



N° Ref :.....

Centre Universitaire de Mila

Institut des sciences et de la technologie

Département de Mathématiques et Informatique



**Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de licence en
Mathématiques**

**Préparé par :
Ben yacoub Zina
Rebai Nessrine
Ferrat Radia**

**Encadré par :
Boudjerida Nadjet**

Filière : mathématiques et Informatique

Spécialité : mathématiques

Année universitaire : 2012/2013

Remerciement

Nous remercions Allah, le tout puissant de m'avoir donné, la santé, la volonté et la patience pour l'accomplissement de cette mémoire.

Nos remerciements en deuxième temps, à toutes nos familles qui nous soutient dans les moments de pénibles comme dans les moments de joie.

Également, nous remercions M^{lle} Boudjrida Nadjet qui encadre ce mémoire et nous dirigeons et nous encourageons tout le long du travail.

Un grand remerciement à mes enseignants au département des sciences et technologie surtout, les enseignants des mathématique et informatique et tous les membres du département des sciences et technologie du centre universitaire de Mila.

Enfin, nous exprimons nos plus remerciements à toute personne qui nous a aidé à élaborer ce travail de proche ou de loin.

Ben yakoub Zina

Rebai Nessrine

Ferrat Radia

Dédicace

**JE DEDIE CE MODESTE TRAVAIL EN SIGNE DE RECONNAISSANCE ET DE
RESPECT**

À MON MARIE ZAKI QUI EST TOUJOURS À MES COTÉS .

À MA SOURCE DE TENDRESSE, MA CHÈRE MÈRE HABIBA ET DAWIA .

À MON EXEMPLAIRE, MON CHÈRE PÈRE MOHAMED.

À MON ESPOIRE ET MA SŒUR AFAFE.

**À TOUT LA FAMILLE KAIDI SURTOUT : MANEL, RAYAN, LOKMAN,
LAARBI.**

À MES PETITS AMOURS : MIESSAM, MARAM.

**À MES AMIES QUI VIVAIENT AVEC MOI DES PÉRIODES TANT
ACTIVEMENT QUE PASSIVEMENT SURTOUT : ASMA, SELWA, HANAN.**

FERRAT RADIA

Dédicace

Je dédie ce modeste travail en signe de reconnaissance et de respect

A ma source de tendresse, ma chère mère FATIMA.

A mon exemplaire, mon chère père ABD ELWAHAB.

*A mes grands pères MOHAMED, IBRAHIM ,
et mes grandes mères SAADA et ZAHRA (ALLAH
YARHAMHEM).*

A mon espoir AMEL, qui est ma sœur jumelle .

*A mes frères SOUFIANE et sa conjointe IBTISSAM,
HAMZA et sa conjointe AMEL, et mon chère AHMED .*

*A mes sœurs AIDA et SOUMIA qui étaient toujours à mes
cotés, merci mes sœurs.*

A mon oncle TAHER et ma deuxième maman BOUBA.

*A mon oncle SALEH, tante NAIMA et mes amours
MOHAMED et CHOUCOU .*

*A mes petits amours : MOUHAMED, FAROUK, SOHAYB,
FIRAS, HIBAT ELRAHMAN, FADI, RAZAN, AMINE.*

A mes cousines : SIHAM, WISSAM, NASIRA, IBTISSEM .

*A mes amies qui vivaient avec moi des périodes tant
activement que passivement surtout : ZIZOU,*

*NESSRINE, SELMA, MERIEM (2), KANZA, AFAF (2),
KHADIDJA, LAMIA, AMINA, YASMIN, RANA, RADIA.
Et à toute la famille BEN YACOUB, YACOUB et LALAMA .*

BEN YACOUB ZINA

Dédicace

Je dédie ce travail en signe de reconnaissance et de respect

A ma source de tendresse, ma chère mère Fahima .

A mon exemplaire, mon chère père Nouar (Allah yrahmo).

A mes grands pères Ali (Allah yrahmo), Tounssi, et mes grandes mères Fatma et Zoulikha.

A mes frères Abd Erraouf et Aymen.

A mes cousins : Ali, Ayoub, Anis, Yasmine, Zinou.

A mes cousines : Ibtissem, Imane (2), Hadjer, Selma, Safia, Ines (2), Ilham, Amel, Nihad, Meriem, Ahlam, Fatima .

A mon oncle et mon deuxième père Abd Elhakim et ma deuxième maman Randjia.

A toute la famille Zamouri surtout : Mosbah, Mohamed, Azddine, Abd Elhamid, Khaled, Kamel, Abd Eldjalil .

A mes oncles Djamel et Naaman.

A mes tantes : Hayat, Ghania (2), Habiba, Malika, Laila, Souad (4), Noura, Nadjah, Simoucha, Dalila, Hasina, Nasiha.

A mes petits amours : Adem, Saif Elislam, Iyad, Asil, Anes, Salah, Zaid, Mosaab, Alaa, Hind, Israa.

A mes amies qui vivaient avec moi des périodes tant activement que passivement surtout: Mimi, Zina, Khadidja, Lamia, Amina,

***Meriem, Selma (2), Afaf (2), Kenza, Tawes, Yasmina, Rana, Radia,
Fatiha, Razika.***

Et a toute la famille Rebai et Guenifi.

Rebai Nessrine

Table des matières

Introduction Générale	3
1 préliminaires	5
1.1 Généralités sur la théorie de la mesure	5
1.2 Généralités sur la topologie	8
2 l'intégrale de Riemann et de Lebesgue	10
2.1 l'intégrale de Riemann	10
2.1.1 Fonctions intégrables au sens de Riemann	11
2.2 L'intégrale de Lebesgue	12
2.2.1 Fonctions intégrables au sens de Lebesgue	12
2.2.2 Comparaison entre l'intégrale de Riemann et l'intégrale de Lebesgue	14
3 les espaces L^p	18
3.1 Construction et propriétés (Généralité sur les espaces $\mathcal{L}^p$ et L^p)	18
3.1.1 Espace $\mathcal{L}^p$	18
3.1.2 Espace L^p	19
3.1.3 Espace $L^p_{loc}(X)$	19
3.2 Inégalités	20
3.2.1 Inégalité de Hölder	20
3.2.2 Inégalité de Minkowski	21
3.3 Réflexivité-Séparabilité-Dualité L^p	23
3.4 Comparaison entre deux espaces L^p	24
3.5 Mode de convergence	25
3.5.1 Convergence ponctuelle	25
3.5.2 Convergence uniforme	25
3.5.3 Convergence presque partout	25
3.5.4 Convergence presque uniforme	25
3.5.5 Convergence en mesure	26

3.5.6	Convergence en norme (forte)	26
3.5.7	Convergence faible	26
3.5.8	Comparaison entre les modes de convergence	26
4	Applications des espaces L^p	29
4.1	Produit des espaces de Lebesgue	29
4.1.1	Théorème de Fubini	29
4.2	Transformation de Fourier	30
4.3	La convolution	30
4.4	Distribution	30
	Bibliographie	31

Introduction Générale

A la fin du 19 siècle, les limitations de la théorie d'intégration de **Riemann** deviennent apparentes et plusieurs mathématiciens. Célèbres (Jordan, Borel, Young, ...) se mettent en devoir de la généraliser. C'est finalement la théorie de **Lebesgue**, exposée dans une fondatrice de 1901, puis développée à partir du concept de mesure, introduit par Borel vers 1895.

La théorie de l'intégration de **Lebesgue** permet de définir des espaces fonctionnels, ces espaces dits de **Lebesgue** ou espaces L^p ont été introduits et étudiés par **Fisher-Riesz**, ils consistent en l'ensemble des fonctions f , tels que pour $1 \leq p \leq \infty$, $|f|^p$ soit **Lebesgue**-intégrable.

Dès le début, il y a une tendance très forte à traiter ces espaces indépendamment de la théorie de l'intégration sous-jacente et à fonder leur étude sur des inégalités générales concernant les normes, les inégalités de **Clarskon** montrent jusqu'où on peut aller dans cette direction. L'inégalité de **Schwartz** pour les intégrales est une extension de l'inégalité de **Cauchy** pour les sommes **Riesz** étendue aux intégrales, l'inégalité de **Minkowski** pour les sommes et l'inégalité de **Hölder** pour les séries.

L'étude des espaces L^p est intéressante du point de vue de l'analyse fonctionnelle et la théorie de l'intégration.

Ce mémoire contient quatre chapitres, le premier est consacré aux notions de base qu'on va les utiliser dans ce travail.

Le deuxième chapitre traite la motivation de l'intégrale de **Riemann** et **Lebesgue**.

Le troisième chapitre discute deux sections la construction d'espace L^p et ses propriétés et les différents modes de convergence.

Et dans le dernier chapitre propose quelques applications de ces espaces.

Notation

$\mathbb{N}$: l'ensemble des nombres naturels.

$\mathbb{R}$: l'ensemble des nombres réelles.

$\mathbb{Q}$: l'ensemble des nombres rationnelles.

$\mathbb{C}$: l'ensemble des nombres complexes.

$\langle ., . \rangle$: le produit scalaire.

$\mathbb{R}_+ : [0, +\infty[$.

$\overline{\mathbb{R}_+} : [0, +\infty]$.

$\mathbb{R}^n$: espace euclidien réel de dimension n .

$\mathcal{B}(\mathbb{R})$: les tribus boréliennes.

(A, X) : espace mesurable.

(A, X, μ) : espace mesuré.

R_* : l'intégrale inférieure.

R^* : l'intégrale supérieure.

P_n : la subdivision.

$\overline{S}$: la somme supérieure de Darboux.

$\underline{S}$: la somme inférieure de Darboux.

$D(\Omega)$ (ou C_c^∞) : l'ensemble des fonctions qui sont C^∞ sur Ω .

$D'(\Omega)$: l'ensemble des distributions définie $D(\Omega)$.

Chapitre 1

préliminaires

Dans ce chapitre nous rappelons quelques généralités sur le mesure et la topologie qu'on aura utilisé par la suite.

1.1 Généralités sur la théorie de la mesure

Définition 1.1.1 (tribu) *une famille non vide T de partie de E est une **tribu** sur E lorsqu'elle vérifie les trois conditions :*

- i) $T \in E$.
- ii) $\forall A \in T$, alors : $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n) \in T$.
- iii) $\forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in T$, alors : $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n) \in T$.

De cette définition, nous déduisons :

- $\emptyset \in T$.
- T est stable par intersection dénombrable i.e :
Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}$ est une suite d'éléments de T alors : $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (A_n) \in T$.
- Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in T$, alors : $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n) \in T$.
- Si $A, B \in T$ alors : $A \setminus B = A \cap B^C \in T$ et $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) \in T$.

Définition 1.1.2 *On appelle espace mesurable le couple (E, T) où E est une **tribu** T sur ensemble E .*

Définition 1.1.3 *On appelle espace mesuré le triplet (E, T, μ) où μ une mesure sur l'espace mesurable (E, T) .*

Définition 1.1.4 (tribu borélienne) Si E un espace topologique. On appelle **tribu borélienne** et on la note $B(E)$ la tribu engendrée par l'ensemble des ouverts de E .

Définition 1.1.5 (cas particulier important : tribu borélien)

Si l'ensemble E possède une structure topologique la notion de tribu engendrée permet de définir la plus petite tribu adaptée à cette structure.

Définition 1.1.6 (tribu produit)

Soit (X, A) et (Y, B) des espaces mesurables, on appelle **tribu produit** de A et B sur $X \times Y$, et on note $A \otimes B$ la tribu engendrée par $\{a \times b / a \in A, b \in B\}$.

L'espace $(X \times Y, A \otimes B)$ est appelée l'espace mesurable produit de (X, A) et (Y, B) .

Définition 1.1.7 (mesure positive)

Soit (E, T) espace mesurable, on appelle mesure positive sur (E, T) toute application μ de T dans $[0, +\infty[$ vérifiant les deux conditions :

i) $\mu(\emptyset) = 0$

ii) Pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de T deux à deux disjoints, on a :

$$\mu(A_n)_{n \in \mathbb{N}} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$$

donc (E, T, μ) est appelé un espace mesuré.

Exemple 1.1.8 Soit (E, T) espace mesurable, $B \in T$ et μ mesure sur (E, T) donc :

$v(A) = \mu(A \cap B)$ est une mesure positive car :

$$v \text{ mesure} \iff \begin{cases} v(\emptyset) = 0 \\ v(\cup A_n) = \sum v(A_n) \end{cases}$$

• $v(\emptyset) = \mu(\emptyset \cap B) = \mu(\emptyset) = 0$ (car μ est une mesure).

• pour (A_n) une suite d'éléments de T deux à deux disjoints, on a :

$$\begin{aligned} v(\cup A_n) &= \mu((\cup A_n) \cap B) = \mu(\cup (A_n \cap B)) \\ &= \sum \mu(A_n \cap B) = \sum v(A_n) \quad (\text{car mesure}) \end{aligned}$$

Alors : v est une mesure positive.

Remarque 1.1.9 La deuxième condition de cette définition s'appelle s'additivité.

Définition 1.1.10 μ est dite δ -finie, s'il existe une suite croissante $(E_n)_{n \leq 1}$ telle que :

$$\mu(E_n) < \infty, \forall n \geq 1.$$

Définition 1.1.11 (les ensembles négligeables)

Les ensembles négligeables jouent un rôle important dans la théorie de la mesure et de l'intégration.

Définition 1.1.12 Soit (E, T, μ) une espace mesuré, on dit qu'une partie N de E est μ -négligeable s'il existe $A \in T$ telle que : $N \subset A$ telle que : A un ensemble de mesure nulle ($\mu(A) = 0$).

- Toute partie d'un ensemble μ -négligeable est μ -négligeable.
- Soit f une fonction mesurable positive, une condition nécessaire et suffisant pour que : $\int f d\mu = 0$ est que f soit nulle presque partout.
- Soit f une fonction mesurable positive, si f est intégrable alors f est finie presque partout.

Définition 1.1.13 (espaces mesure complet)

Si toutes les parties de E μ -négligeable sont mesurables, on dit que l'espace (E, T, μ) est complet, on note :

$$N_n = \{A \subset X, A \text{ négligeables}\} \text{ On a : } (E, T, \mu) \text{ complet} \iff N_n \subset T.$$

Définition 1.1.14 Soit $(x, A), (y, B)$ deux espace mesurable. Une application f de x dans y est dite mesurable si : $\forall b \in B : f^{-1}(b) \in A$.

Théorème 1.1.15 Soient (E, T) et (E', T') deux espaces mesurables S' un sous- ensemble générateur de T' et f une application de E dans E' , alors : f est mesurable si et seulement si $f^{-1}(S') \in T$.

Proposition 1.1.16 soient $(E, T), (E', T')$ et (E'', T'') trois espaces mesurables.

Soient $f : E \rightarrow E'(T, T')$ mesurable, $g : E' \rightarrow E''(T, T'')$ mesurable.

Alors : $g \circ f$ est (T, T'') mesurable.

1.2 Généralités sur la topologie

Définition 1.2.1 (*ensemble dénombrable*)

Un ensemble A est dit dénombrable s'il est en bijection avec une partie finie ou infinie de $\mathbb{N}$.

Définition 1.2.2 (*espace vectoriels*)

Soit v un ensemble non vide, $\mathbb{K}$ est un corps.

v est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ si :

1) $(v, +)$ est un group abélien (group commutative)

2) $\exists$ une application : $\mathbb{K} \times V \longrightarrow V$
 $(\lambda v) \longrightarrow \lambda v$

vérifiant :

- $\forall v \in V : 1 \cdot v = v$ (1 est l'élément neutre dans $\mathbb{K}$).
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall v_1, v_2 \in V : \lambda(v_1 + v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2$.
- $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}, \forall v \in V : (\lambda_1 + \lambda_2)v = \lambda_1 v + \lambda_2 v$.
- $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}, \forall v \in V : \lambda_1(\lambda_2 v) = (\lambda_1 \lambda_2)v$.

Définition 1.2.3 (*produit scalaire*)

On appelle produit scalaire sur un espace vectoriel réel E (resp complexe) une application :

$$f : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}(\text{ou } \mathbb{C}),$$

qui possède les propriétés suivantes :

- $f(x + x', y) = f(x, y) + f(x', y)$.
- $f(\lambda x, y) = \lambda f(x, y)$.
- $f(y, x) = \overline{f(x, y)}$.
- $f(x, x) \geq 0$.
- $f(x, x) = 0 \iff x = 0$.

Définition 1.2.4 (*espace vectoriel normés*)

Une norme sur E est une fonction $N : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$, vérifiant les propriétés suivantes :

- $N(x) = 0 \iff x = 0$.
- $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$.
- $\forall x, y \in E, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$.

Définition 1.2.5 (Application linéaire continues dans des e-v-n)

• f est dite linéaire si :

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall x, y \in E : f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

• Si $F = \mathbb{K}$, f est appelée forme linéaire sur E .

L'ensemble des applications linéaire de E dans F et noté $L(E, F)$.

$(L(E, F), +, \cdot)$ est un e-v sur $\mathbb{K}$

$$+ : L(E, F) \times L(E, F) \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$(f, g) \longrightarrow (f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

$$\cdot : \mathbb{K} \times L(E, F) \longrightarrow L(E, F)$$

$$(\lambda f) \longrightarrow (\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

Définition 1.2.6 (espace de préhilbertien)

Un espace préhilbertien est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire.

Définition 1.2.7 (suite converge)

On dit que la suite (u_n) converge vers $u \in E$, si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow \|u_n - u\| < \varepsilon.$$

On écrit alors : $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$.

Définition 1.2.8 (suite de Cauchy)

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite de **Cauchy** si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall p, q \in \mathbb{N}, p, q \geq n_0 \Rightarrow \|u_p - u_q\| < \varepsilon.$$

Définition 1.2.9 (espace de Hilbert)

Un espace préhilbertien complet pour la norme associé au produit scalaire est appelé espace de **Hilbert**.

Définition 1.2.10 $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur un ensemble $A \neq \emptyset$ si :

$$1-\forall x \in A : x\mathcal{R}x \quad (\text{Réflexive})$$

$$2-\forall x, y \in A : x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$$

$$3-\forall x, y, z \in A : x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$$

Pour $x \in A$ la classe d'équivalence de x est notée :

$$x = \bar{x} = \{y \in A : x\mathcal{R}y\}.$$

L'ensemble quotient noté : $A/\mathcal{R}$ contient les classes d'équivalence modulo.

Chapitre 2

l'intégrale de Riemann et de Lebesgue

Dans ce chapitre on présente la notion de l'intégrale de Lebesgue et de Riemann et la comparaison entre les deux intégrales.

2.1 l'intégrale de Riemann

Définition 2.1.1 (l'intégrale de Riemann)

Soit $[a, b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction quelconque. Pour toute subdivision

$P_n = [a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b]$ de cet intervalle on définit la somme inférieure (inf) et la somme supérieure (sup) de **Darboux** :

$$\underline{S}(f, P_n) = \sum_{i=1}^n \inf_{x_{i-1} \leq t \leq x_i} f(t) (x_i - x_{i-1})$$

et

$$\overline{S}(f, P_n) = \sum_{i=1}^n \sup_{x_{i-1} \leq t \leq x_i} f(t) (x_i - x_{i-1})$$

-On définit l'intégrale inférieure :

$$R_*(f) = \int_a^b f(x) dx = \sup_{P_n \in P} \underline{S}(f, P_n)$$

et l'intégrale supérieure :

$$R^*(f) = \int_a^b f(x) dx = \inf_{P_n \in P} \overline{S}(f, P_n)$$

avec P est l'ensemble de toute les partitions de l'intervale $[a, b]$

Définition 2.1.2 On dit que f est intégrable au sens de **Riemann** ssi :

$$R^*(f) = R_*(f).$$

et on note l'intégrale de **Riemann** avec :

$$R(f) = \int_a^b f(x) dx.$$

Proposition 2.1.3 (de l'intégrale de Riemann)

• Une fonction f qui est intégrable au sens de **Riemann** sur un intervalle $[a, b]$ est bornée sur cet intervalle.

• Tout fonction continue est intégrable.

• Si f est intégrable alors $|f|$ aussi.

Plus généralement, si f est intégrable et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors $g \circ f$ est intégrable.

• Tout fonction monotone (croissante ou décroissante) est intégrable au sens de **Riemann**.

Proposition 2.1.4 f est intégrable au sens de **Riemann** sur $[a, b]$ ssi f est bornée et continue en dehors d'un ensemble de mesure nulle.

2.1.1 Fonctions intégrables au sens de Riemann

Fonction en escalier

On appelle fonction en **escalier** tout fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ pour laquelle il existe une subdivision $P_n = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$ du segment $[a, b]$ telle que la fonction soit constante sur chacun des intervalles $[x_{i-1}, x_i[$ on a alors :

$$\overline{S}(P_n, f) = \underline{S}(P_n, f) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(x_{i-1})$$

ce qui prouve que la fonction est intégrable au sens de **Riemann** et donne la valeur de son intégrale :

$$\int_a^b f(x) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(x_{i-1}).$$

Fonctions monotones

Une fonction monotone croissante ou décroissante est intégrable au sens de Riemann.

D'abord, une telle fonction est bornée. Supposons en effet que f soit une fonction croissante pour toute $x \in [a, b]$ on a :

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b).$$

D'autre part on a :

$$\omega(f : [x_{i-1}, x_i]) = \sup_{x \in P_n} f(x) - \inf_{x \in P_n} f(x)$$

donc :

$$\omega(f : [x_{i-1}, x_i]) \leq f(x_i) - f(x_{i-1})$$

si :

$P_n = (x_i)$ est une subdivision de pas $\leq \varepsilon$.

On a donc :

$$\overline{S} - \underline{S} \leq \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) (f(x_i) - f(x_{i-1}))$$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{i=1}^n \varepsilon (f(x_i) - f(x_{i-1})) \\ &= \varepsilon (f(a) - f(b)) \end{aligned}$$

donc la fonction f est intégrable.

2.2 L'intégrale de Lebesgue

Définition 2.2.1 Soit X un ensemble mesurable de **Lebesgue** de mesure finie,

$f : x \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable et bornée m son infimum et M son supremum, soit $[a, b]$ un intervalle qui contient (m, M) .

On considère la partition $p_n = (a = y_0 < y_1 < \dots < y_n = b)$

$$Tp = \sum_{k=0}^{n-1} y_{k+1} \mu(X_k)$$

$$Sp = \sum_{k=0}^{n-1} y_k \mu(X_k)$$

$$\text{ou } X_k = \{x : y_k < f(x) < y_{k+1}\} \quad X = \bigcup_{k=1}^{n-1} X_k$$

et les X_k sont disjoints deux à deux de sorte que

$$\mu(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \mu(X_k)$$

on pose que : $u = \sup(Sp)$ et $v = \inf(Tp)$

on dit que f est intégrable au sens de **Lebesgue** si : $u = v$

on note l'intégrale de **Lebesgue** avec : $\int_X f(x) dx$.

2.2.1 Fonctions intégrables au sens de Lebesgue

Fonctions étagées

Soit X un sous espace mesurable de $\mathbb{R}$, on notera χ_x la fonction caractéristique de X c.à.d : la fonction qui prend la valeur 1 sur tout les élément de X et 0 sinon.

On appelle fonction étagée toute fonction de la forme :

$$f(x) = \sum_{i=0}^n y_i \chi_{X_i}$$

avec : $n \in \mathbb{N}$

Les y_i des réels.

Les X_i des ensembles mesurables deux à deux disjoints.

f ne prend qu'un nombre fini de valeurs différentes.

Si les X_i sont des intervalles alors f est dit en escalier.

Fonctions étagées positives

Soit f une fonction étagée positive (c.à.d $y_i \in \mathbb{R}_+$). on appelle intégrale de **Lebesgue** le nombre :

$$\int f d\mu = \sum_{i=0}^n y_i \mu(X_i)$$

avec les précisions suivantes :

Si $y_i = 0$ et la mesure de X_i est infinie, alors $y_i \mu(X_i) = 0$.

$\int f d\mu \geq 0$ (mais peut être infinie).

Proposition 2.2.2 *L'intégrale de **Lebesgue** d'une fonction positive étagée est finie ssi : $\mu(\{x / f(x) \neq 0\})$ est finie.*

Définition 2.2.3 *Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, on définit l'intégrale de f sur*

$$\int_A f d\mu = \int f \chi_A d\mu = \sum_{i=0}^n y_i \mu(X_i \cap A)$$

Exemple 2.2.4 *On considère f_D la fonction de **Dirichlet**. On peut pour tout $x \in \mathbb{R}$:*

$$f_D(x) = 0 \cdot \chi_{Q \cap [0,1]} + 1 \cdot \chi_{(R/Q) \cap [0,1]}$$

si on prend $A = [0, 1]$ alors :

$$\int_A f d\mu = 0 \cdot \mu(Q \cap [0, 1] \cap A) + 1 \cdot \mu((R \setminus Q) \cap [0, 1] \cap A)$$

d'où $\int_A f d\mu = 1$

Fonctions réelles positives

Soit f une fonction de **Lebesgue**-mesurable positive, on définit $\sum(f)$ l'ensemble des fonctions étagées positives inférieures ou égale à f .

Définition 2.2.5 *On appelle intégrale de **Lebesgue** de f le nombre éventuellement infini, tel que :*

$$\int f d\mu = \sup_{e \in \sum(f)} \int e d\mu.$$

Définition 2.2.6 *La fonction f est intégrable (sommable) au sens de **Lebesgue** si $\int f d\mu$ est finie.*

Fonctions réelles

Soit f une fonction à valeurs réelles. on peut définir deux fonctions auxiliaires f^+ et f^- par :

$$f^+ = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad f^- = \begin{cases} -f(x) & \text{si } f(x) \leq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

on a alors : $f = f^+ - f^-$

Définition 2.2.7 Une fonction à valeurs réelles f est sommable **ssi** les deux fonctions f^+ et f^- sont sommables, et on a :

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$$

Remarque 2.2.8 Si $\int f^+ d\mu = +\infty$ et $\int f^- d\mu = +\infty$ alors : $\int f d\mu$ n'existe pas.

Si $\int f^+ d\mu = +\infty$ (resp f^-) et $\int f^- d\mu$ est finie (resp f^+) alors : $\int f d\mu = +\infty$ (resp $-\infty$).

Fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$

D'après ce qui a été écrit précédemment, parler de l'intégrale de **Lebesgue** de la partie réelle de f et de la partie imaginaire de f à un sens. Puisque ces deux fonctions sont des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$, sans le cas où $\text{Re}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont sommables, on définit l'intégrale de f comme :

$$\int f d\mu = \int \text{Re}(f) d\mu + i \int \text{Im}(f) d\mu.$$

2.2.2 Comparaison entre l'intégrale de Riemann et l'intégrale de Lebesgue

1-Si f est une fonction **Riemann**-intégrable sur l'intervalle borné $[a, b]$, ($b > a$) elle est **Lebesgue**-intégrable :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{[a,b]} f d\mu$$

2-Si f est **Lebesgue**-intégrable sur $[a, b]$ elle n'est pas en général, **Riemann**-intégrable.

$$f(x) = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in Q \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

on a : $\mu(Q) = 0$ et $f(x) = 0, \forall x \in C_{\mathbb{R}}^Q$

$$\Rightarrow f = 0\mu \text{ p.p}$$

danc : f intégrable au sens de **Lebesgue**.

Soit $P_n = \{0 = x_0, x_1, \dots, x_n = 1\}$ une partition de l'intervalle $[0, 1]$.

$\forall 1 \leq i \leq n, \exists y \in [x_{i-1}, x_i[$ et $y \notin Q$ (la densité de $C_{\mathbb{R}}^Q$ dans $\mathbb{R}$).

$$\Rightarrow f(x) = 0$$

$$\begin{aligned}\underline{S}(f) &= \sum_{i=1}^n \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i[} f(x) (x_i - x_{i-1}) = 0 \\ &\Rightarrow R_*(f) \leq 0\end{aligned}$$

D'autre part : $\forall 1 \leq i \leq n, \exists z_i \in [x_{i-1}, x_i[$ et $z_i \in Q$ (densité de Q dans $\mathbb{R}$).

$$\begin{aligned}\overline{S}(f) &= \sum_{i=1}^n \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i[} f(x) (x_i - x_{i-1}) \geq f(z_i) (x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n 1 \cdot (x_i - x_{i-1}) = 1 \\ &\Rightarrow R_*(f) \geq 1\end{aligned}$$

$R_*(f) \neq R^*(f)$ danc f n'est pas intégrable au sens de **Riemann**.

3- Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction bornée soit intégrable au sens de **Riemann** sur $[a, b]$, est qu'elle soit continue presque partout dans $[a, b]$.

Théorème 2.2.9 (convergence uniforme sur un segment)

Pour toute suite (f_n) de fonctions continues sur $[a, b]$ qui converge uniformément vers f sur $[a, b]$

$$\lim_n \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

4- L'un des avantages les plus important de **Lebesgue** préoccupé par rapport à l'intégrale de **Riemann** est la facilité avec laquelle nous pouvons passer à la limite.

Nous allons donner ici deux théorèmes les plus utilisées.

Théorème 2.2.10 (convergence monotone)

Si (f_n) une suite croissante de fonctions mesurables de X dans $[0, +\infty]$ qui converge p.p vers f on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

Théorème 2.2.11 (convergence dominée de Lebesgue)

Soit (f_n) une suite mesurable converge presque partout vers f et :

$$\exists h \in L_+^1 / \forall n \in \mathbb{N}, |f_n(x)| \leq h(x)$$

alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

avec (L_+^1) est l'ensemble des applications intégrables de $f : X \rightarrow +\infty$)

$$L_+^1 = \{f \in M(X, A) / \int_X |f| d\mu < +\infty\}$$

5- l'intégrale de **Lebesgue** est définie exactement de la même façon pour les fonctions données sur des espaces mesurés arbitraires, tandis que l'intégrale de **Riemann** est défini d'abord pour des fonctions d'une seule variable et étendue ensuite, avec les modifications

nécessaires aux fonctions de plusieurs variables. En ce qui concerne les fonctions définies sur des espaces mesurable abstraits pour elle l'intégrale de **Riemann** n'a point de sens.

6-Un autre problème avec l'intégrale de **Riemann** est qu'elle ne s'étend pas aux intervalles non bornées très facilement, si nous souhaitons une fonction f de $-\infty$ et $+\infty$ nous pouvons calculer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n f(x) dx.$$

Cependant, certaines propriétés (telle que, l'invariance par translation, le fait que l'intégrale de **Riemann** ne change pas si nous translatons l'intégrale de f) ne sont plus très difficile d'utiliser des limites conjointement avec l'intégrale. De telle intégrale sont appelées impropre, a nouveaux l'intégrale de **Lebesgue** allège ces difficultés.

7-solution du problème des primitive :

c'est par ce problème que **Lebesgue** motive sa construction dans sa note de 1901.

L'intégrale de **Riemann** permet d'intégrer des fonctions discontinues, mais ne permet pas d'intégrer n'importe quelle fonction dérivée, même bornée, si donc f est une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, il n'est pas garanti que l'identité

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x) dx \quad (2.1)$$

ait un sens.

En fait au début du siècle, divers auteurs (Voltera, Köpcke, Brodèn, Schoenflies) construisent des classes de fonctions dérivables, dont la dérivée est bornée mais non **Riemann**-intégrable.

Au contraire, dans la théorie de **Lebesgue**, la dérivation et l'intégration deviennent des opérations inverses, sous des hypothèses simples. C'est ainsi que l'identité (2.1) est automatiquement vérifiée des que f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, de dérivée bornée.

8- L'intégrale de **Lebesgue** et l'intégrale de **Riemann** deux approches différentes :

l'idée de départ de **Lebesgue** simple, comme dans de l'intégrale de **Riemann**, il s'agit d'approcher l'aire sous le graphe de la fonction par une union de rectangles.

Mais ces rectangles sont définis de manière différente dans le cas de **Riemann**, on s'intéresse aux variations de fonction sur son domaine de définition : une base étant donnée on définit le rectangle comme l'ensemble des points au-dessus de cette base, qui sont situés en-dessous de la courbe. Au contraire, dans le cas de **Lebesgue**, on définit le rectangle en fonction des valeurs de la fonction, sans jamais s'intéresser trop à l'espace de départ. Ce n'est donc pas la base du rectangle que l'on se donnera au départ, mais une variation dans les valeurs atteintes (côte "vertical").

Evidemment, on doit admettre que plusieurs rectangles partagent un même côté vertical. C'est ici que l'intégrale de **Lebesgue** va gagner toute sa complexité : alors que dans l'intégrale de **Riemann**, une brique élémentaire est un simple rectangle, dans celle

de **Lebesgue**, il pourra s'agir de plusieurs ou même d'une infinité de rectangles.

L'exemple de la fonction indicatrice Q est révélateur : bien que discontinue partout, cette fonction est très facile à décrire en fonction de ses valeurs : dans la théorie de **Riemann**, on tenterait vainement de découper le segment $[0, 1]$ en tout petit intervalles ou cette fonction ne varié guère ; dans celle de **Lebesgue**, on partage $[0, 1]$ en seulement deux morceaux qui sont assez complexes (totalement discontinus) mais sur chacun desquels la fonction est effectivement constante.

Chapitre 3

les espaces L^p

3.1 Construction et propriétés (Généralité sur les espaces $\mathcal{L}^p$ et L^p)

Dans tout ce chapitre, l'espace mesuré (X, A, μ) est fixé. Nous avons déjà rencontré l'espace $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1(X, A, \mu)$ de toutes les fonctions mesurables sur (X, A) , à valeurs réelles, qui sont μ -intégrable. Mais, plus généralement, il existe toute une famille $\mathcal{L}^p$ d'espaces de fonction mesurables.

3.1.1 Espace $\mathcal{L}^p$

Définition 3.1.1 Si $p \in [1, \infty[$, on note $\mathcal{L}^p = \mathcal{L}^p(X, A, \mu)$ l'ensemble de toutes les fonctions mesurables sur (X, A) , à valeurs réelles, telles que la fonction $|f|^p$ soit μ -intégrable. Si $f \in \mathcal{L}^p$, on pose :

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

Autrement dit : $\mathcal{L}^p(X, A, \mu) = \left\{ f : X \longrightarrow \mathbb{K}; f \text{ mesurable et } \|f\|_p < +\infty \right\}.$

Proposition 3.1.2 Chaque espace $\mathcal{L}^p$ est un espace vectoriel.

Théorème 3.1.3 L'application $f \longrightarrow \|f\|_p$ de $\mathcal{L}^p$ dans $\mathbb{R}_+$ est une semi-norme et non pas une norme car $\|f\|_p = 0 \iff f = 0 \text{ p.p et non } f = 0.$

Ce résultat suggère de décomposer l'espace $\mathcal{L}^p$ en classes d'équivalence de la manière suivante :

Nous dirons que deux fonctions f_1 et f_2 appartenant à $\mathcal{L}^p$ sont équivalentes si :

$$\|f_1 - f_2\| = 0$$

C-à-d : si f_1 et f_2 sont presque partout égales.

3.1.2 Espace L^p

On appelle L^p l'espace vectoriel quotient $\mathcal{L}^p/\mathfrak{R}$ ou $\mathfrak{R}$ est la relation d'équivalence.

$$f_1 \in \mathcal{L}^p, f_2 \in \mathcal{L}^p : f_1 \mathfrak{R} f_2 \iff \|f_1 - f_2\| = 0.$$

$f_1 \mathfrak{R} f_2$ se lit f_1 est équivalente à f_2 .

Les éléments de l'espace L^p ne sont pas des fonctions mais : des classes de fonctions.

Si $f_1 \in \mathcal{L}^p$, on note $\widehat{f}$ la classe de fonctions d'équivalence à f .

$\widehat{f}$ étant une classe de fonctions, sa valeurs en un point $x \in X$ n'est pas de sens.

On peut considérer $\widehat{f}$ comme fonction définie presque partout si aucun risque de confusion n'est à craindre, en écrire $f \in L^p$ ce qui signifie, en réalité $f \in \widehat{f}$ et $\widehat{f} \in L^p$.

Définition 3.1.4 *L'espace vectoriel $L^p(X)$ est le quotient de $\mathcal{L}^p(X)$ par la relation d'équivalence "égalité presque partout dans X ".*

Autrement dit : pour $1 < p < \infty$. On pose :

$$L^p(X) = \{f \in M_\mu(X, A) \text{ , } \int_X |p|^p d\mu < +\infty\}$$

telle que : $M_\mu(X, A) = \{\widehat{f} / f \in M(X, A)\}$.

Définition 3.1.5 (*f essentiellement bornée*)

On dit qu'une fonction f est essentiellement bornée sur X s'il existe un réel positif M tel que :

$$\mu(\{x \in X; |f(x)| \geq M\}) = 0.$$

Muni de la norme définie par :

$$\|f\|_{L^\infty(X)} = \inf \{M \geq 0; \mu(\{x \in X; |f(x)| \geq M\}) = 0\},$$

*l'espace vectoriel $L^\infty(X)$ est un espace de **Banach**.*

• Si X est fini et si $\mu(X) < \infty$, tout les espaces L^p pour $1 \leq p \leq +\infty$ sont les même.

• Si X est fini ou dénombrable, si $A = P(X)$, et si $\mu(\{x\}) > 0$ pour tout $x \in X$,

alors $L^p = \mathcal{L}^p$ pour tous p .

3.1.3 Espace $L^p_{loc}(X)$

Définition 3.1.6 *Soit X un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On dit que f est localement intégrable sur X si pour tout compact K inclus dans X , la fonction f est intégrable sur K . On note :*

$$L^1_{loc}(X) = \{f; f \in L^1(K) \text{ pour tout compact } K \subset X\}.$$

L'espace vectoriel des fonctions localement intégrables.

De même,

$$L^p_{loc}(X) = \{f; f \in L^p(K) \text{ pour tout compact } K \subset X\}.$$

Proposition 3.1.7 *Soit $q > p \geq 1$. Alors $L^q_{loc}(X) \subset L^p_{loc}(X)$.*

Soit $p \geq 1$. Alors $L^p(\mathbb{R}^n) \subset L^p_{loc}(\mathbb{R}^n) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

3.2 Inégalités

Définition 3.2.1 On dit que deux nombres p et q sont conjugués si p et q sont > 0 et si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Deux nombres réels conjugués sont > 1 .

En général 1 et ∞ sont conjugués.

3.2.1 Inégalité de Hölder

Théorème 3.2.2 Soit (X, A, μ) un espace mesuré et $f, g : X \longrightarrow \mathbb{C}$ des fonctions mesurables, p, q des exposants conjugués dans $[1, +\infty]$. Alors si :

$$f \in L^p(X, A, \mu) \text{ et } g \in L^q(X, A, \mu), \quad fg \in L^1(X, A, \mu)$$

avec :

$$\int_X |fg| d\mu \leq \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |g|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \quad (\text{inégalité de Hölder}).$$

Si $p = q = 2$ l'inégalité de **Hölder** est connue sous le nom d'inégalité de **Cauchy-Schawrtz** :

$$\int |fg| d\mu \leq \left(\int |f|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int |g|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Preuve. Pour $f, g \geq 0$.

Si p (ou q) $= +\infty$, on a $f(x) \leq \|f\|_\infty$ p.p.

D'où $f(x)g(x) \leq \|f\|_\infty g(x)$, ce qui donne en intégrant :

$$\int_X fg d\mu \leq \|f\|_\infty \int_X g d\mu = \|f\|_\infty \|g\|_1.$$

Puis si $f, g \in L^1(X, A, \mu)$, en intégrant, on obtient directement :

$$\int_X (f + g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu \iff \|f + g\|_1 = \|f\|_1 + \|g\|_1.$$

Pour f et g de signe quelconque l'égalité devient une inégalité :

Soient $p, q \neq +\infty, 1$ avec pour commencer $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$.

Si $f(x), g(x) \neq 0, +\infty$ on peut écrire $f(x)^p = \exp(u)$ et $g(x) = \exp(v)$, en prenant :

$$u = \ln(f(x)^p) \text{ et } v = \ln(g(x)^q).$$

Par convexité de $\exp$, on a alors :

$$\exp\left(\frac{1}{p}u + \frac{1}{q}v\right) \leq \frac{1}{p}\exp(u) + \frac{1}{q}\exp(v),$$

ce qui se réécrit $f(x)g(x) \leq \frac{1}{p}f(x)^p + \frac{1}{q}g(x)^q$.

L'inégalité est en fait encore vraie si $f(x)$ ou $g(x)$ vaut 0 ou $+\infty$.

En l'intégrant alors sur tout X , on a :

$$\|fg\|_1 = \int_X fg d\mu \leq \frac{1}{p} \int_X f^p d\mu + \frac{1}{q} \int_X g^q d\mu = \frac{1}{p} \|f\|_p^p + \frac{1}{q} \|g\|_q^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

car d'abord $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$ puis ensuite parce que p, q sont conjugués.

Ce qui prouve l'inégalité de **Hölder** dans ce cas.

Si $p, q \neq 1, +\infty$ et si $\|f\|_p$ et $\|g\|_q \neq 0, +\infty$ alors on considère :

$$\tilde{f} = f / \|f\|_p, \quad \tilde{g} = g / \|g\|_q.$$

On a facilement $\|\tilde{f}\|_p = \|\tilde{g}\|_q = 1$ si bien que le cas précédent donne :

$$\|\tilde{f}\tilde{g}\|_1 \leq 1 \iff \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Si $\|f\|_p = 0$ alors $f = 0$ p.p. Si bien que $\int_X fg d\mu = \|fg\|_1 = 0$ et l'inégalité cherchée se réécrit $0 \leq 0$, ce qui est vraie.

Si $\|f\|_p = +\infty$ alors il suffit de voir le cas $\|g\|_q \neq 0$ sinon on se ramène au cas précédent (avec g à la place de f).

Mais dans ce cas, l'inégalité devient une majoration par $+\infty$ ce qui est vraie. ■

3.2.2 Inégalité de Minkowski

Théorème 3.2.3 Soit (X, A, μ) un espace mesuré et $f, g : X \longrightarrow \mathbb{C}$ des fonctions mesurables, soit $p \in [1, +\infty]$. Alors si $f, g \in L^p(X, A, \mu)$:

$$\left(\int |f+g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int |g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \quad (\text{inégalité de Minkowski}).$$

Preuve. Remarquons que :

$$(f+g)^p = (f+g)(f+g)^{p-1} = f(f+g)^{p-1} + g(f+g)^{p-1}.$$

Soit q conjugué de p alors d'après l'inégalité de Hölder :

$$\begin{aligned} \int (f+g)^p d\mu &= \int f(f+g)^{p-1} d\mu + \int g(f+g)^{p-1} d\mu \\ &\leq \left(\int f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int (f+g)^{(p-1)q} d\mu\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int g^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int (f+g)^{(p-1)q} d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \left[\left(\int f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int g^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right] \left(\int (f+g)^{(p-1)q} d\mu\right)^{\frac{1}{q}}, \end{aligned}$$

comme $(p-1)q = p$ et $\frac{1}{q} = \frac{(p-1)}{p}$ on a :

$$\int (f+g)^p d\mu \leq \left[\left(\int f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int g^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right] \left(\int (f+g)^p d\mu\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

$$\|f+g\|_p^p \leq \left[\|f\|_p + \|g\|_p\right] \|f+g\|_p^{p-1} \quad (1)$$

Si $\|f+g\|_p \neq 0, +\infty$, l'inégalité de Minkowski suit en simplifiant par $\|f+g\|_p^{p-1}$ dans (1).

Si $\|f+g\|_p = 0$, l'inégalité de Minkowski est immédiate.

Si $\|f+g\|_p = +\infty$, par convexité de la fonction $x \longmapsto x^p$ pour $p > 1$, on a :

$$\left(\frac{f+g}{2}\right)^p \leq \frac{1}{2}f^p + \frac{1}{2}g^p \iff (f+g)^p \leq 2^{p-1}f^p + 2^{p-1}g^p.$$

On a donc $\int (f+g)^p d\mu \leq 2^{p-1} \int f^p d\mu + 2^{p-1} \int g^p d\mu$.

Mais alors si $\int (f+g)^p d\mu$ est infini, $2^{p-1} \int f^p d\mu + 2^{p-1} \int g^p d\mu$ l'est aussi donc $\int f^p d\mu$ ou $\int g^p d\mu$ l'est si bien que l'inégalité de Minkowski devient $+\infty \leq +\infty$, ce qui est encore vraie. ■

Remarque 3.2.4 Soit $1 < p < \infty$, on définit la première inégalité de **Clarskon** par :

Soit $2 \leq p < \infty$: $\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_{L^p}^p + \left\| \frac{f-g}{2} \right\|_{L^p}^p \leq \frac{1}{2} (\|f\|_{L^p}^p + \|g\|_{L^p}^p, \forall f, g \in L^\infty)$.

On définit la deuxième inégalité de **Clarskon** par :

Soit $1 < p \leq 2$ on a :

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_{L^p}^p + \left\| \frac{f-g}{2} \right\|_{L^p}^p \leq \frac{1}{2} (\|f\|^p + \|g\|^p)^{\frac{1}{p-1}}.$$

Proposition 3.2.5 Si $p, q, r \geq 1$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}, \text{ si } f \in L^p \text{ et } g \in L^q \text{ alors } fg \in L^r.$$

Remarque 3.2.6 Dans le cas général.

Soit $f_1, f_2, \dots, f_k$ des fonctions t.q : $f_i \in L^{p_i}(X) : 1 \leq i \leq k$

avec $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_k} \leq 1$ alors :

le produit $f = f_1 f_2 \dots f_k \in L^p(X)$ et $\|f\|_{L^p} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}} \dots \|f_k\|_{L^{p_k}}$.

Proposition 3.2.7 On peut généraliser l'inégalité de **Minkowski**.

Soit (f_n) une suite de fonction μ -mesurables définie sur l'espace mesuré (X, A, μ) ,

on a :

$$\left(\int \left| \sum_{n=1}^p f_n \right|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \sum_{n=1}^p \left(\int |f_n|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ où } 1 < p < \infty.$$

Théorème 3.2.8 $\|\cdot\|_{L^p}$ est une norme pour tout $1 \leq p \leq \infty$.

Théorème 3.2.9 (Fisher-Reisz)

$L^p(X, A, \mu)$ est un espace complet (pour la norme $\|\cdot\|_p$). Il s'agit donc d'un espace de **Banach**.

Le résultat suivant donne un (petit) lien entre la convergence d'une suite des fonctions $(f_n)_n$ vers f dans $L^p(X, A, \mu)$ et la convergence μ -presque partout.

Théorème 3.2.10 Si $f_n \rightarrow f$ dans $L^p(X, A, \mu)$, c'est à dire $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$ alors il existe une sous-suite $(f_{n_p})_p$ de $(f_n)_n$ qui converge p.p vers f .

Remarque 3.2.11 Pour $p = 2$, L^p est un espace de **Hilbert** muni du produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle = \int f(x) \overline{g(x)} d\mu(x).$$

Preuve. On montrons que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur L^2 :

$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}, \forall f_1, f_2, g \in L^2$:

$$\begin{aligned} 1- \langle \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, g \rangle &= \int (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) \overline{g} d\mu = \int \lambda_1 f_1 \overline{g} d\mu + \int \lambda_2 f_2 \overline{g} d\mu \\ &= \lambda_1 \int f_1 \overline{g} d\mu + \lambda_2 \int f_2 \overline{g} d\mu = \lambda_1 \langle f_1, g \rangle + \lambda_2 \langle f_2, g \rangle. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2- \langle f, \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 \rangle &= \int f (\overline{\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2}) d\mu = \int f \overline{\lambda_1 g_1} d\mu + \int f \overline{\lambda_2 g_2} d\mu \\ &= \overline{\lambda_1} \int f \overline{g_1} d\mu + \overline{\lambda_2} \int f \overline{g_2} d\mu = \overline{\lambda_1} \langle f, g_1 \rangle + \overline{\lambda_2} \langle f, g_2 \rangle. \end{aligned}$$

$$3- \langle f, g \rangle = \int f \overline{g} d\mu = \int \overline{\overline{f} g} d\mu = \int \overline{g \overline{f}} d\mu = \int g \overline{f} d\mu = \overline{\langle g, f \rangle}.$$

$$4- \langle f, f \rangle = \int f \overline{f} d\mu = \|f\|^2 \geq 0.$$

$$5- \langle f, f \rangle = 0 \iff \int f \overline{f} d\mu = 0 \Rightarrow \|f\|^2 = 0 \Rightarrow f = 0. \blacksquare$$

3.3 Réflexivité-Séparabilité-Dualité L^p

La dualité des espaces L^p

Soit $p \in [1, \infty[$ et q le conjugué de p pour tout $g \in L^p$ fixé, on considère l'application :

$$\begin{aligned}\varphi : L^p &\longrightarrow \mathbb{K} (\mathbb{R} \vee \mathbb{C}) \\ f &\longrightarrow \varphi(f) = \int_X f g d\mu.\end{aligned}$$

donc : φ est une forme linéaire continue sur $L^p(\mu)$. C.à.d : $\varphi \in (L^p)'$.

Si $1 < p < \infty$ alors : $\|\varphi\| = \|g\|_q$.

Si $p = 1$ ($q = +\infty$) et $\mu\sigma$ -finie alors : $\|\varphi\| = \|g\|_\infty$.

Théorème de représentation de Riesz

Théorème 3.3.1 Soit $\mu\sigma$ -finie et $p \in [1, \infty[$, alors toute forme linéaire continue sur L^p .

φ s'écrit :

$$\begin{aligned}\psi : L^p &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longrightarrow \psi(f) = \int_X f g d\mu.\end{aligned}$$

Pour tout élément unique $g \in L^p$ ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) c.à.d :

$$\forall \psi \in (L^p)' . \exists ! g \in L^q : \psi(f) = \int_X f g d\mu.$$

Donc tout élément de $(L^p)'$ représente par un seul élément de L^q donc :

$$(L^p)' = L^q.$$

Si $1 < p < \infty$ et on a :

$$(L^p)' = L^q$$

$$(L^1)' = L^\infty$$

$$(L^\infty)' \supseteq L^1.$$

Définition 3.3.2 Soit X un espace vectoriel normé, sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On note X' son dual topologique, il s'agit aussi d'un espace de Banach. On peut alors former le double dual X'' , qui est le dual topologique de X' il y a une transformation linéaire continue naturelle $J : X' \longrightarrow X''$ définie par : $J(x)(\varphi) = \varphi(x)$ pour tout x dans X et φ dans X' . Donc J envoie X vers la fonction de X donnée par l'évaluation en X , J préserve la norme (soit $\|J(x)\| = \|x\|$) et est injective, l'espace X est alors dit réflexif si J est surjective.

Définition 3.3.3 On dit qu'un espace métrique X séparable s'il existe un sous-ensemble $D \subset X$ dénombrable et dense dans X .

Le tableau suivant récapitule les principales propriétés des espaces L^p rencontrés au :

	Réflexif	Séparable	Espace dual
$L^p, 1 < p < \infty$	Oui	Oui	$(L^p)'$
L^1	Non	Oui	L^∞
L^∞	Non	Non	Contient strictement L^1

Théorème de densité

Théorème 3.3.4 Soit (X, A, μ) un espace mesuré. L'ensemble E des fonctions étagées définies sur cet espace, telle que : $\forall e \in E : \mu(\{x : e(x) \neq 0\}) < \infty$, est dense dans $L_\mu^p(X)$ si $1 \leq p \leq \infty$.

3.4 Comparaison entre deux espaces L^p

En général, il n'y a pas de relation d'inclusion entre des espaces L^p d'indices p différents.

Exemple 3.4.1 Soit l'espace $(\mathbb{R}, \beta(\mathbb{R}), m)$.

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = \frac{1}{\sqrt[2]{x}} I_{]0,1]}(x)$$

et

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto g(x) = \frac{1}{x} I_{[1,+\infty[}(x)$$

On a : $f \in L^1 \wedge f \notin L^2$.

et $g \notin L^1 \wedge g \notin L^2$.

$$f \in L^1 \iff \|f\|_{L^1} = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| d\mu(x) < +\infty.$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |f(x)| d\mu(x) &= \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{1}{\sqrt[2]{x}} I_{]0,1]}(x) \right| d\mu(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt[2]{x}} I_{]0,1]}(x) d\mu(x) < \infty \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f \in L^1$$

$$f \in L^2 \iff \|f\|_{L^2} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 d\mu(x) \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 d\mu(x) &= \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{1}{\sqrt[2]{x}} I_{]0,1]}(x) \right|^2 d\mu(x) \\ &= +\infty. \\ &\Rightarrow f \notin L^2. \end{aligned}$$

$$g \in L^1 \iff \|g\|_{L^1} = \int_{\mathbb{R}} |g(x)| d\mu(x) < +\infty.$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |g(x)| d\mu(x) &= \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{1}{x} I_{[1,+\infty[}(x) \right| d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x} I_{[1,+\infty[}(x) d\mu(x) = \infty \\ &\Rightarrow g \notin L^1 \end{aligned}$$

$$g \in L^2 \iff \|g\|_{L^2} = \left(\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2 d\mu(x) \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

$$\int_R |g(x)|^2 d\mu(x) = \int_R \left| \frac{1}{x} I_{[1, +\infty[} \right|^2 d\mu(x) = \int_R \frac{1}{x^2} I_{[1, +\infty[} d\mu(x) = 1.$$

$$\Rightarrow \int_R (|g(x)|^2 d\mu(x))^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1 < +\infty \Rightarrow g \in L^2.$$

Cependant une cette relation d'inclusion existe dans le cas particulier suivant :

$X \in \mathbb{R}^n$ t.q $\mu(X) < \infty$ et soit $p, q \in [1, +\infty[, p > q$.

On a donc : $L^\infty \subset L^p \subset L^q$.

3.5 Mode de convergence

Dans cette section, nous allons voir les différents modes de convergence par des fonctions mesurable et les liens entre eux.

On considéra ici uniquement des fonctions à valeurs réelles définies sur un espace mesuré fixé (X, A, μ) .

3.5.1 Convergence ponctuelle

Définition 3.5.1 Une suite (f_n) converge ponctuellement vers f , si pour tout $\varepsilon > 0$ et $x \in X$, il existe un entier naturel $n(\varepsilon, x)$ t.q pour tout $n \geq n(\varepsilon, x)$ alors :

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

3.5.2 Convergence uniforme

Définition 3.5.2 Une suite (f_n) converge uniformément vers f , si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier naturel $n(\varepsilon)$ t.q pour tout $n \geq n(\varepsilon)$, et pour tout $x \in X$:

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

3.5.3 Convergence presque partout

Définition 3.5.3 Une suite (f_n) converge presque partout vers f , s'il existe un ensemble $E \in X$ avec $\mu(E) = 0$ t.q pour tout $\varepsilon > 0$ et $x \in X \setminus E$, il existe un entier naturel $n(\varepsilon, x)$ t.q pour tout $n \geq n(\varepsilon, x)$ alors : $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

3.5.4 Convergence presque uniforme

Définition 3.5.4 Une suite (f_n) converge presque uniformément vers f , si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une partie $E \in X$ t.q $\mu(E) < \varepsilon$ et il existe un entier naturel $n(\varepsilon)$ t.q tout $n \geq n(\varepsilon)$, et pour tout $x \in X \setminus E$, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

3.5.5 Convergence en mesure

Définition 3.5.5 Une suite (f_n) de fonctions mesurables converge en mesure vers f mesurable, si pour tout $\alpha > 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \alpha\}) = 0.$$

3.5.6 Convergence en norme (forte)

Définition 3.5.6 Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $1 \leq p \leq \infty$.

On dit que (f_n) converge en norme vers f si $f_n, f \in L^p$ et si : $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0$.

On notera alors $f_n \rightarrow f$ dans L^p .

3.5.7 Convergence faible

Définition 3.5.7 Si $1 \leq p \leq \infty$ on dit que f_n converge (faiblement) vers f si $f_n, f \in L^p$ et si :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X [f_n(x) - f(x)] \varphi(x) dx = 0, \forall \varphi \in (L^p)'$$

On notera alors : $f_n \rightharpoonup f$ dans L^p .

Si $p = \infty$ on dit que f_n converge faible* vers f , si $f_n, f \in L^p$ et si :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X [f_n(x) - f(x)] \varphi(x) dx = 0, \forall \varphi \in L^1.$$

On notera alors : $f_n \rightharpoonup^* f$ dans L^∞ .

Remarque 3.5.8 On parle de la convergence faible* dans L^∞ plutôt que la convergence faible car le dual de L^∞ est strictement plus grand que L^1 . Formellement toute fois, la convergence faible dans L^p et faible* dans L^∞ prennent la même forme.

La limite (forte ou faible) est unique.

Proposition 3.5.9 Soit $p \in [1, \infty]$ et $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions dans L^p telles que $\sum_{n \geq 1} \|f_n\|_p < \infty$, la série $\sum_n f_n < \infty$, la série $\sum_n f_n$ est alors presque partout absolument convergente, et convergente dans L^p , et on a :

$$\left\| \sum_n f_n \right\| \leq \sum_n \|f_n\|_p$$

3.5.8 Comparaison entre les modes de convergence

Proposition 3.5.10 La convergence uniforme implique la convergence ponctuelle.

La convergence ponctuelle implique la convergence presque partout.

La convergence uniforme implique la convergence presque uniforme.

Remarque 3.5.11 *Il est simple de voir que les réciproques sont fausses en général.*

Par contre, il est immédiat de voir que si X est un ensemble fini, alors la convergence ponctuelle implique la convergence uniforme.

Convergence monotone dans L^p

Soit (f_n) une suite croissante positive dans L^p telle que :

$$\sup_n \left(\int |f_n|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

$$\text{si } \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \sup_n f_n(x) = f(x)$$

alors :

$$f \in L^p, \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_p = \|f\|_p \text{ et } f_n \rightarrow f.$$

Convergence dominée dans L^p

Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) ayant les propriétés suivantes :

-Pour presque tout point $x \in X$, la suite $f_n(x)$ a une limite $f(x)$.

-Il existe une fonction $g \in L^p$ t.q : $\|f_n(x)\| \leq g(x)$ pour tout point x de X et pour tout entier $n > 0$.

Alors, la classe de $f \in L^p(x)$ et elle est la limite de suite (f_n) dans l'espace vectoriel normé L^p .

Remarque 3.5.12 *Le théorème de convergence dominée serait faux dans l'espace $L^\infty(X)$.*

Proposition 3.5.13 *Soit $1 \leq p \leq \infty$ et $f_n \rightarrow f$ L^p alors il existe une sous-suite $\{f_{n_k}\}$ t.q : $f_{n_k} \rightarrow f$ p.p et $|f_{n_k}| \leq h$ p.p avec $h \in L^p$.*

Théorème 3.5.14 *Supposons $\mu(A) < \infty$ et soit (f_n) une suite dans L^p qui converge uniformément vers f . Alors $f \in L^p$ et (f_n) converge en norme vers f .*

Proposition 3.5.15 *Soit $p \in [1, \infty[$ si $f_n \rightarrow f$ L^p , il existe $(n_k)_{k \geq 1}$ strictement croissante d'entier t.q :*

$$(f_{n_k}) \rightarrow f \text{ } \mu \text{ p.p.}$$

Corollaire 3.5.16 *Soit $p \in [1, \infty[$, si la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ converge dans L^p vers une limite f , et μ p.p vers une limite g , on a :*

$$f = g \text{ } \mu \text{ p.p}$$

Proposition 3.5.17 *Si $(f_n)_{n \geq 0}$ converge dans L^p vers f et $1 \leq p < \infty$ alors elle converge en mesure.*

Proposition 3.5.18 *Si μ est une mesure finie et si $(f_n)_{n \geq 0}$ est dominée dans L^p , $1 \leq p < \infty$ et converge en mesure alors $(f_n)_n$ converge dans L^p vers f .*

Proposition 3.5.19 *Si μ est une mesure finie et si $(f_n)_n$ converge p.p vers f alors $(f_n)_n$ converge en mesure vers f .*

Proposition 3.5.20 *Si $(f_n)_n$ converge en mesure vers f alors il existe une sous-suite extraite qui converge p.p vers f .*

Relation entre convergence faible et convergence forte

Il est évident que la convergence forte implique la convergence faible c-à-d :

$$f_n \longrightarrow f \text{ } L^p \Rightarrow \begin{cases} f_n \longrightarrow f \text{ } L^p, \text{ si } 1 \leq p < \infty \\ f_n \longrightarrow f \text{ } L^p \text{ si } p = \infty \end{cases}.$$

Remarque 3.5.21 *Si X est de dimension finie ces deux notions (convergence forte et convergence faible) sont identiques, par contre en dimension infinie n'est plus vrai.*

Chapitre 4

Applications des espaces L^p

L'intérêt des espaces L^p , plus particulièrement l'espace L^p est très grand pour les applications. C'est un outil indispensable à l'étude des problèmes soulevés par l'étude des phénomènes ondulatoires en mécanique quantique, science indispensable pour la plupart des recherches modernes en physique.

Parmi les outils fournis par ces espaces, nous allons étudier dans ce chapitre le théorème de Fubini pour des fonctions définies sur le produit d'espaces mesurés et pour lesquelles le théorème de convergence dominée, est une application importante. Nous allons voir aussi la notion de convolution et la transformée de Fourier qui est d'une importance primordiale dans l'étude des équations différentielles et dont les applications apparaissent dans plusieurs phénomènes physiques telles l'étude du signal.

4.1 Produit des espaces de Lebesgue

étant donnés deux espaces mesurés (X, A, u) et (Y, B, v) , on désigne leur produit par $(X \times Y, A \otimes B, u \otimes v)$, où $X \times Y$ est le produit cartésien des espaces X et Y , $A \otimes B$ la tribu engendrée par l'ensemble des produits cartésiens.

$\{a \times b / a \in A, b \in B\}$ et $u \otimes v$ la mesure produit sur $A \otimes B$ qu'il nous faut définir.

4.1.1 Théorème de Fubini

Définition 4.1.1 Soit (X, A, μ_1) et (Y, B, μ_2) deux espaces mesurés, les mesures μ_1 et μ_2 étant σ -finies et f une fonction $\mu_1 \otimes \mu_2$ -intégrable définie sur $X \times Y$, les fonctions :

$x \mapsto \int f(x, y) d\mu_2(y)$ et $y \mapsto \int f(x, y) d\mu_1(x)$ sont respectivement, μ_1 -intégrable et μ_2 -intégrable et on a :

$$\begin{aligned} \int f(x, y) d(\mu_1 \times \mu_2)(x, y) &= \int \left(\int f(x, y) d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x) \\ &= \int \left(\int f(x, y) d\mu_1(x) \right) d\mu_2(y). \end{aligned}$$

4.2 Transformation de Fourier

Définition 4.2.1 Soit f une fonction **Lebesgue**-intégrable, la fonction $\widehat{f}$ définie sur $\mathbb{R}$, par : $\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(2i\pi zx) dx$, est appelée la transformée de **Fourier** de f .

Théorème 4.2.2 Soit f et g deux fonction **Lebesgue**-intégrables et a un réel.

1-Si $g(x) = f(x) \exp(2i\pi ax)$, alors $\widehat{g}(t) = \widehat{f}(t+a)$.

2-Si $g(x) = f(x-a)$, alors $\widehat{g}(t) = \widehat{f}(t) \exp(2i\pi at)$.

3-Si $g(x) = \overline{f(-x)}$, alors $\widehat{g}(t) = \overline{\widehat{f}(t)}$.

4-Si $g(x) = f\left(\frac{x}{a}\right)$, $a > 0$, alors $\widehat{g}(t) = a \widehat{f}(at)$.

5-Si $g(x) = (2i\pi x)f(x)$, alors $\widehat{f}$ est dérivable et $\widehat{f}'(t) = \widehat{g}(t)$.

4.3 La convolution

La théorie de la convolution est une application de la théorie des mesures produits, du théorème de transfert et du théorème de Fubini.

La convolution est une “multiplication” de mesures. Elle correspond à l’addition de variables aléatoires indépendantes en probabilité.

Définition 4.3.1 Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $1 \leq p \leq \infty$. alors, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$, la fonction $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^n$.

On pose : $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$ alors :

$$f * g \in L^p(\mathbb{R}^n) \text{ et } \|f * g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} \times \|g\|_{L^p}.$$

4.4 Distribution

Définition 4.4.1 Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ une distribution T sur Ω est une application linéaire de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $\mathbb{C}$ t.q :

$$\text{pour tout compact } K \text{ de } \Omega \text{ il existe } C_k > 0 \text{ et } k \in \mathbb{N} \text{ t.q : } |\langle T, \varphi \rangle| = C_k \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|$$

pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$.

On appelle fonction de **Dirac**, la fonction δ par : $\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$.

Définition 4.4.2 Soit $T \in D'(\Omega)$, la forme linéaire $\frac{\partial T}{\partial x_j}$ sur $C_c^\infty(\Omega)$ définie par :

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle = - \left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle, \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega),$$

est une distribution appelée **dérivée partielle**, au sens des distribution de T par rapport à la $j^{\text{ème}}$ variable.

Bibliographie

- [1] D.Sondaz,R.Morvan,introduction à la topologie,france.
- [2] Jean-Christophe Breton,intégration et mesures.
- [3] T.Gallouet,R.Herbin,mesure,intégration,probabilité.
- [4] [www.les mathématiques.net](http://www.les-mathematiques.net)