un voisinage du complexe z si z contient une boule de centre z , autrement dit si

$$\exists r \in \mathbb{R}_+^* \quad D(z_0, r) \subset \mathbb{Z}.$$

Exemple 1.4.5 1. Par définition, tout boule (ouverte ou fermé) de centre z_0 est un voisinage de z_0 .

2. L'ensemble $\mathbb{C}$ est voisinage de tout complexe z_0 puisque $D(z_0, r) \subset \mathbb{Z}$.

3. L'ensemble $z = \{z \in \mathbb{C}; \Re(z) \geq 0\}$ est un voisinage de $z_0 = 1 + i$.

Définition 1.4.6 3 (Ensemble ouvert et ensemble fermé)

Un sous-ensemble non vide z de $\mathbb{C}$ est qualifié d'ensemble ouvert si pour tout élément z de $\mathbb{Z}$, il existe une boule ouverte de centre z contenue dans $\mathbb{Z}$, autrement dit si

$$\forall z \in \mathbb{Z} \quad \exists r \in \mathbb{R}_+^* \quad D(z, r) \subset \mathbb{Z}$$

Un sous-ensemble z de $\mathbb{C}$ est appelé ensemble fermé si son complémentaire dans $\mathbb{C}$ est un ensemble ouvert.

Exemple 1.4.7 L'ensemble $z = \{z \in \mathbb{C}; |z| > r \text{ (où } r \in \mathbb{R}_+^*)\}$ est le complémentaire de la boule fermé $\overline{D}(0, r)$; c'est donc un ensemble ouvert.

Remarque 1.4.8 1. Le résultat des définitions (2) et (3) qu'un ensemble est ouvert s'il est un voisinage de chacun de ses points.

2. Par convention, l'ensemble vide est un ouvert de $\mathbb{C}$. son complémentaire dans $\mathbb{C}$ est donc un fermé de $\mathbb{C}$.

Remarque 1.4.9 : (Union et intersection d'ouverts ou de fermés)

Proposition 1.4.10 1. L'union d'un nombre quelconque d'ensembles ouvertes est un ensemble ouvert, l'intersection d'un nombre fini d'ensemble ouvert est un ensemble ouvert.

Définition 1.4.11 2. L'intersection d'un nombre quelconque d'ensembles fermés est un ensemble fermé

3- L'union d'un nombre fini d'ensemble fermés est un ensemble fermé.

Définition 1.4.12 On dit qu'un sous-ensemble z de $\mathbb{C}$ est borné s'il existe un élément z_0 dans $\mathbb{C}$ et un réel strictement positif r tel que z soit inclus dans la boule fermée $B(z_0, r)$,

entrement dit si $\exists z_0 \in \mathbb{C} \quad \exists r \in \mathbb{R}^+ \quad \forall z \in \mathbb{Z} \quad |z - z_0| \leq r.$

connexité :

De meme l'image d'un connexe par une application continue est un connexe, une propriété que l'on utilise souvent sous la forme : si u est connexe et x discret et si $f : u \rightarrow x$ est une application continue, alors f est constante si E est un espace topologique et $x \in E$ le plus grand connexe de E contenant x est sa composante connexe, tout espace topologique est union disjoint de ses composantes connexes.

-Une partie x d'un espace métrique est connexe si et seulement si il n'existe pas de fonction continue de x dans $\mathbb{R}$ dont l'image ait exactement deux éléments.

-Une partie x d'un espace métrique est connexe si et seulement si tout fonction continue de x dans $\mathbb{R}$ a un intervalle pour image.

-Une partie x d'un espace métrique est connexe si et seulement si elle n'est pas réunion de deux ouverts disjoints non vides.

Ensemble compact :

La compacité est sans aucun doute le concept le plus important mis à jour par les fondateurs de la topologie, les parties des mathématiques pures et appliquées où intervient cette notion fondamentale sont innombrables.

La compacité est plus complexe à explorer que la connexité que nous venons d'étudier la plupart des nombreuses définitions équivalentes de la notion de compact utilisent presque toujours un jargon technique assez peu transparent.

Définition 1.4.13 Une partie x d'un espace métrique est compacte si et seulement si toute fonction continue de x dans $\mathbb{R}$ est bornée.

Propriétés des parties compactes

Proposition 1.4.14 - *L'image d'un partie compact par une fonction continue est compacte.*

- *Toute partie compact d'un espace métrique est fermée et bornée.*
- *Toute fonction réelle continue définie sur un compact admet un maximum et un minimum.*
- *L'image d'un segment par une fonction réelle continue est un segment.*
- *Toute fonction continue définie sur un compact est uniformément continue.*

Compacité et topologie

Venons -en maintenant à un autre groupe de trois théorèmes profonds dont la portée en théorie des fonction est essentielle.

- Une partie x d'un compact d'un espace métrique est compacte si et seulement si elle est fermée.
- Tout inverse de bijection continue entre compacte est continue.
- Une partie x d'un espace métrique est compact si et seulement si pour toute suite (u_n) à valeurs dans x il existe un $a \in x$ telle que : pour toute boule ouverte $B(a, \varepsilon)$ exist une infinité d'indices n telle que $u_n \in B(a, \varepsilon)$.

Ensemble convexe :

Définition 1.4.15 *Un ensemble C est dit convexe lorsque, pour tous x et y de C , le segment $[x, y]$ est tout entier contenu dans C , i.e. :*

$$\forall x, y \in C, \quad \forall t \in [0, 1], \quad tx + (1 - t)y \in C.$$

1.5 Rappels sur la dérivation partielle

Soit f est une fonction réelle définie dans $\mathbb{R}^n$. A l'aide d'un repère on peut écrire un vecteur $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ comme $(x_1, \dots, x_n)$ ou les x_i sont des réelles.

Définition 1.5.1 *La i -ème dérivée partielle de f au point $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est définie par :*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{i-1}, \vec{x}_{i+h}, \vec{x}_{i+1}, \vec{x}_n) - f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{i-1}, \vec{x}_i, \vec{x}_{i+1}, \dots, \vec{x}_n)}{h}$$

si elle existe .

Un concept important est celui de gradient

Définition 1.5.2 1-Si toutes les dérivées partielles d'une fonction f sont définies en un point de

l'espace $\mathbb{R}^n$ alors on appelle gradient de f au point $(x_1, \dots, x_n)$ le vecteur

$$\nabla f(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n) \right)$$

le gradient a quelques propriétés importantes :

- Il est indépendant du repère .
- Il pointe dans la direction de plus forte croissance de la fonction .
- Il est perpendiculaire aux lignes de champ définies par $(x_1, \dots, x_n) = c$ ou c est une constante quelconque .

2) La dérivée directionnelle de f dans la direction du vecteur $\vec{v} : (v_1, \dots, v_n)$ au point $(x_1, \dots, x_n)$ est définie par :

$$D_{\vec{v}} f(x_1, \dots, x_n) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x} + h\vec{v}) - f(\vec{x})}{h}$$

Chapitre 2

Fonction harmonique

Dans ce chapitre on reprend les conventions des fonctions harmoniques. On est ainsi amené à introduire les notions de fonction sous-harmonique.

2.1 L'équation de laplace

-Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ un domain et $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction elle est harmonique dans D si elle y

admet des dérivées partielles d'ordre deux continues que y satisfait l'équation de laplace :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = 0.$$

-Une fonction complexe est donc harmonique si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire le sont

-Les fonction harmonique soient un role important en mathematique appliquées, particulièrement en physique mathématique .

Exemple 2.1.1 :

Lorsque dans une région de l'espace $\mathbb{R}^3$ l'état stationnaire est atteint, la température $T(x, y, z)$ satisfait l'équation de laplace. Dans certaines circonstances, par exemple lorsque la région en question est un cylindre $\langle\langle\infty\rangle\rangle$ dans la direction de z , T ne dépend que de deux variables x et y .

Soit $D \subseteq \mathbb{C}$ un domain et $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe . Alors f est harmonique dans D .En effet ,on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h+iy) - f(x+iy)}{h} = f'(x+iy)$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+i(y+h)) - f(x+iy)}{h} = f'(x+iy)$$

$$\text{de telle sorte que : } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''(x+iy) - f''(x+iy) = 0$$

-La partie réelle et la partie imaginaire d'une fonction holomorphe sont donc des fonctions harmoniques réelles.

On dit qu'elles sont des fonctions harmoniques conjuguées, cette énoncé admet une réciproque.[1]

2.2 Fonction harmonique

Définition 2.2.1 Soit $f : (x, y) \in D \rightarrow f(x, y) \in \mathbb{R}$ une application de class C^2 définie sur un ouvert non vide U de $\mathbb{R}^2$ à valeur réelle, on appelle laplacien de f noté $\Delta(f)$ la fonction défini par $(x, y) \in U \rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)$.

f est dit harmonique si son laplacien est null $\Leftrightarrow \Delta(f) = 0$.

Théorème 2.2.2 Soit f une fonction holomorphe sur D et $U, V \in C^2(D)$ tel que $f(z) = U(x, y) + iV(x, y)$ alors les deux fonctions réelles U, V sont harmoniques.

Demonstration :

$$U, V \in C^2(D) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \dots \dots (1) \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \dots \dots (2) \end{cases}$$

f est holomorphe sur $D \Rightarrow$ équation de Cauchy-riemann, sont vérifie

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \end{cases}$$

$$\stackrel{(2)}{\Rightarrow} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \end{cases}$$

$$\stackrel{(1)}{\Rightarrow} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Exemple 2.2.3 $U : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \rightarrow U(x, y) = \exp(x) \cos(y)$$

il est facile de vérifier que U est de classe C^2 dans $\mathbb{R}^2$ on a alors :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \exp(x) \cos(y) \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) = \exp(x) \cos(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\exp(x) \sin(y) \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = -\exp(x) \cos(y)$$

$$d'où \Delta u(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = \exp(x) \cos(y) - \exp(x) \cos(y) = 0$$

La laplacien de U est null donc une fonction harmonique .

Définition 2.2.4 U est appelée la fonction harmonique conjuguée de U

-Si f est holomorphe alors V harmonique conjuguée de U , et si V est harmonique sur D ,alors il existe des fonctions holomorphes d'où $U(x, y)$ est sa partie réelle tandis que la partie imaginaire et donnée par

$$\partial v = \frac{\partial v}{\partial x} \partial x + \frac{\partial v}{\partial y} \partial y = -\frac{\partial u}{\partial y} \partial x + \frac{\partial u}{\partial x} \partial y$$

Théorème 2.2.5 [4] Soit f une fonction holomorphe définie sur un ouvert V de $\mathbb{C}$,à valeur complexe .Posons (en identifiant $\Im$ et $\Re$), $\forall (x, y) \in V, G(x, y) = \Re(f(z))$ et

$H(x, y) = \Im(f(z))$, G et H sont harmoniques.

Preuve. [4] Notons pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ avec $x+iy \in V, f(x+iy) = F(x, y)$ avec les notations précédentes, nous avons $f(z) = F(x, y) = G(x, y) + iH(x, y)$.

G et H sont de classe C^∞ et

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial y}, \frac{\partial G}{\partial y} = -\frac{\partial H}{\partial x}.$$

Il vient immédiatement :

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y}.$$

G est donc harmonique. De même, H est harmonique. ■

Exemple 2.2.6 $U(x, y) = 2x - x^3 + 3xy^2$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2 - 3x^2 + 3y^2, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -6x$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 6xy, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6x$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Donc $U(x, y)$ est harmonique il existe des fonctions holomorphes telle que :

$$f(z) = U(x, y) + iV(x, y)$$

$$\text{avec } \partial v = -\frac{\partial u}{\partial y} \partial x + \frac{\partial u}{\partial x} \partial y \Rightarrow$$

$$\partial v = -6xy \partial x + (2 - 3x^2 + 3y^2) \partial y \dots \dots (*)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -6xy \Rightarrow v(x, y) = -3x^2y + c(y)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -3x^2 + c'(y), \frac{\partial v}{\partial y} = 2 - 3x^2 + 3y^2 \text{ d'après } (*)$$

$$c'(y) = 2 + 3y^2, c(y) = 2y + y^3 + cts$$

$$v(x, y) = -3x^2y + 2y + y^3 + cts$$

$$f(z) = 2x - x^3 + 3xy^2 + i(-3x^2y + 2y + y^3 + cts)$$

$$f(z) = 2(x + iy) + (-x^3 + 3xy^2 - i3x^2y) + icts$$

$$= 2z - z^3 + icts.$$

Corollaire 2.2.7 Toute fonction harmonique dans un ouvert D possède la propriété de la moyenne.

2.3 Propriétés des fonctions harmonique

Proposition 2.3.1 [5]

1) Soient une ouverte de $\mathbb{C}$, si f est une fonction sur U , on note $\bar{f}$ la fonction $z \rightarrow \overline{f(z)}$. On dit que f est antiholomorphe sur U si $\bar{f} \in H(U)$. Dire que f est antiholomorphe sur U signifie que :

$$\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \iff \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0.$$

2) On not $\mathcal{C}^2(U)$ l'ensemble des fonctions de classe C^2 sur un ouvert U de $\mathbb{C}$. Soit $f \in \mathcal{C}^2(U)$, si $z_0 \in U$, le laplacien de f au point z_0 est par :

$$\Delta f(z_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(z_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(z_0).$$

3) On note $Har(U)$ l'ensemble des fonctions harmoniques dans U .

* Il est clair que $Har(U)$ est un sous- $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de l'algèbre $\mathcal{C}^2(U)$. ce n'est pas une sous-algèbre de $\mathcal{C}^2(U)$. (par exemple $z = x + iy \rightarrow x$ est harmonique dans U , alors que $z \rightarrow x^2$

* Il est immédiat que $\overline{\Delta f} = \Delta \bar{f}$ Par suite :

$$f \in Har(U) \iff \bar{f} \in Har(U) \iff \Re(f), \Im(f) \in Har(U).$$

4) Toute fonction holomorphe ou antiholomorphe sur un ouvert U est harmonique sur U .

Corollaire 2.3.2 Soit D un ouvert de $\mathbb{C}$ et soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 . Les trois conditions suivantes sont équivalentes

1- f est harmonique sur D .

2- Pour tout $z_0 \in D$, $\exists r > 0$ et φ holomorphe sur $D(z_0, r)$ telle que $f = \Re(\varphi)$ sur $D(z_0, r)$.

3- Pour tout ouvert simplement connexe u de D , $\exists \varphi$ holomorphe sur u telle que $f = \Re(\varphi)$ sur u .

4- Les fonctions harmoniques sur un disque ouvert $D(a, r)$ ($a \in \mathbb{C}$ et $r > 0$), continues sur le disque fermé $\overline{D(a, r)}$ et à valeur complexe.

5- Soit f une fonction définie et continue sur la fermeture d'un domaine borné D de $\mathbb{C}$ et harmonique dans D .

Proposition 2.3.3 [5] Soient U un ouvert simplement connexe de $f \in Har(U)$

1) f est la somme d'une fonction holomorphe et d'une fonction antiholomorphe dans U .

2) Si f est à valeurs réelles, c'est la partie réelle d'une fonction holomorphe dans u déterminée à une constante additive imaginaire pure près.

Démonstration :

On a : $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) = 0 \iff g = \frac{\partial f}{\partial z} \in Har(u)$

L'ouvert U étant simplement connexe, g à une primitive h dans U . Alors $l = f - h$ est antiholomorphe, et on a $f = l + h$ si f est à valeurs réelles, on a :

$f = \Re(h + l) = \Re(h + \bar{l})$ et $h + \bar{l} \in Har(u)$ Le dernier point est immédiat.

Proposition 2.3.4 *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f \in Har(u)$. Alors f possède la propriété de moyenne dans U et vérifie le principe de maximum dans U .*

Démonstration :

Il suffit de démontrer le principe point, soient $a \in U$ et $r > 0$, telle que $D'(a, r) \subset U$. Dans un voisinage de $D'(a, r)$, on a $f = g + \bar{h}$, ou $g, h \in Har(u)$

Corollaire 2.3.5 [*Relation entre fonction holomorphe et harmonique*]

Si $f = u + iv$ est holomorphe, alors les fonction de deux variables réelles et à valeurs u , et v sont harmonique, c'est-à-dire telles que $\Delta u = 0, \Delta v = 0$, où

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \text{ (opérateur Laplacien) }.$$

Semi-continue supérieurement :

Soit X un espace topologique, x_0 un point de X et $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction.

On dit que f est semi-continue supérieurement en x_0 si l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :

· Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage U de x_0 telle que pour tout

$$x \in U : f(x) \leq f(x_0) + \varepsilon;$$

· $\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq f(x_0)$, où $\limsup$ désigne la limite supérieure (d'une fonction en un point).

La fonction f est dit semi-continue supérieurement si l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :

· f est semi-continue supérieurement en tout point de X , pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble de sur-niveau $\{x \in X : f(x) \geq a\}$ est fermé.

• L'hypographe $\{(x, a) \in X \times \mathbb{R} : f(x) \geq a\}$ est fermé.

Principe de maximum :

Le principe du maximum est un théorème d'analyse complexe qui exprime que le module d'une fonction holomorphe ne peut pas admettre un maximum local. On peut l'énoncer sous différentes formes .

Théorème 2.3.6 • Soit f une fonction holomorphe dans un domaine U . Si $|f|$ a un maximum local en un point a de U , alors f est constante dans U .

• Soit U un ouvert borné et f une fonction holomorphe dans U . Alors, pour tout z

$$\text{de } U, \text{ on a : } |f(z)| \leq \sup \{|f(w)|; w \in \partial U\}.$$

Le principe du maximum peut être déduit de la propriété de la moyenne, ou même de la propriété de la sous-moyenne. Ainsi, il peut être étendu à la classe des fonctions harmoniques (et même sous-harmonique).

La moyenne

La moyenne harmonique est définie de la manière suivante :

$$\bar{x}^h = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}$$

Si un train fait un trajet aller-retour entre 2 villes à la vitesse constante v_1 pour l'aller et à la vitesse constante v_2 au retour, la vitesse moyenne du trajet total n'est pas la moyenne arithmétique des 2 vitesses, mais leur moyenne harmonique.

Exemple 2.3.7 : Si un rectangle a pour côtés 3 et 7, alors le carré (c'est-à-dire le rectangle moyen) qui a le même rapport p/s (Surface sur Périmètre) a pour côté la moyenne harmonique de 3 et 7, c'est-à-dire 4,2.

La moyenne harmonique se note aussi $H(x)$ quand des moyennes différentes sont présentes.

Il existe une moyenne harmonique pondérée, définie ci-dessous. étant donné un ensemble de données :

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\},$$

ainsi que les poids correspondants :

$$W = \{w_1, w_2, \dots, w_n\},$$

la moyenne harmonique pondérée est calculée comme étant :

$$\bar{x}^H = \sum_{i=1}^n w_i / \sum_{i=1}^n \frac{w_i}{x_i}$$

2.4 Un problème de fonction harmonique

2.4.1 Problème de Dirichlet

En mathématique, le problème de Dirichlet est de trouver une fonction harmonique définie sur un ouvert de $\Omega \in \mathbb{R}^n$ prolongeant une fonction continue définie sur la frontière de l'ouvert Ω .

2.4.2 Exposé du problème

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\partial\Omega$ sa frontière.

Soit $G : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

Peut-on trouver $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

• ϕ de classe C^2 et $\Delta^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_n^2} = 0$ (ϕ vérifie l'équation de Laplace)

• ϕ continue sur $\overline{\Omega}$.

• $\phi = G$ sur $\partial\Omega$.

Il n'existe pas toujours de solution au problème de Dirichlet.

2.4.3 Solution au problème

Solution sur un disque dans $\mathbb{R}^2$:

Dans cette partie : $\Omega = D(0, 1)$ le disque de centre 0 et de rayon 1

Dans le cas précis du disque dans $\mathbb{R}^2$, il existe une solution au problème de Dirichlet :

On a toujours $G : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur ∂D

on pose : $g : \pi \rightarrow \mathbb{R}$ (ou π est le tore)

$$\theta \mapsto G(\cos \theta, \sin \theta)$$

la solution est $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}$ définie telle que :

$$\phi(r \cos \theta, r \sin \theta) = \begin{cases} \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n(g) r^{|n|} \exp(in\theta), & \text{si } r < 1 \\ g(\theta), & \text{si } r=1 \end{cases}$$

où $C_n(g)$ est coefficient de la série de Fourier de la fonction g .

2.5 Fonction sous -harmonique

En mathématique , une fonction sous-harmonique est une fonction définie sur un domaine de plan complexe à valeur réelle vérifiant certaines conditions d'harmonicité plus faibles que celles vérifiées par les fonctions harmoniques .

Définition 2.5.1 Soit D une fonction à valeur dans $]-\infty, +\infty[$ définie sur un ouvert D du plan complexe.

On dit que u est sous-harmonique si et elle vérifie les deux propriétés suivantes

- u est continue.
 - u vérifie la propriété de la sous-moyenne local :
- pour tout point $z_0 \in u, \forall r < 0$ telle que :

$$u(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + r \exp(i\theta)) d\theta \text{ pour tout } r < r_0$$

Remarque 2.5.2 Par fois on trouve une autre définition inposant que la fonction u soit semi-continue supérieurement $\forall c \in \mathbb{R}, \{z, / u(z) < c\}$ est un ouvert de u .

Proposition 2.5.3 Outre l'analogie avec l'égalité de la moyenne, les fonctions sous-harmoniques vérifient un certain nombre de propriétés à comparer avec celles des fonctions harmoniques :

- Le principe du maximum : sur tout partie Ω relativement compacte dans U , le maximum de u sur l'adhérence Ω de est atteint sur le bord ; et si u admet un maximum global sur U , alors elle est constante. En revanche, il n'y a pas de principe du minimum.
- Les fonctions sous-harmoniques sur U sont caractérisées parmi les fonctions continues comme celles vérifiant le principe du maximum sur tout disque relativement compact dans U .
- Si $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction convexe croissante et si U est une fonction sous-harmonique, alors $\varphi \circ u$ est sous-harmonique.
- Le théorème central permettant d'utiliser ces fonctions en analyse harmonique est celui disant que si une famille F des fonctions sous-harmoniques dans un domaine U est stable.
- Par maximum (si $u, v \in f$ alors $\max(u, v) \in f$) et
- Par modifiée de Poisson (si $u \in f$ et si Δ est un disque relativement compact dans U , de centre a , la modifiée de Poisson de U dans Δ à avoir la fonction

$\tilde{u}$ qui vérifie $\tilde{u} = u$ sur $U - \Delta$ est sur $\Delta : \tilde{u}$

$$(a + z) = \Re \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\exp(it)+z}{\exp(it)-z} u(a + \exp(it) dt) \right), \text{ est encore dans } F).$$

Alors la borne supérieure des éléments de F est soit constamment égale à $+\infty$, soit une fonction harmonique sur U .

Pour démontrer le principe de Dirichlet, on se place ensuite sur un domaine U dont le bord est régulier, muni d'une fonction continue ϕ sur son bord, et on prend F la famille des fonctions sous-harmoniques sur U majorées par ϕ sur le bord de U , la borne supérieure de cette famille est alors une solution.

Exemple 2.5.4 :

— Si h est une fonction convexe sur $\mathbb{R}$, la fonction f définie par $f(z) = h(\Re(z))$ est sous harmonique.

en effet, f est continue et vérifie globalement la propriété de sous-moyenne.

— Si f est une fonction holomorphe sur D , alors $\log |f|$ est sous-harmonique.

En effet, elle est continue à valeurs dans $]-\infty, +\infty[$ donc semi-continue supérieurement.

— Si $z_0 \in D$ est tel que $f(z_0) = 0$, alors $\log |f(z_0)| = -\infty$ est la formule de la sous-moyenne est valable pour tout $r > 0$.

— Si $z_0 \in U$ est tel que $f(z_0) \neq 0$, la fonction $\log |f|$ est harmonique dans un voisinage de z_0 et satisfait donc la propriété locale de la (sous-moyenne).

· Soit u une fonction harmonique dans D et soit $p \geq 1$. Alors la fonction g continue sur D à valeurs réelles définie par $g(z) = |u(z)|^p$ est sous-harmonique.

Proposition 2.5.5 [6]

— Si u est sous-harmonique, pour tout constant $c > 0$, cu est sous-harmonique.

— Soit $(u_\alpha)_\alpha$ une famille de fonction sous-harmonique et soit $u = \sup_\alpha u_\alpha$. Alors u est sous-harmonique si elle est $+\infty$ et semi-continue supérieurement.

— Soit $(u_i)_{i \geq 1}$ une suite décroissante de f sous-harmonique alors $u = \lim_{i \rightarrow +\infty} u_i$ est sous-harmonique.

Remarque 2.5.6 Une remarque importante est qu'une fonction sous-harmonique est déterminé par sa donnée presque partout; en effet on a l'égalité suivante pour tout $z_0 \in \Delta$.

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sup_{z \in B(z_0, r)} u(z) \leq u(z_0) \leq \lim_{r \rightarrow 0} \sup \mu_B(u; a, r) \leq \lim_{r \rightarrow 0} \sup_{z \in B(z_0, r)} u(z)$$

Proposition 2.5.7 [6] : Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $u : U \longrightarrow]-\infty, +\infty[$, les conditions suivantes sont équivalents :

1- u est sous-harmonique.

2- Si D est un disque fermé contenu dans U et f une fonction holomorphe dans D^0 continue dans D telle que $u \leq \Re(f)$ sur ∂D , alors $f \leq \Re(f)$ dans D .

3- Pour tout $\delta > 0$, soit $D_\delta = \{z \in D, \text{ telle que } d(z, \mathbb{C} \setminus D) > \delta\}$ alors pour tout mesure positive μ sur $[0, \delta]$ et tout $z \in D_\delta$ on a :

$$2\pi u(z) \int_0^\delta d\mu \leq \int_0^\delta \left(\int_0^{2\pi} u(z + r \exp(i\theta)) d\mu \right) d\theta.$$

Pour chaque $\delta > 0$, et tout $z \in D_\delta$, il exist une mesure positive μ à support dans $[0, \delta]$, distant de la masse de Dirac en 0, telle que la formule du 3 ci-dessus soit vraie.

Corollaire 2.5.8 [6]

1- La somme de deux fonction sous-harmonique est sous-harmonique .

2- Si f est une f holomorphe dans D alors $\log |f|$ est sous harmonique .

3- La sous-harmonicité est une propriété locale.

4- Soit φ une fonction convexe croissant sur D telle que $\varphi(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x)$, si u est sous-harmonique alors $\varphi(u)$ l'est aussi, en particulier si f est holomorphe dans D alors $|f|$ et $|f|^p$, $p > 0$ sont sous-harmonique.

Remarque 2.5.9 Ce que précide montre qu'une fonction u de classe C^2 est sous-harmonique, si et seulement si $\Delta u \geq 0$, lorsque $\Delta u > 0$, on dit que u est strictement sous-harmonique .

Proposition 2.5.10 [6] Soit u une fonction sous-harmonique dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}$, on suppose que u n'est pas identiquement nulle sur une composante connexe de Ω . Alors pour tout fonction positive v ce classe C^2 à support compact dans Ω , on a :

$$\int_{\Omega} u \Delta v d\lambda \geq 0.$$

Proposition 2.5.11 [6] Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, soit u une fonction localement intégrable dans Ω vérifiant la propriété de la proposition précédente. Alors il existe une unique fonction u sous-harmonique sur Ω égale presque partout à u . De plus, si φ est une fonction positive radiale à support compact intégrable, pour tout $z \in \Omega$ on a :

$$U(z) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\int u(z - \delta \zeta) d\lambda(\zeta)}{\int \varphi(\zeta) d\lambda(\zeta)}.$$

2.6

Conclusion Générale

Dans ce mémoire on a essayé d'étudier un cas pour les fonctions holomorphes ce lui des fonctions harmoniques qui ont une importance dans les équations différentielles partielles comme la résolution de problème de Dirichlet .

Mais il serait important d'étudier plus les fonctions sous-harmoniques dans d'autre travail.

Bibliographie

- [1] A. Giroux : Notes de coures .Département de mathématiques et statistique.Université de montrial.2004.
- [2] A. Warusfel :Topologie.
- [3] F.Golse,Y.laszlo,C.Viterbo : Analyse réelle et complexe.2010.
- [4] J.Di valentin :prolongement de cours.2005.
- [5] P.Tauvel :Analyse complexe pour la licence 3.Dunod.paris. 2006.
- [6] P.Charpentier :Introductrion à l'analyse complexe à plusieurs variables.Université Bordeaux I.2009.
- [7] S.Benzoni et F.Filbet :Cours de mathématique pour la licence Analyse complexe.2007.
- [8] S.Balac,L.chupin :analyse et algèbre.