الجمهوريـــة الجزائـــريـــة الديمقراطيـــة الشعبيـــة
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليـــــم العالـــي والبحـــث العلمـــي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

N° Ref :……………

Centre Universitaire de Mila

Institut des sciences et de la technologie

Département de Mathématiques et Informatique

Équations aux différences linéaires

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de Licence en Mathématiques

Préparé par : Metlas el khamsa
Semaha messaouda
Zaoui wissem

Encadré par : Halim Yacine

Filière : *Mathématiques*

Spécialité : *Mathématiques Fondamentales*

Année universitaire :2012/2013

شكر و تقدير

يسرنا نحن ... من خلال هذه الكلمات أن نتوجه بخالص الشكر و وافر الامتنان إلى كل أساتذة معهد العلوم و التكنولوجيا العاملين فيها خاصة أستاذنا المحترم "حليم ياسين" لإشرافه على مذكرتنا و على ما بذله من جهد و تحمله من مشقة، جعلنا الله في موازين حسناتك نحن العارفات بفضلك العاجزات عن شكرك على مجهوداتك التي بذلتها و على نصائحك و إرشاداتك و توجيهاتك التي قدمتها لنا، شكرا لك أستاذنا.

س.مسعودة م.الخامسة ز.وسام

إهداء

الهي لا يطيب الليل إلا بشكرك و لا يطيب النهار إلا بطاعتك و لا تطيب اللحظات إلا بذكرك ولا تطيب الآخرة إلا بعفوك ولا تطيب الجنة إلا برؤيتك الله جلا جلاله إلى من بلغ الرسالة و أدى الأمانة و نصح الأمة...إلى نبي الرحمة و نور العالمين...سيدنا محمد صلى الله عليه و سلم.

إلى من كلله الله بالهيبة و الوقار...إلى من علمني العطاء بدون انتظار... إلى من احمل اسمه بكل افتخار... إلى من تجرع الكأس فارغا ليسقيني قطرة الحب... إلى من حصد الأشواك عن دربي ليمهد لي طريق العلم...أرجو من الله أن يمد في عمرك لترى ثمارا قد حان قطافها بعد طول انتظار و ستبقى كلماتك نجوم اهتدي بها اليوم و في الغد و إلى الأبد... إلى القلب الكبير والدي العزيز.

إلى ملاكي في الحياة... إلى معنى الحب و إلى معنى الحنان و التفاني... إلى بسمة الحياة وسر الوجود إلى من كان دعائها سر نجاحي و حنانها بلسم جراحي إلى أغلى الحبايب أمي الحبيبة.

إلى الشمس التي أنارت دربي و ضحت بالكثير من اجلي... إلى أغلى و اعز مخلوق عندي... إلى الذكرى الحية في قلبي... إلى أمي الثانية جدتي رحمها الله.

إلى من علمني كيف أغمس القلم في الحبر لأرسم به السبيل في دجى الحياة...إليك تحية إجلال و احترام ... إلى معلمي في الطور الابتدائي" بوخش لخضر".

إلى من بها اكبر و عليها اعتمد... إلى شمعة متقدة تنير ظلمة حياتي... إلى من بوجودها اكتسب قوة و محبة لا حدود لها... إلى من عرفت معها معنى الحياة... إلى أختي فيروز و زوجها.

إلى أخي و رفيق دربي و هذه الحياة بدونك لا شيء معك أكون أنا وبدونك أكون مثل أي شيء في نهاية مشواري أريد أن أشكرك على مواقفك النبيلة... إلى من تطلع لنجاحي بنظرات الأمل ... إلى أخي سفيان.

إلى من أرى التفاؤل بأعينهما و السعادة في ضحكتهما إلى شعلة الذكاء و النور...إلى الوجه المفعم بالبراءة و لمحبتهما أزهرت أيامي و تفتحت براعم الغد... أخواي موسى و حسام.

إلى زهرة النرجس... إلى زهو البيت وفرحه أخر العنقود... إلى أختي حنان.

إلى من أظهروا لي ما هو أجمل من الحياة و أنقى من الهواء ... إلى أخوالي و خالاتي... إلى أعمامي و عماتي.

إلى من زرع التفاؤل في دربي و قدم لي المساعدات دون أن يشعر بدوره... إلى ابن عمتي و أخي شريف.

إلى القلوب الطاهرة و النفوس البريئة... إلى رياحين حياتي آية و أنور و أمجد و شهد و شذى و رانيا و التوأم أماني و أمنية.

إلى الروح التي سكنت حياتي.......................................

إلى توأم روحي و رفيقة دربي ... إلى صاحبة القلب الطيب و النوايا الصادقة... إلى من رافقتني منذ أن حملنا حقائب صغيرة و معك سرت الدرب خطوة بخطوة وما تزال ترافقني حتى الآن... إلى أختي و صديقتي صورية.

إلى من تقاسمنا حلو الحياة و مرها...إلى من مسحت الدمعة من عيني و رسمت الابتسامة على شفتي...إلى أعز الناس أختي و صديقتي نورة.

إلى الأخوات اللواتي لم تلدهن أمي ... إلى من تحلوا بالإخاء و تميزوا بالوفاء و العطاء... إلى ينابيع الصدق الصافي إلى من معهم سعدت برفقتهم في دروبي الحياة الحلوة و المرة ... عرفت كيف أجدهم و علموني أن لا أضيعهم إلى صديقاتي "رحمة،حامدة،سهام،مفيدة،مريم،إيمان،شهرة،رقية"...إلى كل من نسيهم قلمي.

إلى من كانوا ملاذي و ملجئي...إلى من تذوقت معهم أجمل اللحظات...إلى من سأفتقدهم وأتمنى أن يفتقدوني...إلى من جعلهم الله إخوتي بالله...و من أحببتهم بالله "طلاب قسم رياضيات و إعلام آلي".

إلى من تقاسمت معهما عناء هذا البحث:

إلى ينبوع الصفاء و النقاء شمعة حياتي أختي و صديقتي مسعودة و عائلتها

إلى من سرنا معا لنشق طريق النجاح إلى نبراس طريقي أختي و صديقتي وسام و عائلتها.

إلى من ساعدنا على إتمام هذا البحث و قدم لنا العون و مد لنا يد المساعدة و زودنا بالمعلومات اللازمة و نخص بالذكر الأستاذ "حليم ياسين".

الآن تفتح الأشرعة و ترفع المرساة لتنطلق السفينة في عرض بحر واسع مظلم هو بحر الحياة و في هذه الظلمة لا يضيء إلا قنديل الذكريات ذكريات الأخوة البعيدة إلى الذين أحببتهم و أحبوني.

الخامسة"ياسمين"

إهداء

بسم الله الذي هدانا إلى هذا و ما كنا لنهتدي لولا أن هدانا الله أما بعد أهدي ثمرة نجاحي و سنين تعبي هذا:

إلى من لا يمكن للكلمات أن توفي حقهما، إلى من لا يمكن للأرقام أن تحصي فضائلهما:

إلى أغلى اسم في الوجود، إلى يد طالما أعطت و لم تطلب، إلى من حصد الأشواك عن دربي ليمهد لي طريق العلم، إلى الذي كان سندي و دعمي في كل خطواتي، إلى الذي رباني فأحسن تربيتي، إلى الإنسان الذي لم ولن يكون له مثيل في الوجود أبي أطال الله في عمره.

إلى أعذب كلمة ينطقها اللسان، إلى منبع الحب و الحنان، إلى التي تعبت و سهرت و أفاقت مبكرا، إلى من كان دعاؤها سر نجاحي و حنانها بلسم جراحي، إلى القلب الذي لا يمل العطاء، إلى أغلى إنسانة في الوجود أمي أطال الله في عمرها.

إلى من تقاسمنا نفس الشعور، نفس الحزن و نفس الفرح، إلى من أحبهم أكثر من روحي إخوتي و أخواتي:

إلى القلب الصافي و الإحساس العذب، إلى دعمي في الحياة ، إلى قرة عيني و أخي بلال وزوجته سماح حفظهما الله.

إلى من زرع التفاؤل في دربي و قدم لي المساعدات و التسهيلات والأفكار، أخي يحي و خطيبته وسام حفظهما الله.

إلى سندي و قوتي و ملاذي بعد الله، إلى من أثرتني على نفسها، إلى من علمتني علم الحياة أختي الحبيبة زينة و زوجها هشام حفظهما الله.

إلى من سرنا سويا و نحن نشق الطريق نحو النجاح و الإبداع، إلى من تكاتفنا يدا بيد رغم الصعاب، إلى من أحبها و حبها يسري في دمي أختي العزيزة منوبة حفظها الله.

إلى جميع الأحباب و الأقارب حفظهم الله.

إلى نور الشمس و ضياء القمر، إلى الشمعة التي أنارت دربي، إلى توأم روحي صاحبة الوجه البشوش بسمة.

إلى من تقاسمت معهما عناء هذا البحث:

إلى من دخلت حياتي و أضافت إليها البسمة"ياسمينة"، إلى رفيقة الدرب"وسام".

إلى الصديقات اللواتي تسكن صورهم و أصواتهم أجمل اللحظات و الأيام التي عشتها.

إلى من كانوا ملاذي و ملجئي إلى من تذوقت معهم أجمل اللحظات، إلى من سأفتقدهم و أتمنى أن يفتقدوني، إلى من جعلهم الله إخوتي في الله و من أحببتهم بالله طلاب قسم الرياضيات و الإعلام الآلي.

إلى كل من ساعدني في إنجاز هذا العمل...شكري الجزيل و امتناني.

"مسعودة

إهداء

إلى سندي ومعلمي الأكبر في الحياة أبي الغالي

إلى من سهرت الليالي من أجلي، إلى من كان حلمي حلمها وألمي ألمها أمي الحبيبة

إلى القلوب الطاهرة الرقيقة والنفوس البريئة ،إلى رياحين حياتي إخوتي أمال، سلمى، هارون ومصطفى

إلى ذكريات الأخوة البعيدة، إلى الذين أحببتهم وأحبوني صديقاتي العزيزات

إلى كل الأقارب والأحباب الذين وقفوا معي بقلوبهم

إلى جميع أساتذتي كل باسمه من الطور الابتدائي إلى الجامعي

أتقدم لكم بأسمى عبارات التقدير والامتنان وشكرا

وسام

Table des matières

Introduction

Les équations aux différences sont à la base de l'analyse appliqués depuis L. Euler, P. L Tchebycheff et A. A Markov. Actuellement elles sont le support de nombreux algorithmes d'analyse numérique et omnipésentes en conbinatoire.

Recemment, il a été accordé un intérête à l'étude des propriétés des équations aux différences linéaires. L'une des raisons pour cela est la necessité de certaines techniques qui peuvent être utilisés dans l'étude des propriétés de certaines modèles décrivant des phénomènes réelles en biologie, représentés par ce type des équations.

Généralement les équations aux différences linéaires d'ordre k est donnée par la forme :

$$X_{n+k} + p_1(n)X_{n+k-1} + ... + p_k(n)X_n = g_n$$

Ce mémoire est partagé en trois chapitres.

Dans le premier chapitre, on s'interresse aux équations aux différences linéaires, plus précisément on rappelle l'essentiels des définitions et les résultats qui seront utiles pour la suite de notre travail.

En suite, dans le deuxième chapitre on donne quelques éléments de la théorie de la stabilité des solutions des équations aux différences linéaires.

Enfin, dans le troixième chapitre nous donne quelques applications en biologie.

Chapitre 1

Equations aux différences linéaires

Dans ce chapitre, on s'interresse aux équations aux différences linéaires, nous allons donner quelques définitions de base et des résultats généraux et donnons les méthodes de résolution ce type d'équation dans le cas des coéfficients constants. En prend dans toute la suite $\mathbb{N}_{n_0}^{+}$ désigne l'ensemble des nombres $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$ et $(X_n)_{n \in N}$ est une suite définie sur $\mathbb{N}_{n_0}^{+}$.

1.1 Equations aux différences linéaires

Définition 1.1.1 *Une équation de la forme*:

$$X_{n+k} + p_1(n)X_{n+k-1} + ... + p_k(n)X_n = g_n \tag{1.1}$$

avec $p_0(n) = 1, p_1(n), ..., g_n$ *sont des fonctions définies sur* $\mathbb{N}_{n_0}^{+}$*, s'appelle équation aux différences linéaire d'ordre k dés que* $p_k(n) \neq 0$*. En générale on associé k conditions initiales avec l'équation (1.1)*

$$X_{n_0} = c_1, X_{n_0+1} = c_2, ..., X_{n_0+k-1} = c_k \tag{1.2}$$

où les c_i, i=1,..., k sont des réelles ou complexes.

Exemple 1.1.1 *Considérons l'équation aux différences linéaire d'ordre 3 suivante*

$$X_{n+3} - \frac{n}{n+1} X_{n+2} + n X_{n+1} - 3X_n = n$$

avec $X_1 = 0$, $X_2 = -1$, *et* $X_3 = 1$. *On trouve les valeurs de* X_4, X_5, X_6, *et* X_7.

$$X_{n+3} = \frac{n}{n+1} X_{n+2} - n X_{n+1} - 3X_n + n$$

pour $n = 1$,

$$X_4 = \frac{1}{2} X_3 - X_2 + 3X_1 + 1 = \frac{5}{2},$$

pour $n = 2$,

$$X_5 = \frac{2}{3} X_4 - 2X_3 + 3X_2 + 2 = -\frac{4}{3},$$

pour $n = 3$,

$$X_6 = \frac{3}{4} X_5 - 3X_4 + 3X_3 + 3 = -\frac{3}{2},$$

pour $n = 4$,

$$X_7 = \frac{4}{5} X_6 - 4X_5 + 3X_4 + 4 = 20,9.$$

Exemple 1.1.2

$$3t^2 X_{n+1} - \ln(t) X_n = \exp(t)$$

est une équation aux différences linéaire d'ordre 1.

$$t^2 X_{n+1} - X_n^2 = t^2$$

est une équation aux différences non linéaire.

Théorème 1.1.1 *L'équation (1.1) avec les conditions initiales (1.2) admet une et une seule solution.*

Dans la suite on note par $X(n, n_0, c)$ la solution de l'équation (1.1) tel que

$$X(n_0 + j, n_0, c) = c_{j+1}, j = 0, 1, ..., k - 1.$$

Avec

$$c = (c_1, c_2, ..., c_k) \in \mathbb{R}^k.$$

1.1.1 Equations aux différences linéaires homogènes

Définition 1.1.2 *La forme d'une équation aux différences linéaire non homogène d'ordre k est donné par*

$$X_{n+k} + p_1 X_{n+k-1} + ... + p_k X_n = g_n \tag{1.3}$$

avec $p_1, ..., g_n$ sont des fonctions définies pour $n \geq n_0$ et $p_k \neq 0$, pour tout $n \geq n_0$. Si $g_n = 0$, l'équation (1.3) est dite équation homogène.

Exemple 1.1.3

$$X_{n+2} - 4X_{n+1} + X_n = 0$$

est une équation aux différences linéaire homogène d'ordre 2.

$$t^2 X_{n+4} + 25X_{n+3} + tX_n = 0$$

est une équation aux différences linéaire homogène d'ordre 4.

$$X_{n+3} - 4tX_{n+2} + 5X_{n+1} - 2X_n = 3t^2 - 1$$

est une équation aux différences linéaire non homogène d'ordre 3.

1.1.2 Matrice de Gasorati

Définition 1.1.3 *La matrice de Gasorati $k(n)$ des solution $X_{n_1}, ..., X_{n_k}$ est donnée par*

$$k(n) = \begin{pmatrix} X_{n_1} & X_{n_2} & \cdots & X_{n_k} \\ X_{(n+1)_1} & X_{(n+1)_2} & \cdots & X_{(n+1)_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{(n+k-1)_1} & X_{(n+k-1)_2} & \cdots & X_{(n+k-1)_k} \end{pmatrix}.$$

Exemple 1.1.4 *Considérons l'équation aux différences linéaire d'ordre 3 suivante*

$$X_{n+3} - 7X_{n+1} + 6X_n = 0.$$

Les solutions de cette équation sont 1, (-3)^n et 2^n et son matrice de Gasorati est

$$K(n) = \begin{pmatrix} 1 & (-3)^n & 2^n \\ 1 & (-3)^{n+1} & (2)^{n+1} \\ 1 & (-3)^{n+2} & (2)^{n+2} \end{pmatrix}.$$

Définition 1.1.4 *Les fonctions $f_1(n)$, $f_2(n)$, ..., $f_k(n)$ sont linéaires dépendants pour $n \geq n_0$ si existe des constants $a_1, a_2, ..., a_k$ non nuls tels que*

$$a_1 f_1(n) + a_2 f_2(n) + ... + a_k f_k(n) = 0, n \geq n_0.$$

On dit que la famille des fonctions $\{f_i(n)\}_{i=1}^{k}$, sont linéairements indépendants si pour tout $n \in \mathbb{N}_{n_0}^{+}$

$$\sum_{i=1}^{k} a_i f_i(n) = 0 \implies a_i = 0, i = 1, 2, ..., k.a_i \in \mathbb{R}.$$

Théorème 1.1.2 *Une condition suffisante, pour que $\{f_i(n)\}_{i=1}^{k}$ soient linéairements indépendantes, est qu'il existe $\tilde{n} \geq n_0$*

$$\det k(\tilde{n}) \neq 0.$$

Preuve. *Supposons que*

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f_i(n) = 0 \\ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f_i(n+1) = 0 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f_i(n+k-1) = 0 \end{cases}$$

ce qui donne

$$k(n)\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix} = 0$$

ainsi, s'il existe un $n = \tilde{n}$ tel que

$$\det k(\tilde{n}) \neq 0$$

alors

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

■

1.1.3 Solutions fondamentales

Construisons un ensemble de n solution $X_n^{(i)}$, i=1,..., k telle que

$$X_0^{(i)} = 0, ..., X_{i-1}^{(i)} = 1, X_i^{(i)} = 0, ..., X_{k-1}^{(i)} = 0.$$

Cet ensemble est appelé ensemble fondamental.

Le théorème suivant énonce que le rôle des k solutions fondamentales peut être joué par un quelconque ensembles de k solutions linéairements indépendantes :

Théorème 1.1.3 *Chaque solution de l'équation homogène peut être exprimée comme combinaison linéaire*

$$c_1X_n^{(1)} + c_2X_n^{(2)} + ... + c_kX_n^{(k)}$$

des k solution linéairement indépendantes $X^{(i)}$ *où* $c_1,..., c_k$ *sont des constantes.*

1.2 Equations aux différences linéaires à coefficients constants

A titre de motivation, nous allons commencer par un approche élémentaire de la théorie des équations aux différences linéaires à coefficients constants.

Définition 1.2.1 *On appelle l'équation (1.4) un'équation aux différences linéaire du n ordre à coefficients constants*

$$X_{n+k} + p_1X_{n+k-1} + ... + p_kX_n = g_n \tag{1.4}$$

tells que $p_1, ..., p_k$ *soient des constants. Dans toute la suite, on s'intèresse aux équations aux différences à coefficients constants homogènes c'est-à-dire*

$$\sum_{i=0}^{k} p_iX_{n+k-i} = 0, p_0 = 1. \tag{1.5}$$

Théorème 1.2.1 *L'équation (1.5) à des solutions de la forme*

$$X_n = \lambda^n$$

avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$ *et vérifie*

$$p(\lambda) = \sum_{i=0}^{k} p_i\lambda^{k-i} = 0.$$

Preuve. *En remplaçant par* $X_n = \lambda^n$ *dans l'équation (1.5), on trouve*

$$\lambda^n \sum_{i=0}^{n} p_i\lambda^{k-i} = 0$$

ce qui donne

$$\sum_{i=0}^{n} p_i \lambda^{k-i} = 0.$$

■

1.2.1 Polynôme caractéristique

Définition 1.2.2 *Soit*

$$X_{n+k} + p_1(n) X_{n+k-1} + ... + p_k(n) X_n = 0 \tag{1.6}$$

une équation linéaire homogène à coefficients constants. Le polynôme

$$p(\lambda) = \lambda^k + p_1(n)\lambda^{k-1} + ... + p_{k-1}(n)\lambda + p_k(n) \tag{1.7}$$

est appelé le polynome caractéristique associé à l'équation homogène (1.6).

L'équation

$$p(\lambda) = 0$$

est appelé l'équation caractéristique associés à l'équation homogène (1.6). Cette équation a n solutions complexes $\lambda_1, ..., \lambda_n$.

Théorème 1.2.2 *Si les racines $\lambda_1, ..., \lambda_k$ de $p(\lambda)$ sont distinctes, alors les solution de (1.5) sont linéairement indépendants.*

Preuve. *Si λ_1,..., λ_k sont des racines distincts du $p(\lambda)$, alors les $\{\lambda_1^n$,..., $\lambda_k^n\}$ sont k solutions de l'équation (1.5). Montrons qu'ils sont lineairement independantes. Considerons la matrice de Gasorati .*

$$k(n) = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & \lambda_2^n & \cdots & \lambda_k^n \\ \lambda_1^{n+1} & \lambda_2^{n+1} & \cdots & \lambda_k^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n+k-1} & \lambda_2^{n+k-1} & \cdots & \lambda_k^{n+k-1} \end{pmatrix}$$

donc

$$\det k(n) = (\lambda_1\lambda_2...\lambda_k)^n \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \cdots & \lambda_k^{k-1} \end{vmatrix} = (\lambda_1\lambda_2...\lambda_k)^n \prod_{i>j}(\lambda_i - \lambda_j),\ i, j{=}1,..., k$$

Ainsi

$$\det k(n) \neq 0$$

d'aprés le théorème (1.1.10) les solutions sont libres. ■

1.2.2 Résolution d'équations homogènes

Théorème 1.2.3 *La solution générale de l'équation* (1.6) *est de la forme suivante*

$$X_n = \sum_{i=1}^{l} \left\{ \lambda_i^n \sum_{j=0}^{m_i-1} a_{ij} n^j \right\}$$

où

- *le paramètre $l \leq k$ désigne le nombre de racines distinctes de l'équation caractéristique* (1.7).
- *le paramètre λ_i désigne une racines de l'équation caractéristique* (1.7).
- *le paramètre m_i désigne la multiplicité de la racines λ_i.*
- *les coefficients a_{ij} sont des constants qui sont déterminées à partir des conditions initiales.*

Racines réelles simple

Chaque terme λ_i^n avec i=1, 2,..., m est une solution de l'équation aux différences homogène. La solution générale est une combinaison linéaire de tous ces termes :

$$X_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n + ... + c_m\lambda_m^n$$

Les coefficients c_i sont des constantes fixées par les condition initiales.

Exemple 1.2.1 *Soit à résoudre la relation suivante :*

$$X_n = X_{n-1} + X_{n-2};\ \forall n \geq 2$$

$$X_0 = 0;\ X_1 = 1.$$

L'équation caractéristique de cette relation est

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

les racines simples de cette équation sont

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \ et\ \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

par conséquent, la solution générale est

$$X_n = a_1\lambda_1^n + a_2\lambda_2^n$$

autrement dit

$$X_n = a_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + a_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

les constantes a_1 et a_2 sont déterminées par les conditions initiales comme suit :

$$X_0 = a_1 + a_2 = 0$$

$$X_1 = a_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + a_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1.$$

En résolvant ce système à deux équations et deux inconnues, on obtient

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \ et\ a_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

la solution finale est alors

$$X_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}.$$

Racines réelles multiples

Si la racine de multiplicité m telle que $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_m$. On pose :

$$X_n = (c_1 + c_2 n + ... + c_m n^{m+1})\lambda_1^n.$$

Ici également, les coefficients c_1 à c_m seront fixés par les condition initiales.

Exemple 1.2.2 *Résoudre l'équation suivante*

$$X_{n+2} - X_{n+1} + \frac{1}{4}X_n = 0$$

l'équation caractéristique est

$$\lambda^2 - \lambda + \frac{1}{4} = 0$$

les racines de cette équation sont

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}(racines\ double)$$

par conséquent, la solution générale

$$X_n = c_1\left(\frac{1}{2}\right)^n + c_2 n\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Théorème 1.2.4 *Si λ_i, i=1,..., s une racine du polynôme $p(\lambda)$ de dégré de multiplicité m_i. Alors les fonctions*

$$X_{i,j}(n) = n^j\lambda_i^n, 0 \leq j \leq m_i, i = 1, ..., s; m_1 + ... + m_s = k$$

sont des solutions linéairement indépendantes de l´équation (1.5) et forment une base de S.

Remarque 1.2.5 *Du théorème précédement, il résulte que toute solutions de l'équation (1.5) s'écrit comme combinaison linéaire de* λ_i^n*, i=1,..., k, ie :*

$$X_n = \sum_{i=1}^{k} c_i \lambda_i^n, c_i \in \mathbb{R}$$

Avec λ_1*,...,* λ_k *sont des racines distinctes du polynôme caractéristique p(*λ*).Quand le polynôme p(*λ*) admet des racines multiples, alors les solutions* λ_i^n *qui correspondent à des* λ_i *distinctes ne suffisent pas pour former une base pour l'espase des solutions S, mais , on peut completer* $\left\{\lambda_i^n\right\}_{i=1}^{s}$*, par d'autres solutions pour former une base pour l'espase S.*

Exemple 1.2.3 *Résoudre l'équation suivante :*

$$X_{n+3} - 7X_{n+2} + 16X_{n+1} - 12X_n = 0; \ \forall n \geq 3$$

$$X_0 = 0; \ X_1 = 1; \ X_2 = 2.$$

L'équation caractéristique de cette relation est

$$\lambda^3 + -7\lambda^2 + 16\lambda - 12 = 0$$

les racines de cette équation sont

$$\lambda_1 = 3; \ \textit{racine simple, et}$$

$$\lambda_2 = 2; \textit{racine double}$$

par conséquent, la solution générale

$$X_n = a_1\lambda_1^n + (a_2 + a_3 n)\lambda_2^n$$

autrement dit

$$X_n = a_1 3^n + (a_2 + a_3 n)2^n$$

les constantes a_1 et a_2 et a_3 sont déterminées par les conditions initiales comme suit :

$$X_0 = a_1 + a_2 = 0$$

$$X_1 = a_1 + 2a_2 + 2a_3 = 1$$

$$X_2 = 9a_1 + 4a_2 + 8a_3 = 2$$

en résolvant ce système à trois équations et trois inconnues, on obtient

$$a_1 = -2;\ a_2 = 2;\ et\ a_3 = \frac{3}{2}$$

la solution finale est alors

$$X_n = -2.3^n + 2^{n+1} + 3n2^{n-1}.$$

1.2.3 Quelques exemples

Exemple 1.2.4 *On considère l'équation aux différences linéaires d'ordre 2 suivants*

$$X_{n+2} - 3X_{n+1} + 2X_n = 0$$

son polynôme caractéristique

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

admet deux racines distinctes

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$$

la solution générale s'écrit

$$X_n = c_1 + c_2 2^n.$$

Exemple 1.2.5 *Considérons l´équation aux différences linéaires d´ordre 3 suivante*

$$X_{n+3} - 4X_{n+2} + 5X_{n+1} - 2X_n = 0$$

son polynôme caractéristique

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2$$

a comme racines $\lambda_1 = 2$(*racine simple) et* $\lambda_2 = 1$(*racine double). La solution générale et donc donnée par*

$$X_n = c_1 2^n + c_2 + c_3 n.$$

Exemple 1.2.6 *Considérons l´équation aux différences d'ordre 4 suivante*

$$X_{n+4} + 2X_{n+3} - 23X_{n+2} - 24X_{n+1} + 144X_n = 0,$$

son polynôme caractéristique associé est

$$p(\lambda) = (\lambda - 3)^2(\lambda + 4)^2$$

qui admet comme racines $\lambda_1 = 3$(*racine double) et* $\lambda_2 = -4$(*racine double) et donc la solution générale est donnée par*

$$X_n = c_1 3^n + c_2 n 3^n + c_3(-4)^n + c_4 n(-4)^n.$$

Racines complexes conjuguées Soit $\lambda_{1,2} = a \pm ib$, deux racines complexe de l'équation caractéristique. Alors, la solution X_n est une combinaison linéaire de chaque racine élevée à la puissance n :

$$X_n = c_1(a + ib)^n + c_2(a - ib)^n$$

On peut également écrire les racines sous la forme polaire :

$$a \pm ib = Re \pm i\Omega$$

avec

$$R = \sqrt{a^2 + b^2}, \Omega = a\tan(\frac{b}{a}).$$

On a donc

$$(a \pm ib)^n = (Re \pm i\Omega)^n = R^n(\cos(n\Omega) \pm i\sin(n\Omega))$$

comme les coéfficients de l'équation aux différences sont réels, la solution l'est également. Cela signifie que les termes imaginaires se simplifieront et que l'on obtiendra finalement :

$$X_n = A_1R^n(\cos(n\Omega) + A_2R^n\sin(n\Omega)) = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}R^n\cos(n\Omega + a\tan(\frac{-A_2}{A_1}))$$

le résultats générale est alors le suivant :

$$X_n = AR^n\cos(n\Omega + \alpha).$$

Les conditions initiales permettront de calculer les valeurs A_1 et A_2 ou celles de A et α.

Exemple 1.2.7 *Résoudre l'équation aux différences d'ordre 2 suivante*

$$X_{n+2} + X_n = 0$$

où

$$X_0 = 0, X_1 = 1.$$

L'équation caractéristique est

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

a deux solutions complexe conjuguées

$$\lambda_{1,2} = \pm i.$$

Trouver la valeur θ telle que

$$\cos\theta = \frac{a}{\rho} et \sin\theta = \frac{b}{\rho} (avec \rho = \sqrt{a^2 + b^2}).$$

Nous avons ici a=0 et b=1. Il s'ensuit que $\rho = \sqrt{0+1} = 1$ et donc $\cos\theta = 0, \sin\theta = 1$ et donc $\theta = \frac{\pi}{2}$.

La solution générale est donc

$$X_n = c_1 \sin(n\frac{\pi}{2}) + c_2 \cos(n\frac{\pi}{2}).$$

Fixer les valeurs des constantes c_1 et c_2 à partir des valeurs initiales X_0 et X_1 :

$$\begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1 = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} c_1 \sin(0) + c_2 \cos(0) = 0 \\ c_1 \sin(\frac{\pi}{2}) + c_2 \cos(\frac{\pi}{2}) = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 1 \end{cases}.$$

La solution qui satisfait les deux conditions initiales est donc $X_n = \sin(n\frac{\pi}{2})$.

1.2.4 Equations aux différences linéaires non homogènes

Considérons l'équation aux différences d'ordre k

$$X_{n+k} + p_1(n)X_{n+k-1} + ... + p_k(n)X_n = g_n \tag{1.8}$$

avec $p_k \neq 0$ pour tout $n \geq n_0$. Le terme g_n est appelle le terme force ou la force exterieur.

Exemple 1.2.8 *On a l' équation aux différences linéaires d'ordre 2 suivante*

$$X_{n+2} - X_{n+1} - 6X_n = 5(3^n)$$

- *Remarque que* $(X_1)_n = n(3^{n-1})$ *et* $(X_2)_n = (1+n)3^{n-1}$ *sont des solutions de l'équation.*
- *Remarque que* $X_n = (X_2)_n - (X_1)_n$ *n'est pas une solution de l'équation.*
- *Remarque que* $\varphi_n = cn(3^{n-1})$ *pas une solution de l'équation, avec c est un constant.*

solution

- $(X_1)_n$ *et* $(X_2)_n$ *sont des solution de l'équation (vérifie).*
- $X_n = (X_2)_n - (X_1)_n = 3^{n-1}$ *n'est pas une solution car* $3^{n+1} - 3^n - 63^{n-1} = 3^n(3-1-2) = 0 \neq 5(3^n)$.
- *On remarque facilement que* φ_n *n'est pas une solution de l'équation.*

Théorème 1.2.6 *Si* $(X_1)_n$ *et* $(X_1)_n$ *sont des solutions de l'équation (1.8), donc* $X_n = (X_2)_n - (X_1)_n$ *est une solution de l'équation homogène correspondont*

$$X_{n+k} + p_1(n)X_{n+k-1} + ... + p_k(n)X_n = 0 \tag{1.9}$$

Théorème 1.2.7 *Chaque solutions* X_n *de (1.7) est écrit comme*

$$X_n = (X_p)_n + \sum_{i=1}^{k} a_i(X_i)_n$$

telle que $\{(X_1)_n, (X_2)_n, ..., (X_k)_n\}$ *est un ensemble des solutions fondamentals de l'équation (1.9).*

Exemple 1.2.9 *On a l' équation aux différences linéaire d'ordre 2 suivante*

$$X_{n+2} + X_{n+1} - 12X_n = n2^n.$$

Les racines caractéristique de l'équation homogène sont $\lambda_1 = 3$ *et* $\lambda_2 = -4$

donc

$$(X_c)_n = c_1 3^n + c_2(-4)^n$$

on a

$$g_n = n2^n$$

donc

$$(X_p)_n = a_1 2^n + a_2 n2^n$$

d'où cette relation

$$a_1 2^{n+2} + a_2(n+2)2^{n+2} + a_1 2^{n+1} + a_2(n+1)2^{n+1} - 12a_1 n2^2 + 12a_2 n2^2 = n2^n.$$

$$(10a_2 - 6a_1)2^n - 6a_2 n2^n = n2^n.$$

donc

$$10a_2 - 6a_1 = 0 et - 6a_2 = 1 \Rightarrow a_1 = \frac{-5}{18} et a_2 = \frac{-1}{6}$$

la solution particulière est

$$(X_p)_n = \frac{-5}{18}2^n - \frac{1}{6}2n$$

et la solution générale est

$$X_n = c_1 3^n + c_2(-4)^n - \frac{5}{18}2^n - \frac{1}{6}n2^n.$$

Exemple 1.2.10 *Soit à résoudre l'équation suivante*

$$X_n = X_{n-1} + n \tag{1.10}$$

$$X_0 = 1$$

cette équation est aussi vrai pour n+1, c'est-à-dire

$$X_{n+1} = X_n + n + 1 \tag{1.11}$$

en soustrayant (1.11) de (1.10), on obtient

$$X_{n+1} - 2X_n + X_{n-1} = 1 \tag{1.12}$$

pour n+1, l'équation (1.12) s'écrit comme suit :

$$X_{n+2} - 2X_{n+1} + X_n = 1 \tag{1.13}$$

encore une fois, en soustrayant (1.13) de (1.12) on obtient

$$X_{n+2} - 3X_{n+1} + 3X_n - X_{n-1} = 0 \tag{1.14}$$

avec les conditions initiales suivantes

$$X_0 = 0; X_1 = 1; X_2 = 3.$$

Il est utile de remarquer que les deux derniéres conditions initiales sont nécessaire pour la résolution de l'équation (1.12), pour la simple raison que le degré de l'équation (1.14) est 3. Elles sont déduites de l'équation (1.12). En utilisant donc la méthode des équation linéaires homogénes, discutée précédemment, on obtient la solution finale suivante

$$X_n = \frac{n_{n+1}}{2}.$$

L'opérateur d'avancement E

Définition 1.2.3 *Etant donnée une suite de nombre entier g_n, l'opérateur d'avancement E est défini comme suit :*

$$g_n = c(une\ constante) \Rightarrow E(g_n) = c$$

$$g_n \neq constante \Rightarrow E(g_n) = g(n+1).$$

Exemple 1.2.11 *Illustrons l'application de ces opérateur sur les fonction suivantes :*

$$E(2^n) = 2^{n+1},$$

$$E(n+1) = n+2.$$

Ainsi définies, il est facile de vérifier :

L'addition et la multiplication d'opérateurs sont commutatives

$$(E_1 + E_2)g_n = (E_2 + E_1)g_n,$$

$$(E_1 \times E_2)g_n = (E_2 \times E_1)g_n.$$

L'addition et la multiplication d'opérateurs sont associatives

$$((E_1 + E_2) + E_3)g_n = (E_1 + (E_2 + E_3))g_n,$$

$$(E_1(E_2 \times E_3))g_n = ((E_1 \times E_2)E_3)g_n.$$

Le tableau ci-dessous résume l'éxpression à employer pour éliminer quelques fonction g_n dans les équation non-homogénes. Dans le tableau qui suite, $(P_k)_n$et α représentent un polynôme en n de degré k et une valeur entiére, respectivement.

Fonction g_n	Eliminateur correspondant
g_n = constante	(E-1)
$g_n = (p_k)_n$	$(E-1)^{k+1}$
$g_n = \alpha^n$	$(E-\alpha)$
$g_n = \alpha^{n(}p_k)_n$	$(E-\alpha)^{k+1}$

Remarque 1.2.8 *Les deux observations suivant peuvent être utilisées pour simplifier la résolution des équation récurrentes.*

- *Si E_1 est l'annihilateur de g_n alors les racines de l'equation caractéristique de*

$$E_1(c_k X_{n+k} + ... + c_0 X_n) = 0 \tag{1.15}$$

Sont les valeurs qui annulent E_1 et $c_k\lambda^k + c_{k-1}\lambda^{k-1} + ... + c_0$. Cela nous permet de ne pas développer l'équation(1.15), comme nous l'avons fait précédemment, et nous évite ainsi des calculs laborieux.

- *Si E_1 est l'annihilateur de g_n et E_2celui de $f_n$alors $(E_1 \times E_2)$est l'annihilalteur de la fonction $(g_n + f_n)$.*

Utilisation de l'opérateur d'avancement E

L'intérêt de l'opérateur E réside dans sa capacité de rendre une équation non-homogène en une autre équation équivalente mais homogène, aprés un certain nombre de transformation.

Voyons cela sur les exemple suivants.

Exemple 1.2.12 *Soit à résoudre l'équation suivante :*

$$X_{n+2} - 4X_{n+1} + X_n = n^2; \forall n \geq 2, \tag{1.16}$$

$$X_0 = 0; X_1 = 1.$$

Application l'opérateur E au terme n^2 comme suit :

$$E(n^2) = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$$

$$(E-1)(n^2 + 2n) = ((n+1)^2 + 2(n+1)) - n^2 - 2n = 2n + 3$$

$$(E-1)(2n+3) = 2(n+1) - 2n + 3 - 3 = 2$$

$$(E-1)(2) = 2 - 2 = 0.$$

Par conséquent, en appliquant l'expression $(E-1)^3$ aux deux membres de l'équation (1.16), on obtient :

$$(E-1)^3(X_{n+2}-4X_{n+1}+X_n)=(E-1)^3(n^2).$$

Développant cette relation, on obtient :

$$X_{n+5}-7X_{n+4}+16X_{n+3}-16X_{n+2}+7X_{n+1}-X_n=0.$$

L'équation caractéristique de cette équation est :

$$\lambda^5-7\lambda^4+16\lambda^3-16\lambda^2+7\lambda-1=0.$$

Qui peut encore s'écrire comme suit :

$$(\lambda-1)^3(\lambda^2-4\lambda+1)=0.$$

La solution finale est donc comme suit :

$$X_n=(a_0+a_1n+a_2n^2)1^n+a_3(2-2\sqrt{3})+a_4(2+2\sqrt{3}).$$

Exemple 1.2.13 *Soit à résoudre l'équation suivante :*

$$X_n=X_{n-1}+2^n$$

$$X_0=1.$$

En appliquant l'opérateur E, on obtient :

$$(E-2)2^n=2^{n+1}-2.2^n=0.$$

Par conséquent

$$(E-2)(X_n-X_{n-1})=0.$$

En développant cette équation, on trouve que les racines de son équation caractéristique sont :

$$\lambda_1 = 1 et \lambda_2 = 2.$$

Par conséquent, la solution générale est comme suit :

$$X_n = a_0 + a_1 2^n.$$

En procédant de la même manière que précédemment, on obtient :

$$a_0 = -1 \ et \ a_1 = 2.$$

La solution finale est comme suit :

$$X_n = 2^{n+1} - 1.$$

Remarque 1.2.9 *Il existe une maniére élégante de procéder pour résoudre cette équation (et bien d'autres encore !). en effet , écrivons cette équation pour les différentes valeurs de n comme suite :*

$$X_n = X_{n-1} + 2^n$$

$$X_{n-1} = X_{n-2} + 2^{n-1}$$

$$X_{n-2} = X_{n-3} + 2^{n-2}$$

$$...$$

$$X_2 = X_1 + 2^2$$

$$X_1 = X_0 + 2.$$

En sommant les termes de gauche entre-eux et les termes de droite entre-eux, on arrive à :

$$X_n = X_0 + 2 + 2^2 + ... + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

Exemple 1.2.14 *Résoudre l'équation suivante*

$$X_n = X_{n-1} + n2^n$$

$$X_0 = 0.$$

En appliquant l'opérateur E, on obtient

$$(E-2)n2^n = (n+1)2^{n+1} - n2^{n+1} - n2^{n+1} = 2^{n+1}$$

$$(E-2)2^{n+1} = 2^{n+2} - 2.2^{n+1} = 0$$

par conséquent,

$$(E-2)^2(X_n - X_{n-1}) = 0$$

l'équation caractéristique de cette relation est :

$$(\lambda-2)^2(\lambda-1) = 0.$$

La solution générale est :

$$X_n = (a_0 + a_1 n)2^n + a_2.$$

En sachant que $X_1 = 2$ *et* $X_2 = 10$, *les valeur de* a_0 *et* α_1 *sont*

$$a_0 = -2; \alpha_1 = 2, a_2 = 2.$$

La solution finale est donc comme suite

$$X_n = (n-1)2^{n+1} + 2.$$

Chapitre 2

Points d'équilibres et stabilité

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'analyse de la stabilité des solutions des équations aux différences linéaires, et pour simplifier notre chapitre nous limitons notre duscussion aux équations aux différences linéaires d'ordre deux.

2.1 Points d'équilibres

Considérons une équation aux différences à coéfficients constants d'ordre k

$$p_n X_{n+k} + p_{n-1} X_{n+k-1} + p_{n-2} X_{n+k-2} + ... + p_0 X_n = b \tag{2.1}$$

où $p_0, p_1, ..., p_{n-1}, p_n$, b sont n coéfficients connus.

Définition 2.1.1 *Un point d'équilibre est un nombre $\bar{X}$ auquel il correspond une solution constante $X_n = \bar{X}$.*

- *si $p_n + p_{n-1} + p_{n-2} + ... + p_0 \neq 0$, alors il existe un seule point d'équilibre $\bar{X}$:*

$$p_n \bar{X} + p_{n-1} \bar{X} + p_{n-2} \bar{X} + ... + p_0 \bar{X} = b$$

$$\bar{X}(p_n + p_{n-1} + p_{n-2} + ... + p_0) = b$$

$$\bar{X} = \frac{b}{p_n + p_{n-1} + p_{n-2} + ... + p_0}$$

∘ *autrement, si* $p_n + p_{n-1} + p_{n-2} + ... + p_0 = 0$

· *si* $b = 0$ *chaque* $\bar{X}$ *est un point d'équilibre,*

· *si* $b \neq 0$ *il n'y a aucun point d'équilibre.*

2.2 Stabilité de point d'équilibre

Définition 2.2.1 *Un point d'équilibre* $\bar{X}$ *est stable si* $\forall \epsilon > 0$*, il existe un* $\sigma > 0$ *telle que*

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left| X_i - \bar{X} \right| < \sigma \implies \left| X_n - \bar{X} \right| < \epsilon, \forall n > n_0.$$

c-à-d : des états initiaux proches de point d'équilibre donnent lieu à des trajectoires proches de l'équilibre.

***Définition* 2.2.2** *Un point d'équilibre* $\bar{X}$ *est asymptotiquement stable si pour chaque n-tuple* $\{X_0, X_1, ..., X_{n-1}\}$*la solution correspondante vérifie*

$$\lim_{n\to\infty} X_n = \bar{X}.$$

2.3 Etats d'équilibres

Pour simplifier notre exposé, nous limitons notre discussion à l'équation aux différences d'ordre deux.

$$X_{n+2} + p_1 X_{n+1} + p_2 X_n = 0 \tag{2.2}$$

supposons que λ_1, λ_2 sont les racines d'équation caractéristique de l'équation (2.2). On obtient alors trois cas :

1.λ_1, λ_2 sont des racines réels distinctes : $(X_1)_n = \lambda_1^n$ et $(X_2)_n = \lambda_2^n$ sont deux solutions linéairement indépendants de (2.2). Si $|\lambda_1| > |\lambda_2|$, alors : nous allons maintenant montre que le compotrement limite de la solution générale $X_n = a_1\lambda_1^n + a_2\lambda_2^n$

$$X_n = \lambda_1^n\left[a_1 + a_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n\right].$$

Depuis

$$\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right| < 1.$$

Il s'ensuit que

$$\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n \longrightarrow 0 \textit{ quand } n \longrightarrow \infty.$$

En conséquence ; $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} a_1\lambda_1^n$, il y a 6 différents situations qui peuvent se présenter ici en fonction de valeur de λ_1 :

1. **(a)** $\lambda_1 > 1$: la suite $\left\{a_1\lambda_1^n\right\}$ diverge vers ∞ (système instable).
   (b) $\lambda_1 = 1$: la suite $\left\{a_1\lambda_1^n\right\}$ est une suite constante.
   (c) 0< $\lambda_1 < 1$: la suite $\left\{a_1\lambda_1^n\right\}$ est monotone décroissante vers 0 (système stable).
   (d) -1< $\lambda_1 < 0$: la suite $\left\{a_1\lambda_1^n\right\}$ est oxillante auteur de 0 (c'est-à-dire, alternance de signe) et convergent vers 0 (système stable).
   (e) $\lambda_1 = -1$: la suite $\left\{a_1\lambda_1^n\right\}$ est oxillante entre deux valeurs a_1 et $-a_1$.
   (f) $\lambda_1 < -1$: la suite $\left\{a_1\lambda_1^n\right\}$ est oxillante mais de plus en plus grandeur (système instable).
2. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$: la solution générale donnée par $X_n = (a_1 + na_2)\lambda^n$. De tout évidence, si $|\lambda| \geq 1$ la solution X_n diverge, soit monotone si $\lambda \geq 1$ où par oxillant si $\lambda \leq -1$.

Cependant, si $|\lambda| < 1$, alors la solution converge vers 0 puisque $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} n\lambda^n = 0$.

3. $\lambda_1 = \lambda_2$ sont complexes (c'est-à-dire que $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ et $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ où $\beta \neq 0$). Alors la solution est de la forme $X_n = Ar^2 \cos(n\theta - \omega)$ où $r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, $\theta = \arctan\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$.

Cependant, X_n oxillant de trois façons différentes en fonction de l'emplacement des racines conjuguées caractéristique :

(a) $r > 1$: ici λ_1 et $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$ sont en dehors du cercle unité. D'où X_n est oxillante mais de plus grandeur (système instable).

(b) $r = 1$: ici λ_1 et $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$ sont situés sur le cercle unité. D'où X_n est oxillante mais constant en amplitude.

(c) $r < 1$: ici λ_1 et $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$ sont situés sur le cercle unité. D'où X_n est oxillante mais converge vers 0 quand $n \longrightarrow \infty$(système stable).

Enfin, nous résumons la discussion ci-dessus dans la théorème suivant :

Théorème 2.3.1 *1. Toutes les solutions de (2.2) osciller vers 0 si et seulement si l'équation caractéristique n'admet pas des racines réelles positives.*

2. Toutes les solutions de (2.2) converge vers 0 (i.e la solution est asymptotiquement stable) si et seulement si $\max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} < 1$.

Exemple 2.3.1 *Soit l'équation aux différences linéaires d'ordre 2*

$$6X_{n+2} - 5X_{n+1} + X_n = 2$$

(a) $\sum a_i = 2 \neq 0$, *on a donc un seul point d'équilibre*

$$\bar{X} = \frac{b}{\sum a_i} = \frac{2}{2} = 1.$$

(b) L'équation caractéristique est

$$6\lambda^2 - 5\lambda + 1 = 0.$$

Le discriminant Δ vaut 1 et les racines sont donc

$$\lambda_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{12} = \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right\}.$$

Le point d'équilibre est asymptotiquement stable car $\left|\lambda_{1,2}\right| < 1$.

(2)

$$X_{n+2} - 2X_{n+1} + 2X_n = 0.$$

(a) $\sum a_i = 1 \neq 0$, *on a donc un seul point d'équilibre*

$$\bar{X} = \frac{b}{\sum a_i} = \frac{0}{1} = 0.$$

(b) L'équation caractéristique est

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0.$$

Le discriminant Δ vaut -4 et les racines sont donc

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = 1 \pm i.$$

Le point d'équilibre est instable car $\left|\lambda_{1,2}\right| = \sqrt{2} > 1$.

(3)

$$X_{n+3} + X_n = 0$$

(a) $\sum a_i = 2 \neq 0$, *on a donc un seul point d'équilibre*

$$\bar{X} = \frac{b}{\sum a_i} = \frac{0}{2} = 0.$$

(b) L'équation caractéristique est

$$\lambda^3 + 1 = 0.$$

Une première solution $\lambda_1 = -1$ vient à l'esprit, le polynôme est donc divisible par $\lambda + 1$. Nous obtenons

$$(\lambda + 1)(\lambda^2 - \lambda + 1).$$

L'équation $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$ *a pour racines*

$$\lambda_{2,\,3} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Nous avons donc 3 racines distinctes de multiplicité 1, et $\left|\lambda_{1,\,2,\,3}\right| = 1$. *Le point d'équilibre est donc stable, mais pas asymptotiquement stable.*

Chapitre 3

Applications des équations aux différences linéaires en biologie

Dans ce chapitre, nous allons donner deux exemples de problèmes en biologie qu'on peut modéliser comme des équations aux différences linéaires, le premier est les lapins de Fibonacci et le deuxième est la propagation des plantes annuelles.

3.1 Les lapins de Fibonacci

En 1202, Fibonacci s'intéressa au problème de croissance d'une population de lapins dans des circonstances idéales. Le problème est le suivant :

- on commence avec un couple de jeunes lapins,

- un lapin âgé d'un mois est capable de se reproduire,

- un couple de lapins (en âge de se reproduire) donne naissance à un autre couple de lapins tous les mois.

Fibonacci se posa la question suivante : combien y aura-t-il de couples de lapins aprés une année ? La figure ci-dessous illustre l'évolution du nombre de couples de lapins au fur et à mesure des mois.

FIGURE 3.1 – Couple de lapins

Le nombre de naissance (nouveaux couples de lapins) est égal au nombre de lapins qui ont au moins 2 mois (2 mois, 3 mois, 4 mois,...). Ce nombre est le nombre de couples de lapins existant deux mois auparavant. Ce nouveau nombre de naissances s'ajoute au nombre de couples de lapins existants, c'est à dire au nombre de couple de lapins du mois précédent.

mois 0	1	1
mois 1	1	1
mois 2	1+1	2
mois 3	2+1	3
mois 4	3+2	5
mois 5	5+3	8
mois 6	8+5	13
mois 7	13+8	21
mois 8	21+13	34
mois 9	34+21	55
mois 10	55+34	89
mois 11	89+55	144

Dans le tableau précédent, le nombre de lapins qui existent au $7^{éme}$ mois (mois 6) est égale 5 (nombre de couples de lapins exustant il y a deux mois et qui correpond au nombre de nouvelle naissances) additionné de 8 (nombre de couples de lapins existant le mois précédent), soit 5+8, c'est à dire 13.

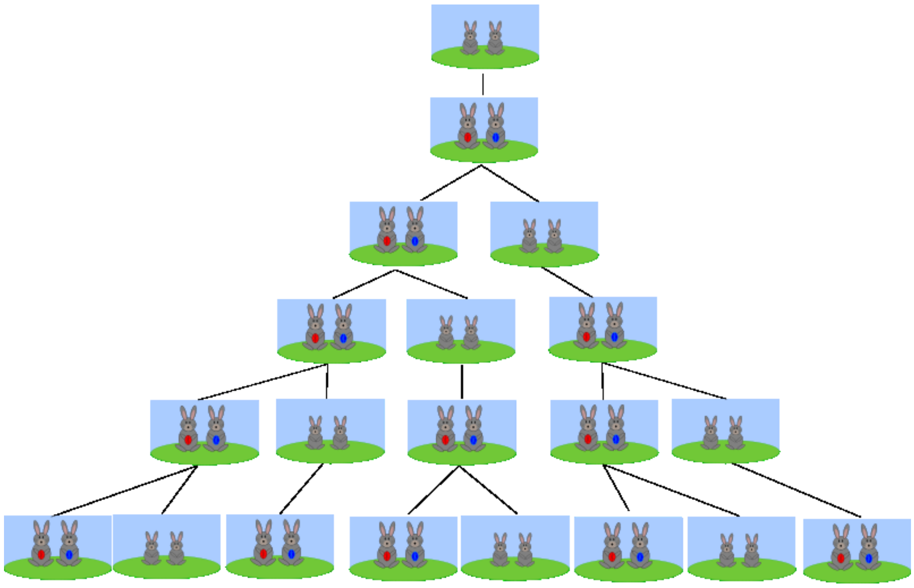

FIGURE 3.2 – Croissance des lapins de Fibonacci

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, F_0 = 1, F_1 = 2, 0 \leq n \leq 10.$$

Cette suite de nombre s'appelle la suite de Fibonacci.

La suite de Fibonacci est une suite de nombres dont chaque terme est la somme des deux précédents.

3.1.1 Résolution l'équation aux différences

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, F_0 = 1, F_1 = 2, 0 \leq n \leq 10$$

$$F_{n+2} - F_{n+1} - F_n = 0.$$

L'équation caractéristique est

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

les racines sont

$$\lambda_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

la solution générale

$$F_n = a_1 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n + a_2 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

les constantes a_1 et a_2 sont déterminées par les conditions initiales comme suite :

$$F_0 = a_1 + a_2 = 1$$

$$F_1 = a_1 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) + a_2 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) = 2.$$

En résolvant ce systéme à deux équation et deux inconnues, on obtient

$$a_1 = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \; et \; a_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}.$$

La solution finale est alors

$$F_n = \left\{ \frac{-3 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{3 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n \right\}.$$

3.2 Propagation des plantes annuelles

Notre objectif ici est de développer un modèle mathématique qui décrit le nombre de plantes dans n'importe quelle génération désiré. Il sait que les plantes produisent des graines à la fin de la saison de croissance (par exemple Août), après quoi ils meurent. En outre, seule une fraction de ces graines survivent à l'hiver, et ceux qui survivent germent au début de la saison (mai), donnant lieu à une nouvelle génération de centrales.

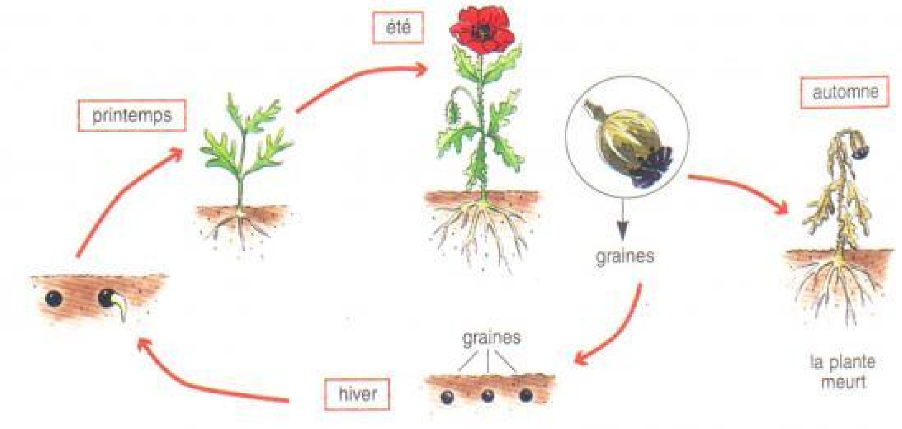

FIGURE 3.3 – Propagation des plantes annuelles

Soit

γ = nombre de graines produites par plante en Août,

α = fraction d'un ans graines qui germent en mai,

β = fraction de deux ans graines qui germent en mai,

σ = fraction de graines qui survivent à un hiver donné.

Si $p(n)$ désigne le nombre de plantes dans la génération n, alors

$$p(n) = \begin{pmatrix} \text{plantes d'un année} \\ \text{graines} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{plantes de deux ans} \\ \text{graines} \end{pmatrix},$$

$$p(n) = \alpha s_1(n) + \beta s_2(n), \tag{3.1}$$

où $s_1(n)$ (respectivement, $s_2(n)$) est le nombre de une ans (deux ans)

graines en Avril (avant la germination). Observer que le nombre de graines

à gauche après la germination peut être écrite comme

$$graines\ gauche = \begin{pmatrix} \text{fraction} \\ \text{pas germé} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \text{nombre initial} \\ \text{des graines en Avril} \end{pmatrix}.$$

Cela donne deux équations :

$$\tilde{s}_1(n) = (1 - \alpha)s_1(n), \tag{3.2}$$

$$\tilde{s}_2(n) = (1 - \beta)s_2(n), \tag{3.3}$$

où $\tilde{s}_1(n)$ (respectivement, $\tilde{s}_2(n)$) est le nombre d'un an (deux ans)

graines quitté en mai après certains ont germé. De nouvelles semences $s_0(n)$ (0 ans)

sont produites en Août (Figure 1) au taux de γ par plante,

$$s_0(n) = \gamma p(n). \tag{3.4}$$

Après l'hiver, les graines de $s_0(n)$ qui étaient nouveaux dans la génération n sera d'un an dans la prochaine génération $n + 1$, et une fraction $\sigma s_0(n)$ d'entre eux survivront. d'où

$$s_1(n + 1) = \sigma s_0(n)$$

par la formule (3.4), on a

$$s_1(n + 1) = \sigma \gamma p(n) \tag{3.5}$$

de même

$$s_2(n+1) = \sigma\tilde{s}_1(n)$$

qui donne, d'aprés (3.2)

$$s_2(n+1) = \sigma(1-\alpha)s_1(n)$$

$$s_2(n+1) = \sigma^2\gamma(1-\alpha)p(n-1). \tag{3.6}$$

On remplace par $s_1(n+1)$, $s_2(n+1)$ dans (3.5) et (3.6) dans (3.1) obtient

$$p(n+1) = \alpha\gamma\sigma p(n) + \beta\gamma\sigma^2(1-\alpha)p(n-1)$$

où

$$p(n+2) = \alpha\gamma\sigma p(n+1) + \beta\gamma\sigma^2(1-\alpha)p(n). \tag{3.7}$$

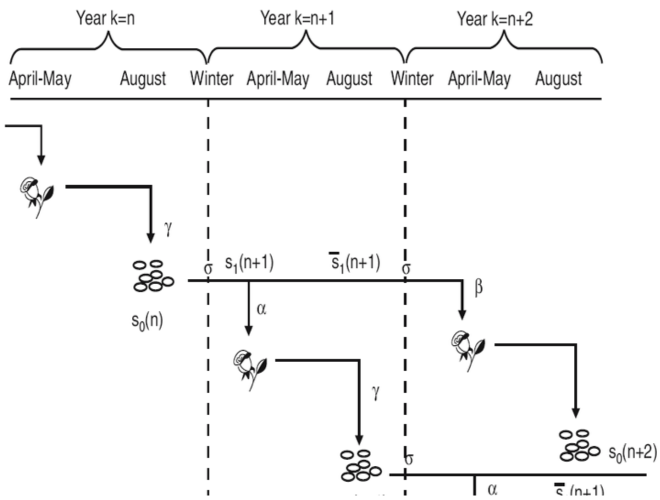

FIGURE 3.4 – Croissance des plantes annuelles

3.2.1 Résolution l'équation aux différence

L'équation caractéristique de (3.7) donne par

$$\lambda^2 - \alpha\gamma\sigma\lambda - \beta\gamma\sigma^2(1-\alpha) = 0$$

les racines sont

$$\lambda_1 = \frac{\alpha\gamma\sigma}{2}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{4\beta}{\gamma\alpha^2}(1-\alpha)}\right]$$

$$\lambda_2 = \frac{\alpha\gamma\sigma}{2}\left[1 - \sqrt{1 + \frac{4\beta}{\gamma\alpha^2}(1-\alpha)}\right].$$

On remarque que λ_1 et λ_2 sont des racines réel, tel que $1-\alpha > 0$. En on autre $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 < 0$. Assurent propagation (i.e., p(n) augmentation indéfiniment quand $n \to \infty$), nous devons avoir $\lambda_1 > 0$. Nous n'allons pas faire le même avec λ_2, puisque c'est négatif et même à oscillation de fluctuation peu désirée dans la taille de la population d'usine (de plante).

Donc

$$\frac{\alpha\gamma\sigma}{2}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{4\beta}{\gamma\alpha^2}(1-\alpha)}\right] > 1,$$

où

$$\frac{\alpha\gamma\sigma}{2}\sqrt{1 + \frac{4\beta(1-\alpha)}{\gamma\alpha^2}} > 1 - \frac{\alpha\gamma\sigma}{2}.$$

D'aprés la simplification on trouve

$$\gamma > \frac{1}{\alpha\sigma + \beta\sigma^2(1-\alpha)}. \tag{3.8}$$

Si $\beta = 0$, avec, si n'est pas plantes de deux ans graines germent dans Mai, et la condition (3.8) sera

$$\gamma > \frac{1}{\alpha\sigma}. \tag{3.9}$$

La condition (3.9) dit que propagation d'usine (de plante) arrive si le production de la fraction de graines produites par usine (plante) dans fraction d'Août. De graines d'une ans cela germination dans Mai et la fraction de graine qui survivent un hiver donné excède 1.

Bibliographie

[1] E. Camozis, G. Ladas. *Dynamics of third-order Rational Difference Equations with open Problems and Conjecteurs*, Taylor & Francis Group, LLC. 2008.

[2] S. Elaydi. *An Introduction to Difference Equations*. Springer Science+Business Media, Inc. USA. 2005.

[3] S. Elaydi, J. Cushing, R. Lasser, V. Papageorgiou, A. Ruffing, W. Van Assche. *Difference Equations Special Functions and Orthogonal Polynomials*, Word Scientific Publishing Go, pte. Ltd. 2007.

[4] E. A. Grove, G. Ladas. *Periodicities in Nonlinear Difference Equations*, CRC press. 2005.

[5] V. L kocis, G. Ladas. *Global Behavior of Non linear Difference Equations of Higher Order with Applications*, Kluwer Acadimec Publishers, Dordrecht, Boston, London. 1993.

[6] M. R. S Kulenovic, G. Ladas. *Dynamics of second order rational difference equations*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton London New York Washington, D. C. 2002.

Résumé

Le présent travail est consacré à l'étude des équations aux différences linéaires, nous donnons des définitions et résultats généraux et les méthodes des résolutions de ce type d'équations et on présente la théorie de la stabilité et enfin on donne quelques applications en biologie.

Mots clés: équation aux différences linéaire, stabilité, point d'équilibre.

Abstract

In this work we study the linear differences equations, we give basic definitions and general results and method of resolution of such equations and presents the theory of stability, finally we give some applications in biology.

Key words: linear difference equation, stability, equilibrium point.

ملخص

نقوم في هذا العمل بدراسة معادلات الفروق الخطية وذلك بإعطاء تعار يف و نتائج عامة وطرق حل هذا النوع من المعادلات، إضافة إلى هذا نقدم نظرية الاستقرار، و أخيرا نعطي تطبيقات واقعية لهذه المعادلات في علم البيولوجيا.

الكلمات الأساسية: معادلات الفروق الخطية، الاستقرار، نقاط التوازن.