الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Minstère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

---

CENTRE UNIVERSITAIRE DE MILA

INSTITUT DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE

Réf.

Mémoire de fin d'étude

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Licence Académique

Domaine : **Mathématiques et Informatique**

Filière : **Mathématiques**

Spécialité : **Mathématiques Fondamentales**

Thème

QUELQUES PROPRIETES DE LA TRANSFORMEE DE FOURIER

Dirigé par : Ismail Kaouache

Presenté par :

1. Ahlem Arama
2. Messaouda Tabchouche
3. Lamia Boutera mansour

Année universitaire
2012-2013

Remerciements

Premièrement, on remercie le bon Dieu qui nous a donné la confiance en nous, la santé, la force et la volonté pour pouvoir terminer ce travail.

D'une part on remercie bien l'enseignant Mr "KAOUACHE SMAIL" qui était chargé de l'encadrement de ce mémoire et d'autre part on le remercie pour ce que nous avons acquit de lui en matière d'orientation et conseils.

Espérant bien que nos enseignants d'université reçoivent nos remerciements avec satisfaction et joie pour ce qu'ils nous donné durant la période d'étude à l'université.

On remercie également les membres qui ont participé du début jusqu'à fin de ce travail notamment: Ahlem, Massouda, et Lamia pour leurs volontés et leurs efforts à fin d'arriver à ce travail. Sans oublier tout ceux qui nous ont bien participé avec nous durant nos études pratiques. Merci infiniment.

Table des matières

Introduction Générale **2**

1 Introduction à la théorie des séries de Fourier **4**

1.1 Notions générales 4

1.1.1 Périodes d'une fonction périodique 4

1.1.2 Séries trigonométrique-Séries de Fourier 7

1.1.3 Convergence des séries de Fourier 14

1.2 Théorème de Dirichlet 15

1.2.1 Théorème de Dirichlet 15

2 Transformées de Fourier **20**

2.1 Les intégrales de Fourier 21

2.1.1 La Transformée de Fourier 22

2.1.2 Transformée de Fourier inverse 22

2.2 Propriétés essentielles de la Transformée de Fourier 23

2.3 Qelques exemples sur les transformées de Fourier 27

2.3.1 TF de la fonction porte 27

2.3.2 Fonction Exponentielle 28

2.3.3 Fonction Réctangle 28

2.3.4 Fonction Triangle 29

2.3.5 Fonction Signe 29

2.3.6 Le peigne de Dirac 29

2.3.7 La Gaussienne 30

Bibliographie **31**

Introduction Générale

En analyse, la transformation de Fourier est un analogue de la théorie des séries de Fourier pour les fonctions non périodique. Dans les séries de Fourier, on cherche à obtenir l'expréssion de la fonction comme "somme infinie " des fonctions trigonométrique de toutes fréquences qui forment son spect.

Les séries et les transformations de Fourier constituent les deux outils de base de l'analyse harmonique. Nous avons développées les fonctions périodiques en séries de sinus et de cosinus, ou d'exponentielles complexes, appelées séries de Fourier.

En physique, dans le cas d'une onde sonore, on peut se réprésenter les termes d'une série de Fourier comme un ensemble d'harmoniques dont les fréquences forment un ensemble infini mais discret $\{nv\}, n = 1, 2, 3...(v = \frac{w}{2\pi}$ est la fréquence du fondamental).

En électricité, une tension périodique peut être représentée par une série de Fourier. Celle-ci est une superposition d'un ensemble infini discret de tensions alternatives de fréquences n.

En optique, une lumière constituée d'un ensemble discret de longueurs d'onde

$$\{\lambda/n\}, n = 1, 2..$$

C'est-à-dire un ensemble discret de couleurs, peut être représentée par une série de Fourier.

Deux questions se posent alors :

Premièrement, est-il possible de représenter une fonction non périodique par quelque chose d'analogue à une série de Fourier ?

Ensuite, peut-on étendre ou modifier le concept de série de Fourier de manière inclure le cas d'un spectre continu ?

Dans la transformée de Fourier, l'idée et de remplacer une somme par une intégrale, la série de Fourier sera remplacée par une intégrale de Fourier. Celle-ci peut être utilisée pour représenter des fonctions non périodiques, par exemple un son qui n'est pas répété, une impulsion unique de tension, ou un flash de lumière.

Ce mémoire comporte deux chapitres. Il est structuré de la manière suivante :
Dans le premier chapitre, nous allons introduire le formalisme des séries de Fourier qui

permet de décomposer une fonction continue, à une série trigonometrique comme une superposition de fonctions harmoniques (sinus ou cosinus), dont les amplitudes et les fréquences seraient différents.

Dans le deuxième chapitre, on va introduire l'extention des séries de Fourier aux fonctions non périodiques et on parle alors de transformés de Fourier.On va présenter quelques propriétés classiques sur la transformée de Fourier, et on termine par quelques exemple sur la transformée de Fourier.

Chapitre 1

Introduction à la théorie des séries de Fourier

Dans ce chapitre, nous allons introduire le formalisme des séries de Fourier qui permet de décomposer une fonction continue, à une série trigonometrique comme une superposition de fonctions harmoniques (sinus ou cosinus), dont les amplitudes et les fréquences seraient différents.

1.1 Notions générales

1.1.1 Périodes d'une fonction périodique

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
On dit que f est périodique, s'il existe un nombre réel $T \neq 0$, tel que

$$f(x+T) = f(x), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

le nombre T est appelé période de f.

Proposition 1.1.1 *Soit f une fonction périodique de période T. Alors*
Pour tout $K \in \mathbb{Z} - \{0\}$, KT est aussi une période de f.
Donc toute fonction périodique admet une infinité de périodes.

Preuve. Soit T une période de f, alors pour tout entier $K > 1$, on a :

$$\begin{aligned} f(t+kT) &= f\left[t+(k-1)T+T\right] \\ &= f\left[t+(k-1)T\right] = ... = f(t), \text{ Pour tout } t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Donc KT est une période de f.
Montrons maintenant que si K' est un entier négatif, $K'T$ est une période de f.
Sachant que :

$$f(t-T) = f\left[(t-T)+T\right] = f(t), \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Le nombre $-T$ est une période de f.
Par suite $K(-T) = -KT$, $(K > 1)$ est une période de f.
Ce qui achève la demonstration. ■

Proposition 1.1.2 *Soit f une fonction continue, périodique et non constante ; alors l'ensemble des périodes positives de f admet un élément minimal qu'on l'appelle, en général, période de f.*

Preuve. *Notons par K l'ensemble des périodes positives de f.*
K est un ensemble inférieurement borné, alors il admet une borne inférieure, soit m.
Envisageons deux cas.
a) $m > 0$
Puisque m est la borne inférieure de K, alors il existe une suite $(T_n)_n$ de K qui converge vers m.
Pour tout entier n, T_n est un élément de K. C'est-à-dire

$$f(t+T_n) = f(t) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Comme f est une fonction continue, alors

$$\begin{aligned} f(t) &= \lim_{n\to\infty} f(t+T_n\ ) \\ &= f(\lim_{n\to\infty}(t+T_n)) \\ &= f(t+m) \end{aligned}$$

D'où m est un élément de K, qui est son élément minimal.
b) *Supposons maintenant $m = 0$*
De façons analogue, il existe une suite $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de K (θ_n assez petit) tel que

$$\lim_{n\to\infty} t - \left[\frac{t}{\theta_n}\right]\theta_n = 0, \text{ pour tout } t \in \mathbb{R},$$

où $\left[\frac{t}{\theta_n}\right]$ est la partie entière de $\frac{t}{\theta_n}$.

De la continuité de f, on déduit :

$$\begin{aligned} f(t) &= \lim_{n\to\infty} f(t - \left[\frac{t}{\theta_n}\right]\theta_n) \\ &= f(0), \textit{ pour toute } t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

C'est-à-dire f est une constante sur $\mathbb{R}$.
D'où m ne peut pas être différent de 0. ■

Proposition 1.1.3 *Soit f une fonction périodique de période T, alors la fonction g, définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(ax+b)$, est aussi une fonction périodique, de période $\frac{T}{a}$.*

Preuve.
En effet

$$\begin{aligned} g(x+\frac{T}{a}) &= f\left[a(x+\frac{T}{a})+b\right] \\ &= f(ax+b+T) \\ &= f(ax+b) \\ &= g(x). \end{aligned}$$

Proposition 1.1.4 *Soit f une fonction $T-$périodique ; alors l'intégrale de f sur tout intervalle de longueur T, ne dépend pas des bornes d'intégration.*
C'est-à-dire

$$\int_c^{c+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx, \textit{ pour tout } c \in \mathbb{R}$$

Preuve. *Sachant que*

$$\begin{aligned} \int_T^{c+T} f(x)dx &= \int_T^{c+T} f(x-T)dx \\ &= \int_0^c f(t)dt \\ &= \int_0^c f(x)dx \end{aligned}$$

On peut écrire :

$$\begin{aligned}\int\limits_{c}^{c+T} f(x)dx &= \int\limits_{c}^{T} f(x)dx + \int\limits_{T}^{c+T} f(x)dx \\ &= \int\limits_{c}^{T} f(x)dx + \int\limits_{0}^{c} f(x)dx \\ &= \int\limits_{0}^{T} f(x)dx\end{aligned}$$

■

■

1.1.2 Séries trigonométrique-Séries de Fourier

En physique, plusieurs phénomènes se modélisent à l'aide des fonctions définies comme

$$f_k(x) = A_k \sin(\frac{2\pi k}{T}x + \varphi_k), k = 1, 2, ..., \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

f_k s'appelle fonction harmonique.
Il est évident que les fonctions f_k sont $\frac{T}{k}-$périodiques.
Par conséquent le nombre kT_k est la période commune à toutes les fonctions f_k.
Posons maintenant

$$F_n(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k \sin(\frac{2\pi k}{T}x + \varphi_k) \tag{1.1}$$

Et donc F_n une fonction $T-$périodique.
Ce résultat peut se généraliser à la somme infinie par

$$F(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(\frac{2\pi k}{T}x + \varphi_k) \tag{1.2}$$

Sachant

$$\begin{aligned}A_k \sin(\frac{2\pi k}{T}x + \varphi_k) &= F_n(x) \\ &= A_k \sin\varphi_k \cos\frac{2\pi k}{T}x \ + A_k \cos\varphi_k \sin\frac{2\pi k}{T}x \ .\end{aligned}$$

Les égalités (1.1)et (1.2) peuvent être écrire

$$F_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l}) \tag{1.3}$$

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l}), \qquad (5\text{-}4) \tag{1.4}$$

où

$$\begin{cases} \frac{a_0}{2} = A_0 \\ a_k = A_k \sin\varphi_k \\ b_k = A_k \cos\varphi_k \\ 2l = T \end{cases}$$

Les membres des égalités (1.3) et (1.4) sont des fonctions $2l-$périodiques.

Définition 1.1.5 *On appelle série trigonométrique, toute série de la forme :*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l},\ où\ x \in \mathbb{R}.$$

Les coefficients a_n et b_n sont des réels
L'égalité,(1.4) lorsqu'elle est vérifiée, s'appelle développement de la fonction F en séries trigonométriques

Ecriture complexe

On remarque que :

$$\begin{cases} \cos\frac{n\pi x}{l} = \frac{\exp(i\frac{n\pi x}{l})+\exp(-i\frac{n\pi x}{l})}{2} \\ \sin\frac{n\pi x}{l} = \frac{\exp(i\frac{n\pi x}{l})-\exp(-i\frac{n\pi x}{l})}{2i} \end{cases}$$

La série précédente peut se reécrire sous la forme

$$\frac{a_0}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}\left[(a_n - ib_n)\exp(i\frac{n\pi x}{l}) + (a_n + ib_n)\exp(-i\frac{n\pi x}{l})\right].$$

Par suite la série est donnée par

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \exp(i\frac{n\pi x}{l}),$$

où

$$\begin{cases} C_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n),\ n > 0 \\ \qquad\qquad \text{et} \\ C_n = \frac{1}{2}(a_n + ib_n),\ n < 0 \end{cases}$$

Propriétés de systéme trigonométrique

Définition 1.1.6 *On appelle système trigonométrique, l'ensemble S défini par*

$$S = \left\{ \frac{1}{2}, \cos\frac{\pi x}{l}, \sin\frac{\pi x}{l}, ..., \cos\frac{k\pi x}{l}, \sin\frac{k\pi x}{l}, ... \right\} \tag{1.5}$$

Proposition 1.1.7 *Le systémes trigonométrique S est orthogonal dans le sens suivant : l'intégrale sur $[-l, l]$ du produit de deux fonctions distinctes de l'ensemble S est nulle, et l'intégrale du carré d'une fonction de l'ensemble S est différente de zéro.*

Preuve. Il suffit de calculer les différentes intégrales en question :
Nous avons

$$\begin{cases} \int\limits_{-l}^{l} \frac{1}{2}\cos\frac{k\pi x}{l}dx = \frac{l}{2k\pi}\left[\sin\frac{k\pi x}{l}\right]_{-l}^{l} = 0 \\ \int_{-l}^{l} \frac{1}{2}\sin\frac{k\pi x}{l}dx = -\frac{l}{2k\pi}\left[\cos\frac{k\pi x}{l}\right]_{-l}^{l} = 0 \\ \int\limits_{-l}^{l} \cos\frac{k\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-l}^{l}\left[\cos\frac{(k+n)\pi x}{l} + \cos\frac{(k-n)\pi x}{l}\right]dx = 0,\ \text{si } k \neq n \end{cases}$$

De même

$$\begin{cases} \int\limits_{-l}^{l} \sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}dx = 0, \text{ si } k \neq n \\ \int\limits_{-l}^{l} \cos\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}dx = 0 \end{cases}$$

Enfin

$$\begin{cases} \int\limits_{-l}^{l} \cos^2(\frac{k\pi x}{l})dx = \int\limits_{-l}^{l} \frac{1+\cos 2(\frac{k\pi x}{l})}{2}dx = l \\ \int\limits_{-l}^{l} \sin^2(\frac{k\pi x}{l})dx = \int\limits_{-l}^{l} \frac{1-\cos 2(\frac{k\pi x}{l})}{2}dx = l \\ \int\limits_{-l}^{l} (\frac{1}{2})^2 dx = \frac{l}{2} \end{cases}$$

Etudions maintenant les coefficients de la série trigonométrique :
Si la série
$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n\geq 1} a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}$$
est convergente sur $[-l,l]$, alors sa somme S est une fonction périodique de période 2π.
Si de plus cette convergence est uniforme, alors les coefficients sont donnés par :
$$\begin{cases} a_0=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} S(x)dx \\ a_n=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} S(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\ n\geq 1 \\ b_n=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} S(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\ n\geq 1 \end{cases} \tag{1.6}$$
La série
$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n\geq 1} a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}$$
converge uniformément sur $[-l,l]$; il en est de même pour la série obtenue en multipliant tous ses termes par une fonction bornée, par exemple, $\cos\frac{p\pi x}{l}$ où $\sin\frac{p\pi x}{l}$ pour $p\in\mathbb{N}$.
Soit
$$S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n\geq 1} a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}$$
En intégrant terme à terme, on trouve
$$\begin{aligned}\int\limits_{-l}^{l} S(x)\cos\frac{p\pi x}{l}dx &= \frac{a_0}{2}\int\limits_{-l}^{l}\cos\frac{p\pi x}{l}dx+\sum_{n\geq 1}(a_n\int\limits_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{p\pi x}{l}dx+ \\ &\quad +b_n\int\limits_{-l}^{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{p\pi x}{l}dx).\end{aligned} \tag{1.7}$$

$$\int_{-l}^{l} S(x)\sin\left(\frac{p\pi x}{l}\right)dx = \frac{a_0}{2}\int_{-l}^{l}\sin\left(\frac{p\pi x}{l}\right)dx + \sum_{n\geq 1}(a_n\int_{-l}^{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{p\pi x}{l}dx + +b_n\int_{-l}^{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{p\pi x}{l}dx). \tag{1.8}$$

Les relatios (1.7) et (1.8) se réduisent donc

$$\begin{cases} 2la_0 = \int_{-l}^{l} S(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx \\ la_n = \int_{-l}^{l} S(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx\,;\ n\geq 1 \\ lb_n = \int_{-l}^{l} S(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx\,;\ n\geq 1 \end{cases} \tag{1.9}$$

■

Définition 1.1.8 *La série trigonométrique*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{N\geq 1} a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{n\pi x}{l},$$

où les coefficients a_0,a_n,b_n,sont déterminés par les formules(1.6) à l'aide d'une fonction S, s'appelle série de Fourier de la fonction S.
Les coefficients a_0,a_n,b_n, ainsi déterminés, s'appellent coefficients de Fourier de la fonction S.

Développement en séries de Fourier des fonctoins paires et impaires

Définition 1.1.9 *Soit f une fonction défenie sur $[-l,l]$.*
1-f est dite paire si

$$f(-x) = f(x),\ \textit{pour tout } x\in[-l,l]$$

2-f est dite impaire si

$$f(-x) = -f(x),\ \textit{pour tout } x\in[-l,l]$$

Si f est une fonction quelconque définie sur$[-l,l]$, alors f_1 est une fonction paire et f_2 est une fonction impaire; sachant que f_1 et f_2 sont définie comme suit :

$$\begin{cases} f_1(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2} \\ f_2(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} \end{cases}$$

De plus

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x), \text{ pour tout } x \in [-l, l]$$

Donc toute fonction définie sur $[-l, l]$ peut être exprimée à l'aide de la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

On appelle les fonctions f_1 et f_2, respectivement, partie paire de f et partie impaire de f.

Soit f une fonction intégrable sur$[-l, l]$, alors

$$\begin{aligned} \int_{-l}^{l} f(x)dx &= \int_{-l}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{l} f(x)dx \\ &= \int_{0}^{l} [f(x) + f(-x)]\, dx \end{aligned}$$

En remplaçant, x par $-x$, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{-l}^{0} f(x)dx &= -\int_{l}^{0} f(-x)dx \\ &= \int_{0}^{l} f(-x)dx. \end{aligned}$$

Par suite

$$\int_{-l}^{l} f(x)dx = \begin{cases} 2\int_{0}^{l} f(x)dx, \text{ si } f \text{ est une fonction paire} \\ 0, \text{ si } f \text{ est fonction impaire.} \end{cases}$$

Sachant que les fonctions $\frac{1}{2}$,cos $\frac{k\pi x}{l}$, $k = \overline{1.n}$ sont paires, et les fonctions $\frac{1}{2}$,sin $\frac{j\pi x}{l}$,sin $\frac{2\pi x}{l}$, $j = \overline{1.n}$ sont impaires ; on peut énoncer la proposition suivante :

Proposition 1.1.10 *Soit f une fonction intégrable sur $[-l, l]$.*
Si f est paire, sa série de Fourier s'écrit sous la forme :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{K=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi x}{l}$$

Et si f est impaire, sa série de Fourier s'écrit de la forme

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

Preuve. En effet, si f est une fonction paire, $f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}$ définit une fonction paire et $f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}$ définit une fonction impaire.
D'où

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(\xi)d\xi = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(\xi)d\xi \\ b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(\xi)\sin\frac{k\pi\xi}{l}d\xi = 0 \\ a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(\xi)\cos\frac{k\pi\xi}{l}d\xi = \frac{2}{l}\int_{-l}^{l} f(\xi)\cos\frac{k\pi x}{l}d\xi \end{cases}$$

Si f est une fonction impaire, alors $f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}$ définit une fonction impaire et $f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}$ définit une fonction paire, d'où

$$\begin{cases} 2la_n = 0\,;\, n \geq 0 \\ lb_n = \int_{-l}^{l} S(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx\,;\, n \geq 1 \end{cases}$$

■

Développement de fonction en série de Fourier sur $[-\pi, \pi]$

Pour dévlopper une fonction f en série de Fourier sur $[-\pi, \pi]$, il suffit de remplacer l par π dans les formules (1.9), et on obtient la série

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Avec

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \\ a_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \ dx, \ n \geq 1 \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \ dx, \ n \geq 1. \end{cases}$$

1.1.3 Convergence des séries de Fourier

Pour les séries trigonométriques on n'a pas de résultats comparables avec ceux obtenus pour une série entiére.
On peut indiquer des conditions suffisantes de convergence.

Proposition 1.1.11 *(convergence uniforme) Si les séries* $\sum\limits_{n\geq 1} |a_n|$ *et* $\sum\limits_{n\geq 1} |b_n|$ *sont covergentes, alors la série :*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \ x \in \mathbb{R}$$

est normalement convergente sur $\mathbb{R}$*, donc uniformément convergents sur* $\mathbb{R}$*, et sa somme est une fonction continue sur* $\mathbb{R}$*.*

Preuve. La démonstration est basée sur l'utilisation du critère de Weierstrass. ■

Proposition 1.1.12 *(Convergence simple) Si les suites* $(a_n)_n$ *et* $(b_n)_n$ *sont décroissantes et tendent vers* 0*, alors la série trigonométrique*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

est convergente pour tout $x \neq 2k\pi$*,* $k \in \mathbb{Z}$ *et sa convergence est uniforme sur chaque intervalle* $[2k\pi + \alpha, 2(k+1)\pi - \alpha]$ *, où* $\alpha \in]0, \pi[$*.*
Sa somme est donc une fonction continue de x *pour* $x \neq 2k\pi$*.*

Preuve. La démonstration est basée sur l'utilisation du critère d'abel. ■

Exemple 1.1.13 *La série* $\sum\limits_{n\geq 1} (\frac{1}{n} \cos nx + \sin nx)$ *converge pour tout* $x \neq 2k\pi$*.*

Remarque 1.1.14 *On peut remplacer l'intervalle* $[0, 2l]$ *par un intervalle quelconque de longueur* $2l$*, i.e par* $[\alpha, \alpha + 2l]$ *;* $\alpha \in \mathbb{R}$.
Les coefficients seront donnés par :

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{l} \int\limits_{\alpha}^{\alpha+2l} S(x)dx \\ a_n = \frac{1}{l} \int\limits_{\alpha}^{\alpha+2l} S(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \ n \geq 1 \\ b_n = \frac{1}{l} \int\limits_{\alpha}^{\alpha+2l} S(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \ n \geq 1 \end{cases}$$

1.2 Théorème de Dirichlet

Définition 1.2.1 *On dira qu'une fonction réelle d'une variable réelle a une discontinuité de premier espéce au point* x_0 *, si elle admet en ce point une limite à droite* $f(x_o^+)$ *et une limite à gauche* $f(x_o^-)$ *qui sont distinctes.*

Définition 1.2.2 *Pour une telle fonction, on dira qu'elle admet une dérivée au piont* x_0 *à droite (resp à gauche) si la fonction définie pour* $h > 0$ *par :*

$$h \mapsto \frac{f(x_0 + h) - f(x_0^+)}{h} \text{ ; } (resph \mapsto \frac{f(x_0^-) - f(x_0 - h)}{h})$$

a une limite lorsque h *tend vers* 0.

1.2.1 Théorème de Dirichlet

Théorème 1.2.3 *(Théorème de Dirichlet) Soit* f *une fonction réelle d'une variable réelle, périodique satisfaisant aux conditions suivantes :*
a) *Les discontinuités de* f *dans tout intervalle borné sont de premiére espèce et en nombre fini .*
b) f *admet en tout point une dérivée à droite et une dérivée à gauche.*
Alors la série de Fourier de f *est convergente et a pour somme*

$$S(x) = \begin{cases} f(x) \text{ pourtout } x \in \mathbb{R}, \text{où } f \text{ est continue} \\ \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-) \text{ pourtout } x \in \mathbb{R}, \text{où } f \text{ est discontinue} \end{cases}$$

Pour la démonstration de ce théorème, on a besoin des résultats suivants :

Lemme 1.2.4 *Pour tout $u \neq 2k\pi$, on a :*

$$C(u) = \frac{1}{2} + \sum_{K=1}^{n} \cos ku = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{u}{2}} \tag{1.10}$$

Preuve. Soit $u \neq 2k\pi$, alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \sum_{K=1}^{n} \exp iku &= \frac{1}{2} + \frac{\exp i(n+1)u - \exp iu}{\exp(iu) - 1} \\ &= \frac{2\exp i(n+1)u - \exp(iu) - 1}{2(\exp(iu) - 1)} \end{aligned}$$

Par suite, on a

$$\frac{1}{2} + \sum_{K=1}^{n} \cos ku = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{u}{2}}$$

■

Lemme 1.2.5 *Si f est une fonction bornée sur $[a,b]$, alors :*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x) \sin nx dx = 0.$$

Preuve. a. Si $f(x) = k$ (k constante)

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x) \sin nx dx = \lim_{n\to\infty} \left[-\frac{k}{n} \cos nx \right]_a^b = 0$$

b. Soit maintenant f une fonction bornée sur $[a,b]$.
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision d de $[a,b]$ en intervalles $[x_{i,}x_{i+1}]$ avec $x_0 = a$ et $x_n = b$, et il existe une fonction en éscalier g telle que

$$|f(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \text{ pour tout } x \in [a,b] .$$

On a

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\sin nx - g(x)\sin nx)dx\right| &\leq \int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx \\ &\leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{2(b-a)}dx \\ &= \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Pour n fixé :

$$\int_a^b f(x)\sin nxdx \quad \text{tend vers} \int_a^b g(x)\sin nxdx$$

Sur chaque intervalle $]x_{i,}x_{i+1}[$, l'intégrale

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} g(x)\sin nxdx \quad \text{tend vers } 0(\text{Car } g(x) \text{ est constante}).$$

Comme il y a un nombre fini d'intervalle $[x_{i,}x_{i+1}]$, alors

$$\int_a^b g(x)\sin nxdx \text{ tend vers } 0, \text{ quand } x \text{ tend vers} +\infty$$

Par suite

$$\int_a^b f(x)\sin nxdx \text{ tend vers } 0, \text{ quand } x \text{ tend vers} +\infty$$

■

Preuve du théorème de Dirichlet

Soit

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx),\ x\in\mathbb{R}$$

La somme partielle de la série de Fourier de la fonction f.

1. Montrons que $S_n(x)$ converge vers $\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$.

On a

$$\begin{aligned}
S_n(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \\
&= \frac{1}{\pi}(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t)}{2} dt + \sum_{k=1}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\ (a_k \cos kt \cos kx + b_k \sin kt \sin kx) dt) \\
&= \frac{1}{\pi}(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k(x-t)) dt) \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin(n+\frac{1}{2})(x-t)}{2\sin(\frac{x-t}{2})} dt.
\end{aligned}$$

Posons $u = x - t$:

$$\begin{aligned}
S(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+u) \frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{\sin(\frac{u}{2})} du \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u) \frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{\sin(\frac{u}{2})} du
\end{aligned}$$

Car les fonctions : $u \mapsto f(x+u)$ et $u \mapsto \frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{\sin(\frac{u}{2})}$ sont $2\pi-$ péroidiques.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u) \frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{\sin(\frac{u}{2})} du = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} (f(x+u) + f(x-u)) \frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{\sin(\frac{u}{2})} du.$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
S_n(x) - \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} &= \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} (f(x+u) + f(x-u)) \frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{\sin(\frac{u}{2})} du + \\
&\quad - \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}.
\end{aligned}$$

En remarquant que

$$\frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{\sin(\frac{u}{2})} du = 1$$

Ceci, nous permettra d'écrire :

$$\begin{aligned}
S_n(x) - \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi (f(x+u)+f(x-u))\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{\sin\frac{u}{2}}du + \\
&\quad -\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi (\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2})\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{\sin\frac{u}{2}}du \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \frac{f(x+u)-f(x^+)}{u}u\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{\sin\frac{u}{2}}du + \\
&\quad +\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \frac{f(x-u)-f(x^-)}{u}u\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{\sin\frac{u}{2}}du.
\end{aligned}$$

Les fonctions

$$u \to \frac{f(x+u)-f(x+0)}{u}\frac{u}{\sin\frac{u}{2}}$$

et

$$u \mapsto \frac{f(x+u)-f(x+0)}{u} \text{ et } u \mapsto \frac{u}{\sin\frac{u}{2}}$$

sont bornées au voisinage de 0.
En appliquant le lemme (1.2.5), on trouve

$$\lim_{u\to\infty} S_n(x) = \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$$

2. Si f est continue, nous avons $\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} = f(x)$.

Conclusion 1.2.6 *D'aprés ce chapitre, on conclure que le formalisme des séries de Fourier est trés importante, car il permet de décomposer toutes les fonctions périodiques en une somme des fonctions harmoniques .*
Cependant, la décomposition en série de Fourier est limitée sauf aux ces fonctions, et ne permet pas d'étudier les autres .
C'est pour cela, qu'on va introduire dans le chapitre suivant l'extention des séries de Fourier aux fonctions non périodiques et on parle alors de transformés de Fourier.

Chapitre 2

Transformées de Fourier

Dans le chapitre précédent, nous avons vu qu'il était possible de décomposer toutes fonctions périodiques sous la forme de séries de Fourier. Dans ce chapitre, nous allons essayer d'étendre cette idée de décomposition en fonctions élémentaires a une gamme de fonctions plus grande que les seules fonctions périodiques. Les résultats du chapitre précédents vont nous guider sur cette voie.
Considérons maintenant une fonction f intégrable et périodique de période T. Alors cette fonction peut être décomposée en séries de Fourier :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(\varpi n t) + b_n \sin(\varpi n t),$$

avec les coefficients :

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{T} \int\limits_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt \\ a_n = \frac{2}{T} \int\limits_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(\varpi n t)dt \\ b_n = \frac{2}{T} \int\limits_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(\varpi n t)dt \end{cases}$$

Une approche intuitive du problème généralisation des séries de Fourier aux fonctions non périodiques consiste à faire tendre la période T à l'infini. ainsi, la fonction obtenue ne contient qu'un seul motif.

2.1 Les intégrales de Fourier

Définition 2.1.1 *On appelle intégrale de Fourier, la réprésentation d'une fonction sous la forme :*

$$f(t) = \int_{0}^{+\infty} A(\varpi)\cos(\varpi t) + B(\varpi)\sin(\varpi t)d\varpi, \tag{2.1}$$

avec :

$$A(\varpi) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(\varpi t)dt \ \ et \ B(\varpi) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(\varpi t)dt \tag{2.2}$$

Existence des intégrales de Fourier

Théorème 2.1.2 *Soit f une fonction intégrable sur l'axe des réels, alors f admet une réprésentation sous forme d'intégrale de Fourier.*

Preuve. Afin d'obtenir une forme plus opérationnelle pour la décomposition des fonctions non périodiques, nous allons manipuler les expressions données dans la définition des intégrales de Fourier.
Tout d'abord injectons les formules (2.2)dans la formule de décomposition (2.1).

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_{0}^{+\infty} (\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos(\varpi u)du\cos(\varpi t) \ + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\sin(\varpi u)du\sin(\varpi t))d\varpi && (2.3) \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)(\cos(\varpi u)\cos(\varpi t) \ + \sin(\varpi u)\sin(\varpi t))dud\varpi && (2.4) \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos(\varpi(t-u))dud\varpi && (2.5) \end{aligned}$$

Remarque que

$$I(\varpi, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos(\varpi(t-u))du,$$

est une fonction paire de la variable ϖ et $I(-\varpi, t) = I(\varpi, t)$.
Par conséquent :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos(\varpi(t-u))dud\varpi \tag{2.6}$$

Remarquons à présent que l'on peut aussi utiliser les arguments de partité et imparrité pour montrer que :

$$\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\sin(\varpi(t-u))du = 0 \tag{2.7}$$

On peut donc inclure cette intégrale dans l'expression de $f(t)$:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\exp(iw(t-u))dudw & (2.8)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\exp(-iwu)du\}\exp(iwu)dw & (2.9)\end{aligned}$$

On fait ainsi apparaître ce qu'on appelle la transformée de Fourier et la transformée de Fourier inverse qui vont nous servir dans la suite de ce chapitre. ■

2.1.1 La Transformée de Fourier

Définition 2.1.3 *On appelle transformée de Fourier de la fonction f, la fonction notée $\hat{f}$*

$$\hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\exp(-iwt)dt \tag{2.10}$$

2.1.2 Transformée de Fourier inverse

Définition 2.1.4 *On appelle transformée de Fourier inverse de la fonction $\hat{f}$, la fonction notée f :*

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(w)\exp(iwt)dt \tag{2.11}$$

Généralement on dénote la transformée de Fourier avec le symbole chapeau $\hat{f}$.
On utilisera par la suite les notations suivantes :

$$\hat{f}(w) = F(f(t)) = TF(f(t)) \tag{2.12}$$

$$f(t) = F^{-1}\hat{f}(w) = TF^{-1}\hat{f}(w) \tag{2.13}$$

L'expression (2.9)montre que la définition transformée de Fourier n'est pas unique.
Nous aurions pu modifier les préfacteurs $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ et faire un autre choix à la condition que le

produit des deux pré-facteurs soit égale à$\frac{1}{2\pi}$.

2.2 Propriétés essentielles de la Transformée de Fourier

Proposition 2.2.1 *(Linéarité) La transformée de Fourier d'une combinaison linéaire des fonctions f et g est la combinaison linéaire des transformées de Fourier des fonctions f et g :*

$$F\{af(t) + bg(t)\} = a\hat{f}(\varpi) + b\hat{g}(\varpi) \tag{2.14}$$

Cette propriété permet de découper les expressions quand on calcule la transformée de Fourier d'une équation.

Preuve.

$$\begin{aligned} F\{af(t) + bg(t)\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (af(t) + bg(t)) \exp(-i\varpi t) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} af(t) \exp(-i\varpi t) dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} bg(t)) \exp(-i\varpi t) dt \\ &= a\hat{f}(\varpi) + b\hat{g}(\varpi) \end{aligned}$$

■

Proposition 2.2.2 *(Dérivation) L'opération de dérivation de la fonction $f(t)$ revient a multiplier la fonction*
$\hat{f}(w)$ par $i\varpi$:

$$F\left\{\frac{df}{dt}\right\} = i\varpi\hat{f}(\varpi) \tag{2.15}$$

Nous utiliserons beaucoup cette propriéte dans la suite, car elle permet de passer d'une expression faisant apparaître des dérivées à une expréssion de type polynôme en ϖ.

Preuve.

$$
\begin{aligned}
F\left\{\frac{df}{dt}\right\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{df}{dt}\exp(-i\varpi t)dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}([f(t)\exp(-i\varpi t)]_{-\infty}^{+\infty} - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)(-i\varpi\exp(-i\varpi t))dt \\
&= \frac{i\varpi}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\exp(-i\varpi t)dt \\
&= i\varpi\hat{f}(\varpi)
\end{aligned}
$$

■

Ce résultat s'étend sans difficulte aux dérivées d'ordre supérieur :

Proposition 2.2.3 *(Dérivée d'ordre supérieur)*

$$F\left\{\frac{d^n f}{dt^n}\right\} = (i\varpi)^n\hat{f}(\varpi) \tag{2.16}$$

Preuve. *Pour démontrer cette propriété, on utilisera le fait que*

$$\frac{d^n f}{dt^n} = \frac{d}{dt}\frac{d^{n-1}f}{dt^{n-1}}$$

■

Proposition 2.2.4 *(Décalage dans le temps) Un décalage d'une quantité t_0 dans l'espace des temps correspond à multiplier la fonction $\hat{f}(\varpi)$ par $\exp(-i\varpi t_0)$ dans l'espace de Fourier :*

$$F\{f(t-t_0)\} = \exp(-i\varpi t_0)\hat{f}(\varpi) \tag{2.17}$$

Preuve.

$$F\{f(t-t_0)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t-t_0)\exp(-i\varpi t)dt \tag{2.18}$$

En effectuant le changement de variables $u = t - t_0$, on obtient :

$$\begin{aligned} F\left\{f(t-t_0)\right\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(u) \exp\left[-i\varpi(u+t_0)\right] du \\ &= \frac{\exp(-i\varpi t_0)}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(u) \exp(-i\varpi u) du \\ &= \exp(-i\varpi t_0) \hat{f}(w) \end{aligned}$$

■

Proposition 2.2.5 *(Transformée de Fourier de produit de convolution) Soient f et g, deux fonctions absolument intégrables sur l'axe des réels, alors la transformée de Fourier du produit de convolution de f par g est le produit simple des transformées de Fourier de f et g multiplié par un facteur $\sqrt{2\pi}$:*

$$F\left\{f * g\right\} = \sqrt{2\pi} \hat{f}(\varpi) \hat{g}(\varpi) \tag{2.19}$$

Preuve. On rapelle que

$$\begin{aligned} F\left\{f * g\right\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) * g(t) \exp[-i\varpi t] dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(u) g(t-u) du \exp[-i\varpi t] dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(u) g(t-u) \exp[-i\varpi t] du dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(u) g(t-u) \exp[-i\varpi t] dt \right] du \end{aligned}$$

On pose $v = t - u$

$$\begin{aligned} F\{f * g\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(u) g(v) \exp[-i\varpi(u+v)] dv \right] du \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(u) \exp(-i\varpi u) du \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(v) \exp(-i\varpi v) dv \\ &= \sqrt{2\pi} \hat{f}(w) \hat{g}(\varpi) \end{aligned}$$

■

Définition 2.2.6 *(La fonction généralisée de Dirac)*
On appelle fonction généralisée de Dirac, la distribution telle que :

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t - t_0) dt = f(t_0) \tag{2.20}$$

Proposition 2.2.7 *La transformée de Fourier de la fonction généralisée de Dirac est :*

$$F\{\delta(t - t_0)\} = \frac{\exp(-i\varpi t_0)}{\sqrt{2\pi}} \tag{2.21}$$

Preuve.

$$\begin{aligned} F\{\delta(t - t_0)\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) \exp(-i\varpi t) dt \\ &= \frac{\exp(-i\varpi t_0)}{\sqrt{2\pi}} \end{aligned}$$

■

Cette propriété existe aussi pour la fonction généralisée de Dirac dans l'espace de Fourier

Proposition 2.2.8

$$F^{-\infty}\{\delta(\varpi - \varpi_0)\} = \frac{\exp(-i\varpi_0 t)}{\sqrt{2\pi}} \tag{2.22}$$

Preuve.

$$\begin{aligned} F^{-\infty}\left\{\delta(\varpi-\varpi_0)\right\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\varpi-\varpi_0)\exp(-i\varpi t)dt \\ &= \frac{\exp(-i\varpi_0 t)}{\sqrt{2\pi}} \end{aligned}$$

■

Proposition 2.2.9 *(Parité)*
1. Si f est réelle et paire, alors $F[f]$ est réelle et paire et

$$F[f](u) = 2\int_{0}^{+\infty}\cos(2\pi ux)f(x)dx$$

2. Si f est réelle et impaire, alors $F[f]$ est imaginaire pure et impaire et

$$F[f](u) = -2i\int_{0}^{+\infty}\sin(2\pi ux)f(x)dx$$

Proposition 2.2.10 *(Conjugaison) On définit la fonction conjuguée de $\overline{f}$ par $\overline{f(x)}$. Alors*

$$F\left[\overline{f}\right](u) = \overline{F[f](-u)}$$

2.3 Qelques exemples sur les transformées de Fourier

2.3.1 TF de la fonction porte

Exemple 2.3.1 *Calculons la transformée de Fourier de la fonction porte définie par :*

$$f(t) = \begin{cases} 1, \ si \ |t| \leq 1, \\ 0, \ ailleurs. \end{cases}$$

D'aprés la définition, on a :

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\varpi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp(-i\varpi t) dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-1}^{+1} \exp(-i\varpi t) dt, \\
&= \frac{1}{-iw\sqrt{2\pi}} [\exp(-i\varpi t)]_{-1}^{+1} \\
&= \sqrt{2\pi}\, \mathrm{sin}_c(\varpi)
\end{aligned}$$

On obtient une fonction continue de la variable ϖ.

2.3.2 Fonction Exponentielle

Exemple 2.3.2 *Soit $a > 0$*

$$f : t \mapsto \exp(-a\,|t|)$$

La fonction f est paire

$$F(f)(s) = 2 \int\limits_{0}^{+\infty} \exp(-at) \cos(2\pi st) dt$$

Une double intégration par parties conduit à :

$$F(f)(s) = \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 s^2}$$

2.3.3 Fonction Réctangle

Exemple 2.3.3 *Rappelons que pour la fonction rectangle de largeur X définie par :*

$$f : x \mapsto \mathrm{rect}_X(x)$$

Avec

$$\mathrm{rect}_X(x) = \begin{cases} 1 \;\; si \; x \in \left[-\frac{X}{2}, +\frac{X}{2}\right] \\ 0 \;\; si \; x \notin \left[-\frac{X}{2}, +\frac{X}{2}\right] \end{cases}$$

$$F\left[\mathrm{rect}_X\right](u) = X \,\mathrm{sinc}(\pi X u)$$

2.3.4 Fonction Triangle

Exemple 2.3.4 *Pour la fonction triangle de largeur* $2X$ *définie par :*

$$\Lambda_X(x) = \begin{cases} 0 \ si \ x < -X \ ou \ x > X \\ x + X \ si \ -X \leq x \leq 0 \\ -x + X \ \ si \ 0 \leq x \leq X \end{cases}$$

$$F\left[\Lambda_X\right](u) = X^2 \operatorname{sinc}^2(\pi X u)$$

2.3.5 Fonction Signe

Exemple 2.3.5 *La fonction signe est définie par :*

$$\operatorname{signe}(x) = \begin{cases} -1 \ si \ x < 0 \\ 0 \ si \ x = 0 \\ 1 \ si \ x > 0 \end{cases}$$

On remarque que :

$$\operatorname{rect}_{X=1}(x) = \frac{1}{2}\left[\operatorname{signe}(x + \frac{1}{2}) - \operatorname{signe}(x - \frac{1}{2})\right]$$

Donc

$$\begin{aligned} F\left[\operatorname{rect}(x)\right](u) &= \frac{1}{2}F[\operatorname{signe}(x + \frac{1}{2})] - \frac{1}{2}F[\operatorname{signe}(x - \frac{1}{2})] \\ &= \frac{1}{2}F[\operatorname{signe}(x)] \exp(i\frac{2\pi}{2}u) - \frac{1}{2}F[\operatorname{signe}(x)] \exp(-i\frac{2\pi}{2}u) \end{aligned}$$

D'où

$$\frac{\sin(\pi u)}{\pi u} = iF[\operatorname{signe}(x)] \sin(\pi u)$$

On en tire

$$F\left[\operatorname{signe}(x)\right](u) = \frac{1}{i\pi u}$$

2.3.6 Le peigne de Dirac

Exemple 2.3.6 *Le peigne (comb en anglais) est la fonction :*

$$\operatorname{comb}(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - n)$$

La représentation de cette fonction justifie son appellation : il s'agit de pic de Dirac régulièrement espacés (le pas est 1*).*
On peut modifier le pas en considérant la fonction $\mathrm{comb}(\frac{x}{a})$ *de pas* a*.*
On montre que la TF *du peigne est encore un peigne :*

$$F\left[\mathrm{comb}(x)\right](u) = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \delta(u-q) = \mathrm{comb}(u)$$

2.3.7 La Gaussienne

Exemple 2.3.7 *La Gaussienne est la fonction*

$$f(x) = \exp(-b^2x^2) \text{ avec } b \text{ réel}$$

Elle décrit notamment le spectre de la lumière émise par une lampe spectrale basse pression.
On peut calculer sa TF en passant par la fonction $\exp(-b^2z^2)$ *de la variable complexe* z*.*
On peut aussi utiliser la méthode suivante mettant en évidence l'utilisation possible de la TF, pour la résolution d'équations différentielles :
Comme

$$f'(x) = -2b^2xf(x)$$

Et que

$$F\left[xf\right] = -\frac{1}{i2\pi}F'(u)$$

Et

$$F\left[f'\right] = 2i\pi F\left[f\right]$$

F *vérifie*

$$2i\pi F = 2b^2\frac{F'}{2i\pi}$$

Soit

$$F' + \frac{2\pi^2}{b^2}uF = 0$$

Donc

$$F(u) = F(0)\exp(-\frac{\pi^2u^2}{b^2})$$

Enfin

$$F(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-b^2x^2)\ dx = \frac{\sqrt{\pi}}{|b|}$$

On obtient :

$$F\left[\exp(-b^2x^2)\right] = \frac{\sqrt{\pi}}{|b|}\exp(-\frac{\pi^2u^2}{b^2})$$

La TF d'une Gaussienne est une Gaussienne.

Bibliographie

[1] A. Kessi, A. Mahmoudi. Les Mathématique à l'université. ISSN : 1112-3427. D 935(2001)

[2] Bougrov, Nikolski, Cours de mathématiques supérieures, Mir-Moscou.

[3] Bougrov, Nikolski, Cours de mathématiques supérieures, Mir-Moscou

[4] J. Dieudonné, Eléments d'analyse, Tome 1, Gauthier-Villars, Paris, 1972.

[5] J. Dixmier, Cours de mathématiques de premier cycle, 2^{eme} année, Dunod, Paris 1977.

[6] E. Fischer. Intermediate real analysis, Springer-Virlag, New-York 1983.

[7] J. Lelong-Ferrand, J.-M. Arnaudiés, Cours de mathématiques-Tome. Bordas, 1976.

[8] N. Piskounov, Calcul différentiel et intégral, Tome 2, 11^{eme} éddition, Mir-Moscou, 1980.

[9] J. Quinet, Cours élémentaires de mathématiques supérieures, 3-Calcul intégral et séries, 6^{eme} édition, Dunod, Paris 1976.

[10] E. Ramis, C. Deschamps, J. Odoux, Cours de mathématiques spéciales, Tome 3, 3^{eme} éddition, Masson, 1991.

[11] R. Marchiano, Transformées de Fourier et de Laplace : Résolution de problèmes classiques en mécanique. Paris Universita

[12] Robert. G. Bartle. The element of real analysis, John Wiley and Sons, USA, 1976