

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

CENTRE UNIVERSITAIRE DE MILA
INSTITUT DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE

Réf.

Mémoire de fin d'étude
Présenté pour l'obtention du diplôme de

Licence Académique

Domaine : **Mathématiques et Informatique**
Filière : **Mathématiques**
Spécialité : **Mathématiques fondamentale**

Thème

**Résolution numérique des équations
non linéaire $f(x)=0$**

Présenté par :

**LAOUAR Meriem
BOULADJIN Besma
BOUNEHAL Imane**

Dirigé par :

LABED Boudjema

Année universitaire : 2012-2013

Remerciements

Al 'occasion de la présentation de notre mémoire de la fin d'étude, nous nous pressentons cette mémoire à nos parents, nos frères, sœurs.

Nous remercions sincèrement toutes les personnes qu'ont portées leurs soutien et aides, et particulier notre encadreur monsieur LABED BOUDJEMA, pour son aide, ses orientations et conseils.

Nous n'oublions jamais de dire merci pour tous les enseignants notre Institut de Mathématique.

Table des matières

0.1	Introduction	2
1	Résolution d'équations non linéaires $f(x) = 0$	3
1.1	Séparation des racines	4
1.1.1	Méthode graphique	4
1.1.2	Méthode de balayage	6
1.2	Approximation des racines	7
1.2.1	Méthode de dichotomie (bissection)	8
1.2.2	Méthode de sécante	10
1.2.3	Méthode de Newton-Raphson	11
1.2.4	Méthode de newton-Raphson et les polynômes	13
1.2.5	Méthode du point fixe	15
2	Système non linéaire	20
2.1	Les méthodes de point fixe	21
2.1.1	Point fixe de contraction	21
2.1.2	Point fixe de monotonie	25
2.2	Méthode de Newton	27
2.2.1	construction et convergence de la méthode	27
2.2.2	Variantes de la méthode de Newton	29
2.3	Méthode de la sécante	29
2.3.1	Méthode de type "Quasi Newton"	30
	Bibliographie	31

0.1 Introduction

Dans la pratique, la plupart des problèmes se ramènent à la résolution d'une équation de la forme : $f(x) = 0$

La résolution de cette équation dépend de la classe à laquelle appartient la fonction f .

Si f est un polynôme de degré n , on sait que l'équation possède n racines complexes.

Si l'équation est transcendante, elle peut avoir un nombre fini, voir nul, ou infini de racine. Le problème est alors de trouver la racine dont on sait l'existence et dont, parfois, on connaît une valeur approchée.

Les méthodes de résolution sont toujours des méthodes itératives ou Newton-Raphson.

Chapitre 1

Résolution d'équations non linéaires

$$f(x) = 0$$

Le numéricien est souvent confronté à la résolution d'équations algébriques de la forme

$$f(x) = 0$$

et ce dans toutes sortes de contextes.

Introduisons des maintenant la terminologie qui nous sera utile pour traiter ce problème.

Définition 1.0.1 : Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont le domaine de définition est une partie

D_f de $\mathbb{R}$. On dit que $\alpha \in D_f$ est une racine de l'équation

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

si

$$f(\alpha) = 0 \tag{2}$$

Résoudre l'équation (1) c'est trouver tous les nombres réels α tels que (2) soit vérifiée.

En d'autres termes, on cherche à déterminer l'ensemble

$$\ker f = \{x \in D_f / f(x) = 0\}$$

appelé noyau de f . $\ker f$ est donc l'ensemble des racines de $f(x) = 0$.

Il n'est pas toujours possible de résoudre complètement ce problème pour toutes formes de fonctions f .

$\ker f$ peut en effet, avoir un grand nombre de structures possibles.

Définition 1.0.2 : *On dit qu'une racine α d'une équation $f(x) = 0$ est séparable si on peut trouver un intervalle $[a, b]$ tel que α soit la seule racine de cette équation dans $[a, b]$; ou encore si*

$$\ker f \cap [a, b] = \{\alpha\}$$

La racine α est alors dite séparée (on dit aussi racine isolée).

1.1 Séparation des racines

Il n'y a pas de méthode générale pour séparer les racines d'une équation

$$f(x) = 0$$

Pratiquement, en dehors de l'étude théorique directe de f si f est donnée analytiquement, on utilise deux types de méthodes: une **méthode graphique** et une **méthode de balayage**.

1.1.1 Méthode graphique

Soit on trace (expérimentalement ou par étude des variations de f) le graphe de la fonction f et on cherche son intersection avec l'axe Ox . Soit on décompose f en deux fonctions f_1 et f_2 simples à étudier, telles que:

$$f = f_1 - f_2$$

et on cherche les points d'intersection des graphes de f_1 et f_2 , dont les abscisses sont exactement les racines de l'équation

$$f(x) = 0$$

Remarque 1.1.1 : On choisit souvent f_1 et f_2 de façon à ce que leur courbes soient des courbes connues.

Exemple:

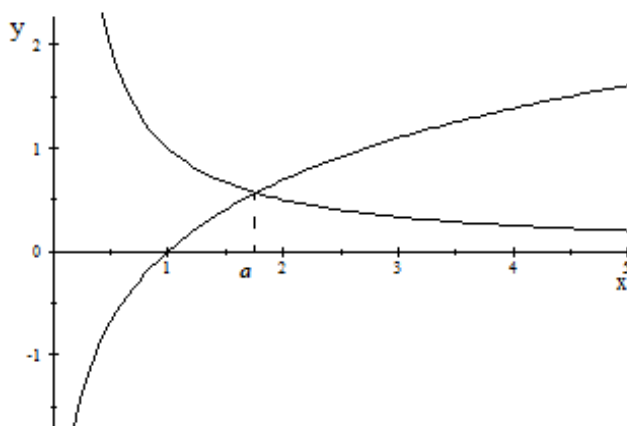
Soit l'équation:

$$x \log x = 1, \quad x > 0 \quad (D = \mathbb{R}_+^*)$$

1^{er} Méthode: Cette équation s'écrit sous la forme:

$$\log x - \frac{1}{x} = 0$$

En posant: $f_1 = \log x$ et $f_2 = \frac{1}{x}$.

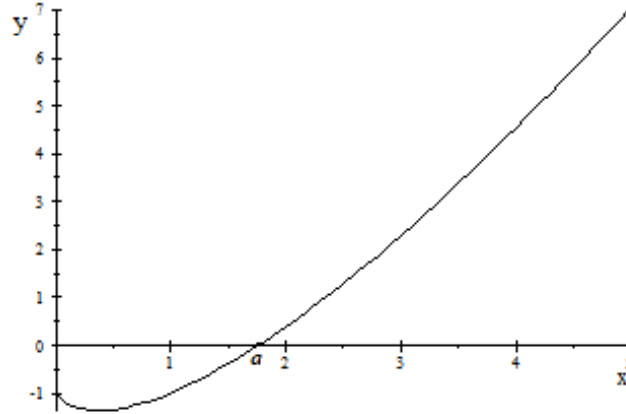


Donc: $f = f_1 - f_2$.

L'abscisse du point d'intersection des deux courbes permet de localiser la solution de $x \log x = 1$.

2^{eme} Méthode: Soit à résoudre graphiquement l'équation: $x \log x - 1 = 0$.

x	0	$\frac{1}{\exp}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$-1 \searrow -1.36 \nearrow +\infty$		



1.1.2 Méthode de balayage

On considère une suite croissante finie $\{x_i\}$; $i = 0, 1, 2, \dots, n$. De valeurs de x réparties sur l'intervalle $[a, b]$ contenu dans le domaine de définition D de f .

Si f est continue et si:

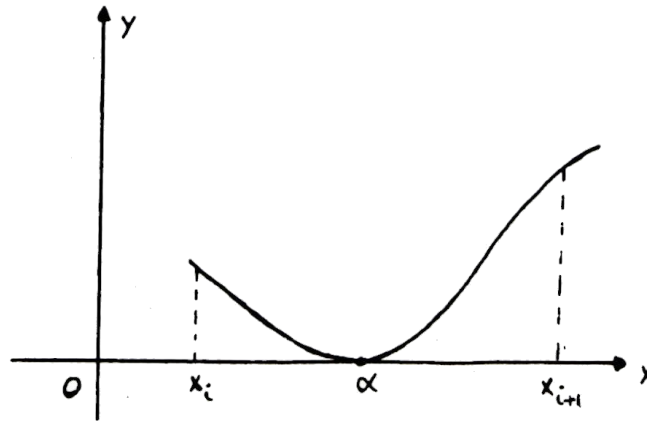
$$f(x_i)f(x_{i+1}) < 0$$

alors il existe entre x_i et x_{i+1} au moins une racine de $f(x) = 0$ (c'est le théorème classique des valeurs intermédiaires).

La méthode consiste donc à déterminer parmi les quantités $f(x_i)f(x_{i+1})$ ($i = 0, 1, \dots, n$) celles qui sont négatives.

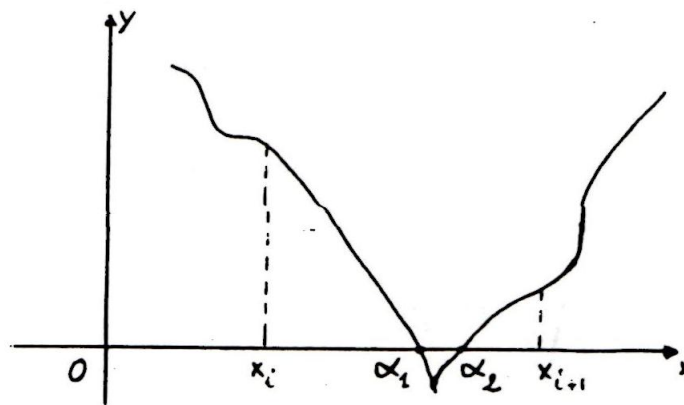
Remarque 1.1.2 : La méthode de balayage ne permet de conclure qu'à l'existence d'au moins une racine dans un intervalle $[x_i, x_{i+1}]$:

- Si une racine α est double ($f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$ et $f''(\alpha) \neq 0$), cette méthode ne permet pas de la séparer.



• De même, si deux racines sont très voisines, on risque de ne pas les séparer dans le processus ci-dessus

comme le montre la figure suivant:



Remarque 1.1.3 : *L'intervalle de départ $[a, b]$ doit être suffisamment grand afin de contenir les racines éventuelles de l'équation:*

$$f(x) = 0$$

mais sauf dans des cas particulier, on ne peut pas estimer correctement sa longueur.

1.2 Approximation des racines

Théorème 1.2.1 (Rolle): *En effet étant donné a et b dans $\mathbb{R}$ on a:*

- Si $f(a)f(b) < 0$ alors: $f(a)$ au moins une racine dans $[a, b]$.
- Si de plus f ne s'annule pas dans $[a, b]$, alors la racine est unique.
- Si $f(a)f(b) > 0$ alors ou bien n'a pas de racine.

Les méthodes numériques en général, les plus puissantes permettant la résolution approchée des équations de

la forme $f(x) = 0$.

1.2.1 Méthode de dichotomie (bissection)

Constriction d'une suite d'intervalles de plus en plus petits contenant une racine isolée de l'équation

$$f(x) = 0$$

Supposons que a et b soient tels que:

$$x^* \in [a, b], \text{ avec } f(a)f(b) < 0.$$

On pose $a = a_0$, $b = b_0$ et $[a, b] = [a_0, b_0] = I_0$.

On divise l'intervalle $I_0 = [a_0, b_0]$ en deux, et on construit l'intervalle

$I_1 = [a_1, b_1]$ comme suit:

Pour $x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$ (milieu du segment $[a_0, b_0]$) on fait le test suivant:

Si

$$f(a_0)f(x_0) < 0$$

alors

$$[a_0, x_0] = [a_1, b_1] = I_1$$

sinon

$$[x_0, b_0] = [a_1, b_1] = I_1$$

Et de là on itère le procédé pour obtenir une suite d'intervalles emboîtés:

$I_k = [a_k, b_k]$, $k = 1, 2, 3, \dots$; comme suit:

On pose:

$$x_k = \frac{a_k + b_k}{2}$$

Si

$$f(a_k)f(x_k) < 0$$

alors

$$[a_k, x_k] = [a_{k+1}, b_{k+1}] = I_{k+1}$$

sinon

$$[x_k, b_k] = [a_{k+1}, b_{k+1}] = I_{k+1}$$

Et on prend comme approximation de x^* la valeur x_k .

Soit $k \in \mathbb{N}$.

Nous avons:

$$b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{b_k - a_k}{2} = \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2^2} = \dots = \frac{b_0 - a_0}{2^{k+1}}$$

et si x^* est la racine de l'équation $f(x) = 0$, nous aurons:

$$|x^* - x_k| \leq b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{b_k - a_k}{2} = \frac{b_0 - a_0}{2^{k+1}}$$

Exemple:

On calcule dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ à 0.1 après par la méthode de Dichotomie la racine d'équation

$$f(x) = \exp(x) \sin(x) - 1$$

Solution:

$$\text{On a: } a_0 = 0, b_0 = \frac{\pi}{2}, x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$f(0) = -1 \text{ et } f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.55 \Rightarrow f(0)f\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0 \text{ alors : } \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$$

$$a_1 = 0, b_1 = \frac{\pi}{4}, x_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} = \frac{\pi}{8}$$

$$f\left(\frac{\pi}{8}\right) = -0.98 \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{8}\right)f\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0 \text{ alors : } \alpha \in \left[\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}\right]$$

$$x_2 = \frac{3\pi}{16}$$

$$f(x_2) = -0.95, f\left(\frac{\pi}{4}\right)f\left(\frac{3\pi}{16}\right) < 0 \text{ alors : } \alpha \in \left[\frac{3\pi}{16}, \frac{\pi}{4}\right]$$

$$x_3 = \frac{7\pi}{32}$$

$$f(x_3) = -0.99, \text{ alors : } \alpha \in \left[\frac{7\pi}{32}, \frac{\pi}{4} \right]$$

donc $\alpha \in [0.68, 0.78]$.

1.2.2 Méthode de sécante

Dans certaines situation, si $f(x)$ est complexe, f' peut être difficile à évaluer (on ne peut pas calculer f'), l'idée est de remplacer f' par l'expression suivante:

$$f'(x_k) = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

sur un petite intervalle on choisi deux point initiale x_0 et x_1 approchée de la racine x^* de l'équation

$$f(x) = 0$$

avec: $x_0 \leq x^* \leq x_1$ telle que:

$$f(x_1) \neq 0 \text{ et } f(x_1)f(x_0) < 0$$

et on trace la droite sécante passant par $(x_0, f(x_0))$ et $(x_1, f(x_1))$.

on obtient une nouvelle approximation x_2 de x^* en calculant l'abscisse du point d'intersection de la sécante avec l'axe O_x .

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f(x_1)f(x_0)}(x_1 - x_0).$$

On obtient ainsi une suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}(x_k - x_{k-1}).$$

$$\begin{cases} x_0, x_1 \text{ donnees} \\ x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}(x_k - x_{k-1}), k \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Critère 1.2.1 D'arrêt: Jusqu'à:

$$f(x_{k+1}) = 0$$

Exemple:

On résoudre l'équation suivant par la méthode de sécant:

$$f(x) = \exp(-x) - x.$$

On choisie deux point initiale $x_0 = 0$ et $x_1 = 1$.

On a:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}(x_k - x_{k-1})$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f(x_1) - f(x_0)}(x_1 - x_0) = 1 - \frac{(\exp(-1) - 1)(1 - 0)}{(\exp(-1) - 1) - (\exp(0) - 0)}$$

$$x_2 = 0.6126998$$

$$x_3 = 0.5638384$$

$$x_4 = 0.5671704$$

$$x_5 = 0.5671433$$

$$x_6 = 0.5671433$$

On a: $f(x_6) \simeq 0$ donc la racine $\alpha = 0.5671433$.

1.2.3 Méthode de Newton-Raphson

Notons par x^* une racine (exacte) recherchée et par x_0 une valeur approchée de x^* .

On suppose que f est de classe C^2 au voisinage de x^* le développement de Taylor d'ordre deux de f nous donne:

$$f(x^*) = f(x_0) + f'(x_0)(x^* - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2}(x^* - x_0)^2 \text{ où } \xi \in [x^*, x_0]$$

et comme $f(x^*) = 0$, en supposant $f'(x_0) \neq 0$, on aura:

$$x^* = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} - \frac{f''(\xi)}{2f'(x_0)}(x^* - x_0)^2 \quad (3)$$

et en négligeant le reste $R_2 = -\frac{f''(\xi)}{2f'(x_0)}(x^* - x_0)^2$, la quantité $x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ dans (3)

qu'on notera x_1 , constitue alors une valeur approchée améliorée de x^* .

En itérant le procédé on trouve la formule de récurrence:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}; \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

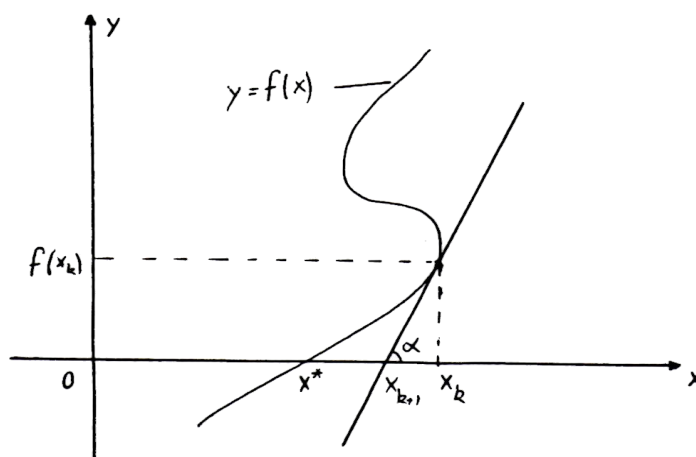
qu'on appelle: **formule de récurrence de Newton-Raphson.**

Géométriquement:

Soit x_0 un point de $[a, b]$, on trace la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point

$M_0 = (x_0, f(x_0))$ elle coupe l'axe de x en un point x_1 on recommence le même opération avec le point $M_1 = (x_1, f(x_1))$ ce procédé définit une suite (x_k) donnée:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$



Exemple:

Soit $a > 0$ donné. On désire calculer son inverse $\frac{1}{a}$.

On peut ramener le problème à la résolution de l'équation

$$f(x) = \frac{1}{x} - a = 0.$$

Selon la formule de Newton-Raphson, nous avons:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = 2x_k - ax_k^2.$$

Remarquons que dans cette formule de récurrence on ne fait pas de division.

pour $a = 7$ et en partant de $x_0 = 0.2$, le calcul donne:

$x_1 = 0.12$; $x_2 = 0.1392$; $x_3 = 0.14276352$; $x_4 = 0.142857081$; ...

et cette suite converge vers $\frac{1}{7} = 0.142857142...$

Critère 1.2.2 d'arrêt dans la méthode de Newton-Raphson:

Soit x^* une racine isolée de l'équation

$$f(x) = 0$$

x_0 une approximation de x^* et (x_k) la suite des approximation obtenue à l'aide de la formule de recurrence de Newton-Raphson. On suppose que f est moins de classe C^∞ au voisinage de x^* .

Le développement de taylor à l'ordre 1 donne, pour $k \in \mathbb{N}$:

$$f(x_k) = f(x^*) + f'(\xi)(x_k - x^*), \quad \xi \in [x_k, x^*]$$

donc

$$x_k - x^* = \frac{f(x_k)}{f'(\xi)}, \text{ où } \xi \in [x_k, x^*]$$

D'autre part:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \implies x_{k+1} - x_k = \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

et on fait l'approximation $f'(\xi) \simeq f'(x_k)$ pour obtenir enfin: $|x_k - x^*| \simeq |x_{k+1} - x_k|$.

Ainsi, si on veut calculer une approximation de x^* avec n décimales exactes, il suffit d'aller dans les itérations jusqu'à ce que k vérifie:

$$|x_{k+1} - x_k| \leq 0.5 \times 10^{-n}.$$

1.2.4 Méthode de newton-Raphson et les polynômes

On suppose que f est un polynôme P_n de degré n à coefficients réels, n'ayant que des racines distinctes:

$$f(x) = P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n, \quad a_0 \neq 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} S_0(x) = P_n(x) \\ S_1(x) = P'_n(x) \\ S_2(x) = -\text{Reste}(S_0(x)/S_1(x)) \\ \vdots \\ S_i(x) = -\text{Reste}(S_{i-2}(x)/S_{i-1}(x)) \\ \vdots \\ S_n(x) = -\text{Reste}(S_{n-2}(x)/S_{n-1}(x)) \end{array} \right.$$

Théorème 1.2.2 : (*Théorème de Sturm: Nombres de racines réelles*)

Le nombre de solutions réelles (qui sont supposées simples) de l'équation

$$P_n(x) = 0$$

et égale à $N(a) - N(b)$, où $N(\xi)$ est le nombre de changement de signe de la suite $\{S_i(\xi)\}$.

Les réels a et b étant les extrémités de l'intervalle contenant les racines.

Théorème 1.2.3 : (*Localisation*)

Les racines réelles de l'équation $P_n(x) = 0$ sont contenues dans l'intervalle $] -T, T[$ avec

$$T = 1 + \frac{1}{|a_0|} [\max |a_i|].$$

propriété: Si la suite S_i est d'ordre p ie: $S_{p+1}(x) = 0$, ($p < n$) alors les racines multiples de $P_n(x)$ sont les racines simples de $S_p(x)$.

Résoudre par la méthode de Newton-Raphson, l'équation:

$$x^3 - 3x^2 + x - 3 = 0.$$

- Localisation des solutions:

$$T = 1 + \frac{1}{|a_0|} [\max |a_i|] = 4.$$

Et donc les solutions de l'équation considérée, si elles existent, se trouvent contenues dans l'intervalle $] -4, 4[$.

- Nombre de racines:

Considérons pour cela la suite de Sturm associée au polynôme:

$$P_3(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} S_0(x) = P_3(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3 \\ S_1(x) = P_3'(x) = 3x^2 + 6x + 1 \\ S_2(x) = -\text{Reste}(S_0(x)/S_1(x)) \\ \quad = -\text{Reste}(x^3 - 3x^2 + x - 3 / 3x^2 + 6x + 1) \\ \quad = x - 2 \\ S_3(x) = -\text{Reste}(S_1(x)/S_2(x)) \\ \quad = -\text{Reste}(3x^2 + 6x + 1 / x + 2) = -25 \end{array} \right.$$

Nous avons alors:

$S_0(x)$	$S_1(x)$	$S_2(x)$	$S_3(x)$	$N(-)$
-	+	-	-	2
+	+	+	-	1

Le nombre de racines réelles de l'équation considérée est donc $2 - 1 = 1$.

- Résolution par la méthode de Newton-Raphson:

Pour cela précisons encore plus l'intervalle contenant la racine cherchée x^* .

avons $P_3(0) = -3$ et $P_3(4) > 0$, alors $x^* \in [0, 4]$. Prêtons par exemple $x_0 = 0$.

avons alors:

$$x_1 = x_0 - \frac{P_3(x_0)}{P_3'(x_0)} = 3, \text{ et } x_2 = x_1 - \frac{P_3(x_1)}{P_3'(x_1)} = 3 = x_1 \text{ De même } x_k = 3 = x_1.$$

Ainsi, nous obtenons une suite stationnaire qui donné dans ce cas, non pas racine approchée mais carrément la racine exacte égale à 3.

1.2.5 Méthode du point fixe

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue. On dit que $x^* \in \mathbb{R}$ est un point fixe de f si

$$f(x^*) = x^*.$$

Commentaire1:

La résolution d'un problème à l'aide d'une formule de récurrence

$$x_{k+1} = f(x_k); \quad k \in \mathbb{N}$$

peut être considérée comme détermination d'un point fixe de la fonction f .

En effet: Soit (x_k) la suite définie par $x_{k+1} = f(x_k)$.

On suppose qu'elle converge vers une valeur qu'on notera x^* .

Par passage à la limite dans l'expression

$$x_{k+1} = f(x_k)$$

on obtient:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} x_{k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) &\iff \lim_{k \rightarrow \infty} x_{k+1} = f(\lim_{k \rightarrow \infty} x_k) \text{ (par continuité de } f) \\ &\iff x^* = f(x^*) \text{ (car } \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*) \end{aligned}$$

et donc x^* est un point fixe de f .

Théorème 1.2.4 : (théorème du point fixe)

Supposons que f est définie sur l'intervalle $[a, b]$ et satisfait aux conditions suivantes:

i) $f([a, b]) \subset [a, b]$

ie: $\forall x \in [a, b], a \leq f(x) \leq b$.

ii) f est contractante

ie: $\exists L \in \mathbb{R}, 0 \leq L \leq 1$ tel que

$$\forall x, y \in [a, b] : |f(x) - f(y)| \leq L |x - y|.$$

Alors f admet un point fixe unique $x^* \in [a, b]$.

De plus, pour tout point $x_0 \in [a, b]$, la suite (x_k) définie par $x_{k+1} = f(x_k)$ converge vers x^* .

Commentaire2: La condition (ii) entraîne:

1. La continuité de f dans $[a, b]$.
2. En divisant l'ingalité par $|x - y|$ et en passant à la limite quand y tend vers x

on obtient $|f'(x)| \leq L < 1$, et ceci en supposant que f est dérivable au point x .

Critère 1.2.3 d'arrête

Soit $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
 |x_{k+1} - x^*| &= |f(x_k) - f(x^*)| \leq L |x_k - x_{k+1} + x_{k+1} - x^*| \\
 &\leq L |x_k - x_{k+1}| + L |x_{k+1} - x^*| \\
 \implies |x_{k+1} - x^*| (1 - L) &\leq L |x_k - x_{k+1}| \\
 \implies |x_{k+1} - x^*| &\leq \frac{L}{1 - L} |x_k - x_{k+1}|
 \end{aligned}$$

et donc pour avoir n décimales exactes, on arrête les itérations lorsque:

$$|x_k - x_{k+1}| \leq \frac{1 - L}{L} 0.5 \cdot 10^{-n}.$$

Généralement L est assez petit pour que $2L < 1$, et delà $L < 1 - L$, et donc

$$1 < \frac{(1 - L)}{L}.$$

Conséquence: au lieu du critère d'arrêt ci-dessus on impose la condition

$$|x_k - x_{k+1}| \leq 0.5 \cdot 10^{-n}.$$

Exemple:

Soit à résoudre, à l'aide de la méthode du point fixe, l'équation

$$\varphi(x) = x^2 - 100x + 1 = 0. \quad (\text{E})$$

On remarquera que (E) admet deux racines réelles x_1^* et x_2^* . Une au voisinage de 10^{-2} et l'autre au voisinage de 10^2 .

• Pour x_1^* : En tenant compte du fait que $x_1^* \simeq 10^{-2}$, l'équation (E) peut se mettre sous la forme:

$$x = f(x) = \frac{1}{100}(x^2 + 1)$$

et la formule de récurrence est donnée par:

$$x_{k+1} = f(x_k) = \frac{1}{100}(x_k^2 + 1).$$

comme $f'(x) = \frac{2}{100}x = 0.02x$ est petit, prenons l'intervalle $[10^{-2}, 1]$ comme voisinage de x_1^* .

Nous avons, en effet:

$$\left. \begin{array}{l} \varphi(10^{-2}) = 10^{-4} > 0 \\ \varphi(1) = -98 < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x_1^* \in [10^{-2}, 1]$$

et on vérifie aisément que:

i) $f([10^{-2}, 1]) = [f(10^{-2}), f(1)] \subset [10^{-2}, 1]$.

ii) pour $L = 0.02$, f est contractante.

Ainsi: $\forall x_0 \in [10^{-2}, 1]$, la suite (x_k) converge vers $x_1^* \in [10^{-2}, 1]$. Prenons par exemple, $x_0 = 1$.

On calcule: (avec 11 décimales exactes).

$$x_1 = 0.02$$

$$x_2 = 0.010004$$

$$x_3 = 0.0100010008$$

$$x_4 = 0.0100010020017 \text{ donc: } x_1^* \simeq 0.010001002002.$$

• Pour x_2^* : en tenant compte du fait que $x_2^* \simeq 10^2$, l'équation (E) peut se mettre sous la forme $x^2 = 100x - 1$, puis en divisant par x on trouve la formule de récurrence:

$$x_{k+1} = 100 - \frac{1}{x_k} = f(x_k)$$

où

$$f(x) = 100 - \frac{1}{x}.$$

Comme $f'(x) = \frac{1}{x^2}$ est petit pour x assez grand, prenons l'intervalle $[10, 10^2]$ comme voisinage de x_2^* .

Nous avons, en effet:

$$\left. \begin{array}{l} \varphi(10) = -990 < 0 \\ \varphi(10^2) = 1 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x_2^* \in [10, 10^2]$$

et on vérifie que:

i) $f([10, 10^2]) = [f(10), f(10^2)] \subset [10, 10^2]$

ii) pour $L = 0.01$, f est contractante

Ainsi: $\forall x_0 \in [10, 10^2]$, la suite (x_k) converge vers $x_2^* \in [10, 10^2]$.

Prenons par exemple, $x_0 = 10$. On calcule avec 5 décimales exactes.

$$x_1 = 99.9$$

$$x_2 = 99.989990$$

$$x_3 = 99.989999$$

$$x_4 = 99.989999 \text{ donc } x_2^* = 99.99000 \pm 10^{-5}.$$

Chapitre 2

Système non linéaire

Soit une application $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ (N entier positif) dont on cherche un ou des zéros x^*

$$i.e : f(x^*) = 0.$$

En fait, si $x \in \mathbb{R}^N$ alors x a N composantes $x_1, x_2, \dots, x_N$ et x peut être vu comme un vecteur, c'est-à-dire:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}$$

si $x \in \mathbb{R}^N$, alors $f(x) \in \mathbb{R}^N$ et $f(x)$ est un N vecteur. Chaque composante $f_j, 1 \leq j \leq N$ de f est une fonction définie sur $\mathbb{R}^N$ est à valeur dans $\mathbb{R}$.

Nous noterons ainsi:

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_N(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_N) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_N) \\ \vdots \\ f_N(x_1, x_2, \dots, x_N) \end{bmatrix}$$

L'équation est un système de N équation (non linéaire en principe) à N inconnues $x_1, x_2, \dots, x_N$ et peut s'écrire:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_N) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_N) = 0, \\ \vdots \\ f_N(x_1, x_2, \dots, x_N) = 0, \end{cases}$$

si $f_1, f_2, \dots, f_N$ sont continument dérivables alors on définit la matrice $N \times N$ jacobienne

$Df(x)$ de f au point $x \in \mathbb{R}^N$ de la façon suivante:

$$Df(x) = \begin{pmatrix} \frac{df_1}{dx_1}(x) & \frac{df_1}{dx_2}(x) & \cdots & \frac{df_1}{dx_N}(x) \\ \frac{df_2}{dx_1}(x) & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{df_N}{dx_1}(x) & \frac{df_N}{dx_2}(x) & \cdots & \frac{df_N}{dx_N}(x) \end{pmatrix}$$

Les coefficients de la matrice $Df(x)$ sont donc: $Df(x)_{ij} = \frac{df_i}{dx_j}(x), 1 < i, j < N$.

2.1 Les méthodes de point fixe

2.1.1 Point fixe de contraction

Soit $g \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ on définit la fonction $f \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ par

$$f(x) = x + g(x).$$

On peut alors remarquer que $g(x) = 0$ si et seulement si $f(x) = x$.

Résoudre les systèmes non linéaire

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R}^N \\ g(x) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

revient donc à trouver un point fixe de f . Encore faut-il qu'un tel point fixe existe.

Théorème 2.1.1 (*point fixe*): Soit E un espace métrique complet, d la distance sur E , et $f : E \rightarrow E$ une fonction strictement contractante, c'est-à-dire telle qu'il existe $k \in]0, 1[$

tel que

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y) \text{ pour tout } x, y \in E.$$

Alors il existe un unique point fixe $x^* \in E$ qui vérifie $f(x^*) = x^*$.

De plus si

$$x^{(0)} \in E, \text{ et } x^{(n+1)} = f(x^{(n)}); \forall n \geq 0$$

alors $x^{(n)} \rightarrow x^*$ quand $n \rightarrow +\infty$.

1) Sous les hypothèses du théorème (2.1.1)

$$d(x^{(n+1)}, x^*) = d(f(x^{(n)}), f(x^*)) \leq kd(x^{(n)}, x^*)$$

si

$$x^{(n)} \neq x^*$$

alors:

$$\frac{d(x^{(n+1)}, x^*)}{d(x^{(n)}, x^*)} \leq k < 1$$

La convergence est donc au moins linéaire (même si de fait, cette méthode converge en général assez lentement).

2) On peut généraliser le méthode du point fixe en remplaçant l'hypothèse " f strictement contractante" par "il existe $n > 0$ tel que $f^{(n)} = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}}$ est strictement contractante"

• La question qui vient alors naturellement est: que faire si f n'est pas strictement contractante?

Soit $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ telle que

$$f(x) = x + g(x).$$

On aimerait déterminer les conditions sur g pour que f soit strictement contractante. plus généralement si $w \neq 0$, on définit

$$f_w(x) = x + wg(x)$$

et remarque que x est solution du système (1) si et seulement si x est point fixe de $f_w(x)$.

Théorème 2.1.2 (*point fixe de contraction avec relaxation*):

On désigne par $|\cdot|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^N$. Soit $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ tel que $\exists \alpha > 0$ tel que

$$(g(x) - g(y)) \cdot (x - y) \leq -\alpha |x - y|^2, \forall x, y \in \mathbb{R}^N \quad (2)$$

$\exists M > 0$ tel que

$$|g(x) - g(y)| \leq M |x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}^N \quad (3)$$

Alors la fonction f_w est strictement contractante si

$$0 < w < \frac{2\alpha}{M^2}$$

Il existe donc un et un seul $x^* \in \mathbb{R}^N$ tel que

$$g(x^*) = 0$$

et $x^{(n)} \rightarrow x^*$ quand $n \rightarrow +\infty$ avec

$$x^{(n+1)} = f_w(x^{(n)}) = x^{(n)} + wg(x^{(n+1)}).$$

Remarque 2.1.1 *Le théorème (2.1.2) permet de montrer que sous les hypothèses (2) et (3) et pour $w \in \left]0, \frac{2\alpha}{M^2}\right[$ on peut obtenir la solution (1) en construisant la suite:*

$$\begin{cases} x^{(n+1)} = x^{(n)} + wg(x^{(n)}) & n \geq 0 \\ x^{(0)} \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

or on peut aussi écrire cette suite de la manière suivant:

$$\begin{cases} \tilde{x}^{(n+1)} = f(x^{(n)}), \forall n \geq 0 \\ x^{(n+1)} = w\tilde{x}^{(n+1)} + (1-w)x^{(n)}, x^{(0)} \in \mathbb{R}^N \end{cases} \quad (4)$$

En effet si $x^{(n+1)}$ est donné par la suite (4), alors

$$x^{(n+1)} = w\tilde{x}^{(n+1)} + (1-w)x^{(n)} = wf(x^{(n)}) + (1-w)x^{(n)} = wg(x^{(n)}) + x^{(n)}$$

Le procédé construction de la suite (4) est l'algorithme de relaxation sur f .

Démonstration:

Soit $0 < w < \frac{2\alpha}{M^2}$. on veut montrer que f est strictement contractante, c.à.d. qu'il existe $K < 1$ tel que

$$|f_w(x) - f_w(y)| \leq k |x - y|; \forall (x, y) \in (\mathbb{R}^N)^2$$

Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}^N)^2$, alors par la définition de la norme euclidienne

$$\begin{aligned} |f_w(x) - f_w(y)|^2 &= (x - y + w(g(x) - g(y)))(x - y + w(g(x) - g(y))) \\ &= |x - y|^2 + 2(x - y)(w(g(x) - g(y))) + w^2 |g(x) - g(y)|^2 \end{aligned}$$

Donc grâce aux hypothèses (2) et (3) on a:

$$|f_w(x) - f_w(y)|^2 \leq (1 - 2w\alpha + w^2 M^2) |x - y|^2$$

et donc la fonction f_w est strictement contractante si

$$1 - 2w\alpha + w^2 M^2 < 1$$

ce qui vérifié si

$$0 < w < \frac{2\alpha}{M^2}$$

- La proposition suivant dans une condition suffisante pour qu'une fonction vérifie les hypothèses (2) et (3).

Soit $h \in \mathbb{C}^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, et $(\lambda_i)_{i=1,N}$ les valeurs propres de la matrice Hessienne de h .

On suppose qu'il existe des réels strictement positive β et γ tels que

$$-\beta \leq \lambda_i(x) \leq -\gamma, \forall i \in \{1, \dots, N\} \forall x \in \mathbb{R}^N$$

(Notons que cette hypothèse est plausible puisque les valeurs propres de la matrice hessienne sont réelles).

Alors la fonction $g = \nabla h$ (gradient de h) vérifie les hypothèses (2) et (3) du théorème (2.1.2) avec $\alpha = \gamma$ et $M = \beta$.

Dans de nombreux cas, le problème de résolution d'un problème non linéaire apparaît sous la forme

$$Ax = R(x)$$

où A est une matrice carée d'ordre N inversible, et $R \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, on peut récrire sous la forme

$$x = A^{-1}R(x).$$

On peut donc appliquer l'algorithme de point fixe sur la fonction

$$f = A^{-1}R$$

ce qui donne comme itération:

$$x^{(n+1)} = A^{-1}R(x^{(n)})$$

Si on pratique un point fixe avec relaxation, avec paramètre de relaxation $w > 0$ alors l'itération s'écrit:

$$\tilde{x}^{(n+1)} = A^{-1}R(x^{(n)}); x^{(n+1)} = w\tilde{x}^{(n+1)} + (1-w)x^{(n)}.$$

2.1.2 Point fixe de monotonie

Théorème 2.1.3 (*Point fixe de monotonie*)

Soit $A \in M_N(\mathbb{R})$ et $R \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, On suppose que:

1) $\forall x \in \mathbb{R}^N, Ax \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$; c'est-à-dire

$$((Ax)_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, N) \Rightarrow (x_i \geq 0; \forall i = 1, \dots, N).$$

2) R est monotone, c'est-à-dire que si $x \geq y$ (composante par composante)

alors $R(x) \geq R(y)$ (composante par composante).

3) 0 est une sous solution du problème, c'est-à-dire que $R(0) \geq 0$

et il existe $\tilde{x} \in \mathbb{R}^N$; $\tilde{x} \geq 0$ tel que $\tilde{x}$ est une sur solution du problème, c'est-à-dire que $A\tilde{x} \geq R(\tilde{x})$.

On pose $x^{(0)} = 0$ et $Ax^{(n+1)} = R(x^{(n)})$. On a alors:

- a) $0 \leq x^{(n)} \leq \tilde{x} \forall n \in N$.
- b) $x^{(n+1)} \geq x^{(n)} \forall n \in N$.
- c) $x^{(n)} \rightarrow x^*$ quand $n \rightarrow +\infty$ et $Ax^* = R(x^*)$.

Proposition 2.1.1 (*Condition nécessaire suffisant de monotonie*)

L'hypothèse (1) du théorème (2.1.3) est vérifiée si et seulement si A inversible et A^{-1} a des coefficients ≥ 0 .

Démonstration:

Supposons d'abord que l'hypothèse 1 du théorème (2.1.3) est vérifiée et montrons que A inversible et que A^{-1} a des coefficients ≥ 0 .

Si x est tel que

$$Ax = 0$$

alors $Ax \geq 0$ et donc, par hypothèse, $x \geq 0$.

Mais on a aussi $Ax \leq 0$, soit $A(-x) \geq 0$ et donc par hypothèse, $x \leq 0$.

On en déduit $x = 0$, ce qui prouve que A est inversible hypothèse (1) donne alors que

$$y \geq 0 \Rightarrow A^{-1}y \geq 0.$$

En prenant $y = e_1$, on obtient que la première colonne de A^{-1} est positive, puis en prenant $y = e_i$ on obtient que la i -ème colonne de A^{-1} est positive, pour $i = 2, \dots, N$. Donc A^{-1} a tous ses coefficients positive.

Supposons maintenant que A est inversible et que A^{-1} a des coefficients positifs.

Soit $x \in \mathbb{R}^N$ tel que

$$Ax = y \geq 0$$

alors

$$x = A^{-1}y \geq 0.$$

Donc A vérifie l'hypothèse (1).

2.2 Méthode de Newton

2.2.1 construction et convergence de la méthode

On vu ci-dessus comment se construit la méthode de Newton à partir du point fixe de monotonie en dimension $N = 1$.

On va maintenant étudier cette méthode dans le cas N quelconque.

Soient $g \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ et $x^* \in \mathbb{R}^N$ tel que

$$g(x^*) = 0.$$

On cherche une méthode de construction d'une suite $(x^{(n)})_n \in \mathbb{R}^N$ qui converge vers x^* de manière quadratique.

L'algorithme de Newton de construction d'une telle suite s'écrit:

$$\begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{R}^N \\ Dg(x^{(n)})(x^{(n+1)} - x^{(n)}) = -g(x^{(n)}); \forall n \geq 0. \end{cases} \quad (*)$$

(On rappelle que $Dg(x^{(n)}) \in M_N(\mathbb{R})$ est la matrice représentant la différentielle de g en $x^{(n)}$).

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, il faut donc effectuer les opérations suivantes:

- 1) Calcul de $Dg(x^{(n)})$.
- 2) Résolution du système linéaire $Dg(x^{(n)})(x^{(n+1)} - x^{(n)}) = -g(x^{(n)})$.

Remarque:

Si la fonction g dont on cherche un zéro est linéaire, i.e. si g est définie par

$$g(x) = Ax - b$$

avec $A \in M_N(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^N$, alors la méthode de Newton revient à résoudre le système linéaire $Ax = b$.

En effet $Dg(x^{(n)}) = A$ et donc $(*)$ s'écrit

$$Ax^{(n+1)} = b.$$

Pour assurer la convergence et la qualité de la méthode, on va chercher maintenant à répondre aux questions suivantes:

1. La suite $(x^{(n)})_n$ est-elle bien définie? A-t-on $Dg(x^{(n)})$ inversible?
2. A-t-on convergence est-elle au moins quadratique?

Théorème 2.2.1 (*Convergence de la méthode de Newton, (I)*)

Soient $g \in C^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ et $x^* \in \mathbb{R}^N$ tels que

$$g(x^*) = 0.$$

On munit $\mathbb{R}^N$ d'une norme $\|\cdot\|$. On suppose que $Dg(x^*)$ est inversible.

Alors il existe $b > 0$, et $\beta > 0$ tels que:

1. Si $x^{(0)} \in B(x^*, b) = \{x \in \mathbb{R}^N, \|x - x^*\| < b\}$ alors la suite $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie par (*) et $x^{(n)} \in B(x^*, b)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Si $x^{(0)} \in B(x^*, b)$ et si la suite $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par (*) alors $x^{(n)} \rightarrow x^*$ quand $n \rightarrow +\infty$.
3. Si $x^{(0)} \in B(x^*, b)$ et si la suite $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par (*).

$$\text{alors } \|x^{(n+1)} - x^*\| \leq \beta \|x^{(n)} - x^*\|^2 \forall n \in \mathbb{N}.$$

Théorème 2.2.2 (*Convergence de la méthode de Newton, (II)*)

Soient $g \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ et $x^* \in \mathbb{R}^N$ tels que $g(x^*) = 0$.

On munit $\mathbb{R}^N$ d'une norme $\|\cdot\|$ et $M_N(\mathbb{R})$ de la norme induite. On suppose que $Dg(x^{(n)})$ est inversible.

On suppose de plus qu'il existe $a, a_1, a_2 \in \mathbb{R}_+^*$ tels que:

1. Si $x \in B(x^*, a)$ alors $Dg(x)$ est inversible et $\|(Dg(x))^{-1}\| \leq a_1$.
2. Si $x, y \in B(x^*, a)$ alors $\|g(y) - g(x) - Dg(x)(y - x)\| \leq a_2 \|y - x\|^2$.

alors, si on pose: $b = \min(a, \frac{1}{a_1 a_2}) > 0$, $\beta = a_1 a_2$ et si $x^{(0)} \in B(x^*, b)$, on a:

- (1) $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie par $(*)$.
- (2) $x^{(n)} \rightarrow x^*$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.
- (3) $\|x^{(n+1)} - x^*\| \leq \beta \|x^{(n)} - x^*\|^2 \forall n \in \mathbb{N}$.

2.2.2 Variantes de la méthode de Newton

L'avantage majeur de la méthode de Newton par rapport à une méthode de point fixe par exemple est sa vitesse de convergence d'ordre 2. On peut d'ailleurs remarquer que lorsque la méthode ne converge pas. Par exemple si l'itéré initial $x^{(0)}$ n'a pas été choisi "suffisamment proche" de x^* , alors la méthode diverge très vîtes.

L'inconvénient majeur de la méthode de Newton est son coût: on doit d'une part calculer la matrice Jacobienne $Dg(x^{(n)})$ à chaque itération, et d'autre part la factoriser pour résoudre le système linéaire

$$Dg(x^{(n)})(x^{(n+1)} - x^{(n)}) = -g(x^{(n)}).$$

2.3 Méthode de la sécante

La méthode de la sécante est une variante de dans le cas de la dimension 1 d'espace.

On suppose ici $N = 1$ et $g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. La méthode de Newton pour calculer $x^* \in \mathbb{R}$ tel que

$$g(x^*) = 0$$

s'écrit:

$$\begin{cases} x^0 \in \mathbb{R} \\ g'(x^{(n)})(x^{(n+1)} - x^{(n)}) = -g(x^{(n)}), \forall n \geq 0. \end{cases}$$

On aimerait simplifier le calcul de $g'(x^{(n)})$, c'est-à-dire remplacer $g'(x^{(n)})$ par une quantité "proche"

sans calculer g' . pour cela, on remplace la dérivée par un quotient différentiel.

On obtient la méthode de la sécante:

$$\begin{cases} x^0, x^1 \in \mathbb{R} \\ \frac{g(x^{(n)}) - g(x^{(n-1)})}{x^{(n)} - x^{(n-1)}}(x^{(n+1)} - x^{(n)}) = -g(x^{(n)}), n \geq 1. \end{cases} \quad (\text{a})$$

Remarquons que dans la méthode de la sécante, $x^{(n+1)}$ dépend de $x^{(n)}$ et de $x^{(n-1)}$: on a une méthode à deux pas; on a d'ailleurs besoin de deux itérés initiaux x^0 et x^1 . L'avantage de cette méthode est qu'elle ne nécessite pas le calcul de g' .

L'inconvénient est qu'on perd la convergence quadratique. On peut toutefois montrer que si $g(x^*) = 0$ et $g'(x^*) \neq 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que

si $x^0, x^1 \in [x^* - \alpha, x^* + \alpha] = I_\alpha$, et la suite $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ construite par la méthode de la sécante (a) est bien définie que $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}} \subset I_\alpha$ et que $x^{(n)} \rightarrow x^*$ quand $n \rightarrow +\infty$.

De plus, la convergence est super linéaire, *i.e* si: $x^{(n)} \neq x^*$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\frac{x^{(n+1)} - x^*}{x^{(n)} - x^*} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$. On peut même montrer que la méthode de la sécante est convergente d'ordre d , où d est le nombre d'or.

2.3.1 Méthode de type "Quasi Newton"

On veut généraliser la méthode de la sécante au cas $N > 1$. Soit donc

$g \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$. Pour éviter de calculer $Dg(x^{(n)})$ dans la méthode de Newton

$$\begin{cases} x^0 \in \mathbb{R}^N \\ Dg(x^{(n)})(x^{(n+1)} - x^{(n)}) = -g(x^{(n)}), \forall n \geq 0. \end{cases}$$

On va remplacer $Dg(x^{(n)})$ par $B^{(n)} \in M_N(\mathbb{R})$ "proche de $Dg(x^{(n)})$ ".

En s'inspirant de la méthode de la sécante en dimension 1, on cherche une matrice $B^{(n)}$ qui $x^{(n)}$ et $x^{(n-1)}$ étant connus, vérifie la condition:

$$B^{(n)}(x^{(n)} - x^{(n-1)}) = g(x^{(n)}) - g(x^{(n-1)}) \quad (\text{b})$$

Dans le cas où $N = 1$, cette condition détermine entièrement $B^{(n)}$:

$$B^{(n)} = \frac{g(x^{(n)}) - g(x^{(n-1)})}{x^{(n)} - x^{(n-1)}}$$

Si $N > 1$, ceci ne permet pas de déterminer complètement $B^{(n)}$.

Il y a plusieurs façons possibles de choisir $B^{(n)}$, nous en verrons en particulier dans le cadre des méthodes d'optimisation, nous donnons ici la méthode de Broyden.

Celle-ci consiste à choisir $B^{(n)}$ de la manière suivante:

à $x^{(n)}$ et $x^{(n-1)}$ connue, on pose

$$\delta^{(n)} = x^{(n)} - x^{(n-1)}$$

et

$$y^{(n)} = g(x^{(n)}) - g(x^{(n-1)})$$

on suppose $B^{(n-1)} \in M_N(\mathbb{R})$ connue, et on cherche $B^{(n)} \in M_N(\mathbb{R})$ telle que

$$B^{(n)}\delta^{(n-1)} = y^{(n-1)} \quad (c)$$

(c'est la condition (b), qui ne suffit pas à déterminer $B^{(n)}$ de manière unique) et qui vérifie également:

$$B^{(n)}\xi = B^{(n-1)}\xi, \forall \xi \in \mathbb{R}^N \text{ telque } \xi \perp \delta^{(n)}. \quad (d)$$

Proposition 2.3.1 (*Existence et unicité de la matrice de Broyden*)

Soient $y^{(n)} \in \mathbb{R}^N, \delta^{(n)} \in \mathbb{R}^N$ et $B^{(n-1)} \in M_N(\mathbb{R})$. Il existe une unique matrice $B^{(n)} \in M_N(\mathbb{R})$ vérifiant (c) et (d); la matrice $B^{(n)}$ s'exprime en fonction de $y^{(n)}, \delta^{(n)}$ et $B^{(n-1)}$ de la manière suivante:

$$B^{(n)} = B^{(n-1)} + \frac{y^{(n)} - B^{(n-1)}\delta^{(n)}}{\delta^{(n)} \cdot \delta^{(n)}} (\delta^{(n)})^t.$$

Bibliographie

- [1] D. Pennequin; *Méthodes numériques*; université paris 1; 2007-2008.
- [2] J. Rappaz, M. Picasso; *Introduction à l'analyse numérique*; presses polytechniques et universitaires romandes; 1998.
- [3] M. Lakrib; *Cours d'analyse numérique*; université Djillali Liabes Sidi Bel Abbés; 2009.
- [4] R. Herbin; *Cours d'analyse numérique*; université Aix Marseille1; 2010.