الجمهورية الجزائرية الديموقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique Et Populaire

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Ministère De L'enseignement Supérieur Et De Recherche Scientifique

CENTRE UNIVERSITAIRE DE MILA
INSTITUT DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE

Réf. /12

Mémoire de fin d'étude
Présenté pour l'obtention du diplôme de

Licence Académique

Domaine : **Mathématique et Informatique**
Filière : **Mathématiques**
Spécialité : **Mathématique Fondamentale**

Thème :

LA FONCTION CARACTERISTIQUE
ET
LA FONCTION GENERATRICE

Présenté Par :

1- Guerdouh Laid
2- Mouchemouche Amina
3- Yacoub Fatiha

Dirigé Par :

- *Rabah Bouden*

Année universitaire : 2012/2013

بسم الله الرحمان الرحيم

﴿ يَرْفَعِ اللَّهُ الَّذِينَ آمَنُوا مِنكُمْ

وَالَّذِينَ أُوتُوا الْعِلْمَ دَرَجَاتٍ

وَاللَّهُ بِمَا تَعْمَلُونَ خَبِيرٌ ﴾

(المجادلة:11)

الإهـــــــــــــــــــــداء

هذا من فضل ربي

الذي خلقني وهو يهديني والذي يطعمني ويسقيني وإذا مرضت هو يشفيني والذي يميتني ثم يحييني والذي أطمع أن يغفر لي خطيئتي يوم الدين.

الىالتي لو اتخذت من ماء البحر مدادا ومن ورق الشجر قرطاسا لأعد فضلها و مزاياها لما استوفيت مثقال ذرة منها الى أمي الغالية

الى من أفنى عمره في نقش معارف التربية والمسؤولية في روحي الى من تحمل مشاق الحياة من أجل نجاحي الى أبي الغالي

الى الإخوة والأخوات فردا فردا

الى من شاركوني في إنجاز هذا البحث "امنة" "فتيحة"

" أهدي ثمرة جهدي "

" العيد "

إهداء

أولا أشكر الله تعالى وأحمده على إتمام هذا العمل.

قال تعالى: ﴿ ... وقضى ربك ألا تعبدوا إلا إياه وبالوالدين إحسانا إما يبلغن عندك الكبر أحدهما أو كلاهما فلا تقل لهما أف و لا تنهرهما وقل لهما قولا كريما ﴾ الإسراء (الآية 23).

*إلى من تعب ولم يمل وأعطى ولم يبخل، إلى الذي أفنى العمر في العمل على راحتي ووفر لي كل سبل النجاح إلى والدي الحبيب أطال الله في عمره.

*إلى الشمعة التي تحترق من أجل إضاءة دربي، إلى التي سهرت الليالي الطوال بجانبي، إلى التي رعتني وتعبت في تربيتي، إلى من سقتني الحنان و أهدتني الأمان إلى أمي الحبيبة أطال الله في عمرها.

*إلى أعز ما أملك أخي "أسامة" وأخواتي العزيزات.

*إلى أختي سمية وزوجها وابنهما " أمجد".

إلى الشجرة التي كنت غصنا من أغصانها العائلة الكريمة.

إلى كل هؤلاء أهدي ثمرة جهدي

أمنة

إهــــداء

بسم خير الأسماء رب العرش

والسماء أبدأ به وأستعين، فالحمد والشكر لله

الذي هدانا لهذا وما كنا لنهتدي لولا أن هدانا الذي

ألهمني الصبر ورزقني العون على إتمام هذا العمل.

إلى من قال فيها جل جلاله: « **الجنة تحت أقدام الأمهات**»

إلى من لم تعرف للنوم طعما ولاراحة يوما ....

أمي الغالية "عائشة" أطال الله في عمرها

إلى من تعب ولم يمل وأعطى ولم يبخل، إلى من رعاني وسقاني من فيض الحنان

أبي الغالي "عز الدين" أطال الله في عمره.

إلى أعز ما أملك في الوجود إخوتي وأخواتي.

إلى جدتي وزوجة أخي وبرعم بيتنا ابن أخي "زمان".

إلى أولاد إخوتي "أحمد يوسف"، "ياسر عبد الله"، "أنيس" "هديحة" ، "محفوظ" والغالي على قلبي "إياد".

إلى عمي "مسعود" وزوجته وكل أبنائهم خاصة "موني".

إلى أستاذتي بالإكمالية "بوالزرايب كريمة" وأستاذي بالثانوية "جمال الدين بوالنمر".

إلى زميلي في هذا العمل: "آمنة" و "العيد".

إلى التي جمعتني بهما الأيام طيلة ثلاث سنوات وكانتا عائلتي الثانية

صديقي "نادية زيد الخير" و"فوزية بوقريعة".

إهداء خاص إلى صديقتي وأختي "منال حواس".

أهدي ثمرة جهدي

فتيحة

شكر و عرفان

أولا نشكر ا تعالى ونحمده على نعمه التي أنعم بها علينا.

كما نتقدم بجزيل الشكر و العرفان إلى الأستاذ المشرف **"بودن رابح" على** نصائحه و إرشاداته لنا في هذا العمل , و نسأل الله أن يزيده فضلا على **فضل و علما على علم** , كما نشكر كافة أساتذة قسم الرياضيات و الإعلام الآلي الذين **رافقونا في مشوارنا الدراسي** .

آمنة فتيحة

العيد

Table des matières

Introduction Générale

Tout informations relative á une variable aléatoire X est disponible dans sa densité de probabilité (variable contine) ou est disponible dans sa loi de probabilité (variable discréte).

A partire de définition classique, il devera donc étre toujour possible :

de calcule la moyenne, la variace ou des moments d'ordre superieur de X et Y a partire de sa densité.

de calcule la somme de deux variables aléatoires indépendantes X et Y.

En pratique ,il avive souvent que l'utilisation direct de ces définitions conduise á calcules inextricabales un outil peut alors étre d'un grand secours la fonction génératrice et la fonction caractéristique.

La notion de fonction génératrice et la fonction caractéristique peut étre utile par fois pour calculer plus facilement les moments de certaines lois de probabilité.

Chapitre 1

Fonction caractéristiques

Soit $(\Omega.A.P)$ un espase de probabilité

1.1 Définitions

Définition 1 *1. Soit X un v.a.r définie sur $(\Omega.A.P)$de loi de probabilité p_x. on appelle fonction caratéristiques de X lapplication φ_xt.q*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \to & \varphi_x(t) = E(\exp itx) = \int_{\mathbb{R}} \exp(itx)\, dp(x) . \end{array}$$

φ n'est antre la transforme de fourier de la mesure p_x.

2. Soit X un $v^{\rightarrow}$.a définie sur $(\Omega.A.P)$et valeur dans $\mathbb{R}^n$de loi p_x.on appelle fonction caractéristique de X lapplication φ_xt.q :

$$\begin{array}{rcl} \varphi_x & : & \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \\ t & = & (t_1, t_2, ...t_n) \to \varphi_x(t) = E(\exp i \prec t.x \succ) = \int \left(\exp i \sum_{j=1}^{n} t_j x_j \right) dp_x(x_1,x_2, ...x_n) . \end{array}$$

Proposition 2 *1. $|\varphi_x(t)| \leq 1, \varphi(0) = 1, \forall t \in \mathbb{R}^n$.*

2. $\varphi_x(-t) = \overline{\varphi_x(t)}, \forall t \in \mathbb{R}^n$.

3. *Si* X *est une v. a. r.* $(n=1)$, φ_x *est de type positif c-a-d* $\forall n \in \mathbb{N}, \forall (t_1, t_2, ...t_n) \forall (z_1, z_2, ...z_n) \in \mathbb{C}$ *on a :*

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \varphi_x(t_k - t_i) z_k \overline{z_i} \geq 0.$$

4. φ_x*est une fonction uniformément contine sur* $\mathbb{R}^n$.

   (a) Si A *est une tranformation linéaire de* $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ b *un vecteur de* $\mathbb{R}^n$ *et* $y = Ax + b$ *alors :*

$$\varphi_y(u) = \exp i < b.u > \varphi_x\left({}^tA, u\right).$$

   (b) Si A *est de plus symtétrique alors :*

$$\varphi_y(u) = \exp i < b.u > \ \varphi_x(A.u).$$

5. pour tout famille de v .a indépendantes $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ *ona :*

$$\varphi_{x_1 + x_{2+ \ldots\ldots} x_n}(t) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_{x_i}(t).$$

Preuve.

1. $-1 \leq |\cos(t)| \leq 1 \quad , \forall t \in \mathbb{R}^n$.

2. $\varphi_x(-t) = E(\exp -i < t, x >) = E\left(\overline{\exp i < t, x >}\right) = E\left(\overline{\exp i < t, x >}\right) = \overline{\varphi_x(t)}$.

3. $\sum_{k=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \varphi_x(t_k - t_1) z_k \overline{z_1} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} E(\exp i(t_k - t_1) x) z_k \overline{z_1} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} E(\exp(it_k x) \exp(-it_1 x)) z_k \overline{z}$

   $= E\left(\sum (\exp it_k x) z_k (\exp it_1 x) \overline{z_1}\right) = E\left|\sum_{k=1}^{n} \exp it_k x\right|^2 \geq 0.$

4. Soit $\varepsilon > 0$et soient t et $t \in \mathbb{R}^n$.

   Il est possible de choisir λ_ε de sorte que :

$$\int_{|x| > \lambda_\varepsilon} dp_x(x) \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

par ailleurs :

$$\left|\varphi_x(t)-\varphi_x\left(t^{'}\right)\right| \leq \int\limits_{|x|\leq\lambda_\varepsilon} |\exp i<t,x>-\exp i<t,x>| \, dp_x(x) + \int\limits_{|x|>\lambda_\varepsilon} |\exp i<t,x>| \, dp_x(x) + \int\limits_{|x|>\lambda_\varepsilon}$$

d'où :

$$\left|\varphi_x(t)-\varphi_x\left(t^{'}\right)\right| \leq \int\limits_{|x|\leq\lambda_\varepsilon} \left|\exp i<t,x>-\exp i<t^{'},x>\right| dp_x(x) + \frac{2\varepsilon}{3}$$

or

$$\begin{aligned} \left|\exp i<t,x>-\exp i<t^{'},x>\right| &= \left| i \int\limits_{<t^{'},x>}^{<t,x>} \exp iu \; du \right| \leq \left|<t^{'},x>-<t,x>\right| \\ &= \left|<t-t^{'}>,x>\right| \leq |x| \left|t^{'}-t\right| \leq \lambda_\varepsilon \left|t^{'}-t\right| \; pour \;\; |x| \leq \lambda_\varepsilon. \end{aligned}$$

Donc : $\left|\varphi_x(t)-\varphi_x\left(t^{'}\right)\right| \leq \lambda_\varepsilon \left|t-t^{'}\right| + \frac{2\varepsilon}{3} \leq \varepsilon$ dés que $\left|t-t^{'}\right| < \frac{\varepsilon}{3\lambda_\varepsilon}$.

5.

$$\begin{aligned} \varphi_y(u) &= E\exp i<u,AX+b>=E\left(\exp i<u,b>\exp i<u,AX>\right) \\ &= \exp i<u,b>E\left(\exp i<^{t}Au,X>\right) \\ &= \exp i<u,b>\varphi_x\left(^{t}Au\right). \end{aligned}$$

6. $\varphi_{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}(t) = E\exp i<t,\sum\limits_{i=1}^{n} x_i>=E\left(\prod\limits_{i=1}^{n}\exp i<t,x_i>\right)=\prod\limits_{i=1}^{n} E\left(\exp i<t,x_i>\right)$

car la famille (x_i) est indépendante

Donc :

$$\varphi_{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_{x_i}(t).$$

■

Corollaire 3 *Le produit de deux fontions caractetéristiques est une fontion caractéristique .*

Remarque 4 1. *La somme et la déffférence de deux fontions caractetéristiques ne peuvent étre des fontions caractetéristiques (d'prés i)*

2. *La réciproque de vi)est fausse .*

3. *Si x est de loi symétrique (x est $(-x)$ ont mém loi) alos φ_x est réelie (d'aprées* 2*).Si de plus x est a' valeurs réelles alors φ_x est paire .En fait une loi sur $\mathbb{R}$ est symétrique ssi sa fontion caractetéristique est paire (et réelle.).*

Corollaire 5 1. *La réciproque de* (3) *comme sous le nom du théoréme de Bochner énonce :*

Toute fonction continue de $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de type positif est la transformée de Fourier d'une mesure positive bornée (cf Doob).

1.2 Fontion caractéristique des quelques loi :

1.2.1 Loi discréte

Si X est une variable aléatoire de loi discréte $\sum\limits_k p_k \zeta_{x_k}$ alors la fonction caractéristique est de la forme

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \exp itxk.$$

Loi de bernnoulli

On a :

$$\begin{cases} P_k(x=0) = 1-p = q \\ P_k(x=1) = p \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \varphi(t) = \sum_{k=1}^{n} P_k \ \exp itk.$$

On a d'après Binom - Newton la formule suivante :

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p \ a^{n-p} \ b^p \tag{1.1}$$

Alors :

$$P_k = p \Rightarrow \varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \ P_K \ \exp itk = \sum_{k=0}^{n} \ p \exp itk \quad = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{C}_1^1 \ p^1 q^O \exp itk \Rightarrow k = 1$$

Alors :

$$\begin{aligned} \varphi(t) \quad &= \quad \sum_{k=0}^{n} \mathbb{C}_1^1 p^1 q^0 \exp it = \sum_{k=0}^{n} q^0 \left(p \exp it\right)^1 \\ &\Rightarrow \quad \varphi(t) = \left(q + p \exp it\right)^1 \qquad (t.q : n = 1) \end{aligned} \tag{1.2a}$$

Donc :

$$\varphi(t) = q + p \exp it = (1-p) + p \exp it$$

Alors la fonction caractéristiqus est de la forme

$$\varphi(t) = q + P \exp it.$$

Loi de Binomiale B(n,p)

Dans la loi Binomiale on a l éxpression analytique de la forme

$$P_k = \mathbb{C}_n^k p^k q^{n-k} \text{ t.q } q = 1 - p.$$

On a :

$$P_k = \mathbb{C}_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

D'apres binom - Newton on a :

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{C}_n^k p^k (1-p)^{n-k} \exp itk \\ &= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{C}_n^k p^k (1-p)^{n-k} (p \exp it)^k . \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \varphi(t) = (1-p+p\exp it)^n .$$

Alors la fonction caracteristique est :

$$\varphi(t) = (q+p\exp it)^n \ \text{ t.q } q = 1-p.$$

Loi de poisson $p(\lambda)$

L éxpression analytique est :

$$P_k = \exp(-\lambda) \frac{\lambda^k}{k!} \ (k \geq 0, 0 < \lambda)$$

On a :

$$\begin{aligned} P_k &= \exp -\lambda \frac{\lambda^k}{k!} \quad (k \geq 0, 0 < \lambda) \\ \varphi(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} P_k \exp itk = \sum_{k=0}^{\infty} \exp(-\lambda) \ \frac{\lambda^k}{k!} \exp itk = \sum_{k=0}^{n} \exp -\lambda \frac{(\lambda \exp it)^k}{k!} \end{aligned}$$

On a :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{X^K}{K!} = \exp x$$

Alors :

$$\exp(-\lambda) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda \exp it)^k}{k!} = \exp(-\lambda) \exp\left(\lambda^{\exp it}\right) = \exp(-\lambda + \lambda(\exp it)) = \exp \lambda((\exp it) - 1)$$

et la fonction caractéristique est :

$$\varphi_x(t) = \exp \lambda(\exp it - 1) \,.\ t.q\ \lambda > 0.$$

1.2.2 Loi absolument contine

Si X un v .a de loi absolument continue de densité f alors :

$$\varphi_x(t) = \int_R \exp itx\ f(x)\ dx.$$

Loi exponentielle p(λ) On sait que la densité f de la loi exponentielle est de la forme

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{SI} \quad X < 0 \\ \lambda \exp -\lambda x & \text{x} \geq 0 \quad ,0 < \lambda.. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \int_0^{\infty} \lambda(\exp -\lambda x\ ) \exp itx.dx = \lambda \int_0^{\infty} \exp(-\lambda + it)\, x\ dx \\ &= \lambda \frac{1}{-\lambda + it} \exp(-\lambda + it)\, x|_0^{\infty} = -\lambda \frac{1}{-\lambda + it} \exp 0 = \frac{-\lambda}{-\lambda + it} \end{aligned}$$

Alors :

$$\varphi(t) = \frac{\lambda}{-it + \lambda}$$

Alors la fonction caractéristique est :

$$\varphi_x(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it} \ \ (0 < \lambda).$$

Loi Normal N(0,1)

L éxprenssion analytique est

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \ \exp\frac{-x^2}{2} \ \ (x \in \mathbb{R})$$

$$\varphi(t) = \int f(x) \exp itx \ dx = \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\frac{X^2}{2} \exp itx \ dx$$

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int it \exp\frac{-x^2}{2} \exp itx \ dx = -t\varphi(t) \\ &\Rightarrow \ \varphi(t) = \exp\frac{-t^2}{2}. \end{aligned}$$

Alors la fonction caractéristique est :

$$\varphi_x(t) = \exp\frac{-t^2}{2}.$$

Loi uniforme

On sait que la densité de probabilité de la loi unoiforme de la forme :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} \ a \leq \ x \leq b \\ \quad 0 \text{ sinon } \ . \end{cases}$$

On a :

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\exp itx)\, f(x)\, dx. \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp itx}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b \exp itx\ dx \\
&= \frac{1}{b-a} \left[\frac{1}{it} \exp itx \right]_a^b \\
&= \frac{1}{b-a} \left(\frac{\exp itb - \exp ita}{it} \right).
\end{aligned}$$

Alors la fonction caractéristique est :

$$\varphi(t) = \frac{1}{b-a} \left(\frac{\exp itb - \exp ita}{it} \right).$$

1.3 Lien entre la fonction caractéristique et les moments

1.3.1 Moments d'une variable aléatoire réel :

On :

$$\varphi_x(t) = \int \exp itx dp_x(x)$$

est la fonction caractéristique. En derivant par rapport à t à L'interieur de $\int$ on a :

$$E(X) = i \int x\ \exp itx\ \ dp_x \text{ pour } t = 0 \text{ (si } E(X) \text{ existe)}$$

et de proche en proche, k derivation font apparaitre $E\left(X^K\right)$.

un lien s'etablit entre les moments d'une variable aléatoire réelle X et sa fonction caractéristique .

Le lemme suivant donnez le droit de deriver sous l'intégrale$\int$:

Lemme 6 *:Soit f une application de*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{C} \\ (t,x) & \to & f(t,x) \end{array}$$

et soit μ une mesure défine sur $\mathbb{R}$ si :

1. *pour tout $X \in \mathbb{R}$,f admet une dérivée paratielle $\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)$ majorés en norme pour tout $t \in \mathbb{R}$ par une fonction g μ intégrable .*
2. *pour tout $t \in \mathbb{R}$, lapplication : $x \quad \to f(t,x)$ est μ intégrable alors :La fonction : $t \to \quad F(t) = \int f(t,x)\, d\mu(x)$ définie sur $\mathbb{R}$ est derivable en tout t de $\mathbb{R}$ et on a :*

$$F'(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f(t,x)}{\partial t} \quad d\mu(x)$$

Preuve. :

Soit (h_n) une suite tendant vers 0 quand $n \to \infty$ on a :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F(t+h_n) - F(t)}{h_n} = \lim_{n\to\infty} \int \frac{f(t+h_n,x) - f(t,x)}{h_n} du(x)$$

D'aprés le théoréme des accroissement finis on a :

$$|\varphi_n(x)| = \left| \frac{f(t+h_n,x) - f(t,x)}{h_n} \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial t}(t'_n,x) \right| \leq g(x) \text{ (d'aprés 1) . ou' } t < t'_n < t + h_n$$

L'application du T.C.D. donne alors :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F(t+h_n) - F(t)}{h_n} = \int \lim_{n\to\infty} \frac{f(t+h_n) - f(t)}{h_n} du(x) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\, du(x) .$$

D'ou F est dérivable et $F'(t) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\, du(x)$. ■

Proposition 7 *:Si la variable aléatoire réelle x admet des moments jusqu a l'ordre n ,alors la fonction caractéristique de X noté φ_X , est n fois continument dérivable et admet pour k^{ieme} drivés :*

$$\varphi_X^k(t) = i^k \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \exp itx \quad dP_X(x), \ \forall \qquad 1 \leq \ k \leq n$$

En particulier :

$$E\left(X^k\right) = \frac{\varphi_x^k(0)}{i^k}$$

et on :

$$E\left(X^k\right) = \frac{1}{i^k} \ \left[\frac{d^k p_x(t)}{dt^k}\right]_{t=0}$$

Donc :

$$E(X) = -i\acute{\varphi_x}(0)$$

$$E\left(X^2\right) = -\acute{\varphi_x}(0)$$

$$V(X) = -\acute{\varphi_x}(0) + \varphi_x^2(0)$$

Preuve. par récurrence

pour $k = 1$ on a :

$$\varphi(t) = \int \exp itx \ dP_X(x).$$

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$

$(t, x) \to \exp itx$ et soit $u = P_X$

1. $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t, x)\right| = |ix \exp itx| \leq |x|$ qui est p_x intégrable car EX existe .
2. $X \to \exp itx$ est P_X intégrable pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Les conditions d'application du lemme précédent sont remplies donc :

$$\varphi'(t) = \int ix \exp itx = i \int x \exp itx \ dP_X.$$

suppossons que : $\varphi^{[k]}(t) = i^k \int x^k \exp itx \ dp_x$ et montrons que :

$$\varphi^{[k+1]}(t) = i^{k+1} \int x^{k+1} \exp itx \ dP_X(x)$$

Soit f :$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$

$(t, x) \to (ix)^k \exp itx$ et soit $u = P_X$.

1. $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t, x)\right| = \left|(ix)^{k+1} \exp itx\right| \leq \left|x^{k+1}\right|$ qui est P_X intégrable car EX^{k+1} existe .
2. $x \to (ix)^k \exp itx$ est P_X intégrable car EX^k existe .On applique encore le lemme précédent et on obtient :

$$\varphi^{[k+1]}(t) = i^k \int x^k ix \exp itx dP_X(x) = i^{k+1} \int x^{k+1} \exp itx dP_X(x).$$

Le cas particulier s'obtient pour $t = 0$ (C.q.f.d.).

■

1.3.2 Moment d'une variable aléatoire vectoriel

Si X un vecteure alétoire dans $\mathbb{R}^n$ $(1 < n)$,il existe une relation liant les moments de$X$ aux dérivées partielle de sa fonction caractéristique et :

$$\frac{d^{|\alpha|}\varphi_x(t)}{dx^\alpha} = (2i\pi)^{|\alpha|} E\left(X^\alpha \quad \exp(2i\pi tx)\right)$$

pour tout multi indise : $\alpha = (\alpha_1.......\alpha_d)$et $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_d$,$|\alpha| \leq n$.
Si la v.a.r. X admet des moments de tout ordre et si $\limsup \sqrt[n]{\frac{|Ex^n|}{n!}} = \frac{1}{P}$ alors :

$$\varphi_x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k Ex^k}{k!}$$

Oú $EX^0 = 1$ pour tout t vérifiant :$|t| < p$.

Remarque 8 *1. Si φ_X est n fois dérivable au point 0, X admet des moments jusqu'à l'ordre :*

$$\begin{cases} n & si\ n\ \ est\ pair \\ n-1 & si\ n\ \ est\ impair \end{cases}$$

2. φ_X est indéfiniment dérivable au point 0 ssi X admet des moments de tout ordre.

1.4 Fourmules d'invesion

Ce sont des formules qui permettent d'exprimer la loi d'une v.a. a' partir de sa fonction caractéristique.

Lemme 9

$$s(\alpha, T) = \int_0^T \frac{\sin \alpha t}{t} dt \leq \pi \ \forall\ T\ et\ \alpha.$$

Preuve. posons $I(X) = \int_0^x \frac{\sin u}{u} du$ et $C_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin u}{u} du$; On a : $s(\alpha, T) = I(\alpha T)$ et $C_n = (-1)^n \int_0^\pi \frac{\sin u}{n\pi + u} du$ (poser $v = n\pi + u$) ; Donc :($C_n \geq 0$ si n est pair et $C_n \leq 0$ si n est impair) et $|c_{n+1}| \leq |c_n|$ de $I(x) = \sum_{k=0}^{n-1} C_k + \int_{n\pi}^x \frac{\sin u}{u} du$ pour $n\pi \leq x \leq (n+1)\pi$

résuite

$$\begin{aligned} .\sum_{k=0}^{n-1} C_k &\leq I(x) \leq \sum_{k=0}^{n} C_k \ pour\ n\pi \leq x \leq (n+1)\pi \text{ et } n \text{ pair.} \\ .\sum_{k=0}^{n} C_k &\leq I(x) \leq \sum_{k=0}^{n-1} C_k \ pour\ n\pi \leq x \leq (n+1)\pi \text{ et } n \text{ impair.} \end{aligned}$$

Or

Si n est pair on a :

$$\sum_{k=0}^{n} C_k = C_0 + \sum_{K=0}^{\frac{n}{2}} (C_{2k-1} + C_{2k}) \leq C_0 \ car\ C_{2k-1} + C_{2k} \leq 0\ \forall k\ et\ \ |C_{n+1}| \leq |C_n| \,.$$

Si n est impair on a :

$$\sum_{k=0}^{n} C_k = C_0 + \sum_{K=0}^{\frac{n-1}{2}} (C_{2k} + C_{2k+1}) \geq 0\ car\ c_{2k} + c_{2k+1} \geq 0 \forall k$$

Donc :

$$0 \leq I\left(x\right) \leq \pi \qquad \text{car} \qquad \left|\frac{\sin t}{t}\right| \leq 1.$$

■

Proposition 10 *:*

Si φ est la fonction caractéristique d'une v.a.r. X de fonction de répertition F Alors

$$\frac{1}{2}\left[F\left(b^{+}\right) + F\left(b\right)\right] - \frac{1}{2}\left[F\left(a^{+}\right) + F\left(a\right)\right] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{+T} \frac{\exp\left(-ita\right) - \exp\left(-itb\right)}{it} \varphi\left(t\right) dt$$

oú a et $b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $F\left(x_0^{+}\right) = \lim_{x \to > x_0} F\left(x\right).$

Preuve.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{+T} \frac{\exp\left(-ita\right) - \exp\left(-itb\right)}{it} \varphi\left(t\right) dt \\ = \ & \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{+T} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp\left(-ita\right) - \exp\left(-itb\right)}{it} \exp\left(itx\right) dP\left(x\right) dt \end{aligned}$$

Oú P est la loi de probabilité de X

comme $\left|\frac{\exp(-ita)-\exp(-itb)}{it} \exp\left(itx\right)\right| \leq (b-a)$ et $\int_{-T}^{T}\int_{-\infty}^{+\infty} (b-a)\, dP\left(x\right) dt = 2\pi\left(b-a\right) < +\infty$.

La fonction $(t,x) \rightarrow \frac{\exp(-ita)-\exp(-itb)}{it} \exp itx$ est intégrable sur l'espace produit et on peut appliquer le théoréme de Fubini.

D'oú $\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-T}^{+T} \frac{\exp(-ita)-\exp(-itb)}{it} \varphi(t)\, dt = \int\limits_{\mathbb{R}} J_T(x)\ dP(x)$

oú

$$\begin{aligned} J_T(x) &= \int\limits_{-T}^{T} \frac{\exp(-ita)-\exp(-itb)}{it} dt \\ &= \int\limits_{-T}^{T} \frac{\cos(t(x-a))-\cos(t(x-b))}{2\pi it} dt + i \int\limits_{-T}^{T} \frac{\sin(t(x-a))-\sin(t(x-b))}{2\pi it} dt \\ &= \int\limits_{0}^{T} \frac{\sin(t(x-a))-\sin(t(x-b))}{\pi t} dt = J_a(T,x) - J_b(T,x) \end{aligned}$$

oú

$$J_p(T,x) = \int\limits_{-T}^{T} \frac{\sin(t(x-p))}{\pi t} dt$$

D'ou

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-T}^{+T} \frac{\exp(-ita)-\exp(-itb)}{it} \varphi(t)\, dt = \int\limits_{\mathbb{R}} J_a(T,x) - J_p(T,x)\, dP(x).$$

De plus , d'aprés le lemme 1 , on a :

$x \rightarrow J_p(T,x)$ est majorée en module par 1 qui est P_X intégrable .

Donc on peut appliquer le T.C.D. et écrire :

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-T}^{+T} \frac{\exp(-ita)-\exp(-itb)}{it} \varphi(t)\, dt = \int\limits_{\mathbb{R}} \lim_{T\to\infty} J_a(T,x) - J_p(T,x)\, dp(x).$$

Par ailleurs :

$$\lim_{T} J_p(T,x) = \frac{1}{2} \text{ si } gne(x-p).$$

D'oú :

$$\lim_{T\to\infty} (J_a(T,x) - J_p(T,x)) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < a \text{ ou } x < b \\ \frac{1}{2} \text{ si } x = a \text{ ou } x = b \\ 1 \text{ si } \ a < x < b. \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{+T} \frac{\exp(-ita) - \exp(-itb)}{it} \varphi(t)\, dt &= \int_{]a,b[} dP(x) + \int_{(a)} \frac{1}{2} dp(x) + \frac{1}{2} \int_{(b)} dP(x). \\ &= p(]a,b[) + \frac{1}{2}\{p(\{a\}) + p(\{b\})\} \\ &= F(b) - F(a^+) + \frac{1}{2}(F(a^+) - F(a)) + \frac{1}{2}(F(b^+) - F(\\ &= \frac{F(b^+) + F(b)}{2} - \frac{F(a^+) + F(a)}{2}. \quad (c.q.f.d.). \end{aligned}$$

■

Corollaire 11 *: (justification de la terminologie caractéristique) Si X et Y deux v.a.r. ont la mém fonction caractéristique alors elles ont la mém loi de probabilité.*

Preuve. Soient X et Y deux v.a.r. de fonctions de répartitions respectives F_X et F_X et de fonctions caractéristiques

respectives φ_X et φ_X avec $\varphi_X = \varphi_Y$, montrons que $F_X = F_Y$.Soit a un point de continuité F_X et F_Y et $b \in \mathbb{R}$.

Nous avons alors :

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left[F_X\left(b^+\right)+F_X(b)\right]-F_X(a) &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{+T}\frac{\exp(-ita)-\exp(-itb)}{it}\varphi_X(t)\,dt \\
&= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{+T}\frac{\exp(-ita)-\exp(-itb)}{it}\varphi_Y(t)\,dt \\
&= \frac{1}{2}\left[F_Y\left(b^+\right)+F_Y(b)\right]-F_Y(a).
\end{aligned}
$$

En faisant tendre a vers $-\infty$, nous obtenons :

$$\left[F_X\left(b^+\right)+F_X(b)\right]=\left[F_Y\left(b^+\right)+F_Y(b)\right].$$

Donc si b est un point de continuité de F_X et F_Y , il vient : $F_X(b)=F_Y(b)$.

Si b est quelconque choisissons une suite (b_n) de points de continuité de F_x et F_y telle que $\lim_n b_n = b$ et $b_n < b$,nous avons :

$$F_X(b)=\lim_n F_X(b_n)=\lim_n F_Y(b_n)=F_Y(b). \qquad \text{(c.q.f.d.).}$$

■

Corollaire 12 *Si φ est intégrable sur $\mathbb{R}$ alors x admet une densité de propabilité f continue définie par :*

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-itx)\varphi(t)dt$$

(transformée de fourier inverse).

Preuve. Soit F la fonction de répatition de X .

Montons que F est continue en tout point de $\mathbb{R}$.Soit a un point de continuité de F et b quelconque.

Il existe une suite décroissante (b_n) de points de continuité de F telle que $\lim b_n = b$,

$$F\left(b_{n}\right)-F\left(a\right)=f(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi\left(t\right)\frac{\exp(-ita)-\exp\left(itb\right)}{it}dt$$

(cette intégrable exsiste puisque φ est intégrable).

D'aprés le T.C.D. ,puisque $\left|\varphi\left(t\right)\frac{\exp(-ita)-\exp(itb)}{it}\right|\leq\left|b_{n}-a\right|\left|\varphi\left(t\right)\right|$ n ous avons :

$$\lim_{n\to\infty}\left(F\left(b_{n}\right)-F\left(a\right)\right)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\varphi\left(t\right)\frac{\exp(-ita)-\exp\left(itb\right)}{it}dt=\frac{F\left(b\right)+F\left(b^{+}\right)}{2}-F\left(a\right)$$

D'ou :

$$F\left(b^{+}\right)=\lim_{n\to\infty}F\left(b_{n}\right)=\frac{F\left(b\right)-f\left(b^{+}\right)}{2}\implies F\left(b\right)=F\left(b^{+}\right).$$

Donc F est continue au point b. De plus

$$\begin{aligned}\left(F\left(b\right)-F\left(a\right)\right)&=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\varphi\left(t\right)\frac{\exp(-ita)-\exp\left(itb\right)}{it}dt=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\varphi\left(t\right)\left(\int\limits_{a}^{b}\exp-itx\ dx\right)dt\\&=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\left(\varphi\left(t\right)\int\limits_{a}^{b}\exp-itx\ dt\right)dx\end{aligned}$$

(d'aprés le théoréme de Fubini) $\implies f\left(x\right)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\varphi\left(t\right)\exp-itx$ est la densité de X . (c.q.f.d.) ■

Proposition 13 *Les v.a.r. $x_1,x_2.......x_n$ sont indépendantes ssi :*

$$\varphi_{x}\left(t_{1}....t_{n}\right)=\prod_{k=1}^{n}\varphi_{x_{k}}\left(t_{k}\right)\ \text{ où } x=\left(x_{1}....x_{n}\right).$$

Preuve. Condition nécessaire :

$\varphi_{x}\left(t_{1}....t_{n}\right)=E\left(\exp i<t,x>\right)=E_{k}\prod\limits_{k=1}^{n}\exp it_{k}x_{k}=\prod\limits_{k=1}^{n}E\left(\exp it_{k}x_{k}\right)$ par indépendance de la famille $\left(x_{1}.......x_{n}\right)$

D'où :

$$\varphi_x\left(t_1....t_n\right)=\prod_{k=1}^{n}\varphi_{x_k}\left(t_k\right).$$

Condition suffisante :

$$\varphi_x\left(t_1....t_n\right)=\prod_{k=1}^{n}\varphi_{x_k}\left(t_k\right)$$

Mais $\prod_{k=1}^{n}\varphi_{x_k}\left(t_k\right)$ est la fonction caractéristique de la mesure produit $p_{x_1}\otimes.....\otimes p_{x_n}$.

P_x et $p_{x_1}\otimes.....\otimes p_{x_n}$ ayant la méme fonction caractéristique sont nécessairement égales. (c.q.f.d.). ∎

Chapitre 2

Fonction génératrice

Si X est une variable aléatoir a' valeur dans $\mathbb{N}$,de loi de probabilité definie par : $P_n = P(X = n)$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} P_n \; z^n$ est convergent dans le disque unité : $\{z \;/\, |Z| \leq 1\}$.

Définition 14 *La fonction* $G_X(z) = E(z^x) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n \; z^n$ *définie dans le disque unité est appelée fonction génératrice de laplace de*X.

Proposition 15 *:*

1. $G_x(1) = 1$.
2. *L'intervalle* $[0, 1]$ *est inclus dans la dommaine de définition de tout fonction génératrice .*
3. *Si la loi de* X *est symétrique , c'est -a'-dire si* $L(x) = L(-x)$ *Alors :* $G_X(u)$ *est une fonction paire , tq* $u = \operatorname{Re} z$.

Preuve.

1. $G_X(1) = \sum_{k \in x(\Omega)} P(x = k) \; 1^k = \sum_{k \in x(\Omega)} P(x = k) = 1.$

2. $x(\Omega) = \mathbb{N}$, $\forall k \in \mathbb{N} : 0 \leq z \leq 1 \implies 0 \leq z^K \leq 1 \implies 0 \leq P(x=k) z^k \leq P(x=k) \implies 0 \leq \sum_{k=0}^{n} p(x=k) z^k \leq \sum_{k=0}^{n} p(x=k) \leq 1$par conséquent si d'ou fixe $z \in [0,1]$,la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ défini par : $\forall n \in \mathbb{N} : u_n = \sum_{k=0}^{n} p(x=k) z^k$ est une suite croisant , majorée par 1 donc convargente par conséquent la serie : $\forall n \in \mathbb{N}$: $G_X(z) = \sum_{k\in x(\Omega)}^{n} P(x=k) z^k$ est bien définée pour $z \in [0,1]$
3. $G_X(u) = E[\exp ux] = E[\exp u(-x)] = E[\exp(-u)x] = G_X(-u)$.

■

Remarque 16 *La fonction génératrice est le prolongement au disque unité de la fonction caractéristique qui apparait etre définie sur la frontiere de ce disque.*

2.1 Fonction génératrice des quelques lois :

2.1.1 Lois discrétes

Loi de bernoulli

Si X est une loi de bernoulli $X \to B(p)$ définie par :

$\forall k \in [0,1]$

$$\begin{cases} P(x=1) = p \\ P(x=0) = 1-p = q \end{cases}$$

On a Alors :

$$G_X(z) = \sum_{k=0}^{1} P(x=k) z^k = (1-p) t^0 + pt = pt + 1 - p$$

Donc : $G_x(z) = pt + (1-p)$ est fonction génératrice de la loi Bernoulli .

Nous obtenous Alors :

$$G'_X(z) = p \text{ et } G''_X(z) = 0$$

Nous en dédeuisons :

$$E(X) = G_X^{'}(1) = p \qquad \text{(L ésperence).}$$

$$\begin{aligned} V(X) &= G_X^{''}(1) + G_X^{'}(1) - \left(G_X^{'}(1)\right)^2 \\ &= 0 - p - p^2 \\ &= p(1-p) \qquad\qquad \text{(variance).} \end{aligned}$$

Loi binomial

$P[x = k] = (k^n)\, q^k (1-q)^{n-k}$ pour $k = 0, ..., n.$

la fonction génératrice se calcule a' l'aide de la formule de Binome :

$$G_X(z) = \sum_{k=1}^{n} (k^n)\,(qz)^k (1-q)^{n-k} = (qz + 1 - q)^n$$

donc $G_X(z) = (qz + 1 - q)^n$ est a fonction génératrice de la loi binomiale .

On a aussi :

$$\begin{aligned} G_X^{'}(z) &= np\,(pz + 1 - p)^{n-1}. \\ G_X^{''}(z) &= np^2 (n-1)\,(pt + 1 - p)^{n-2}. \end{aligned}$$

Nous en déduisons :

$$E(X) = G_X^{'}(1) = np\,(p + 1 - p)^{n-1} = np \qquad \text{(l'esprence).}$$

Et

$$\begin{aligned}
V(X) &= G''_X(1) + G'_X(1) - \left(G''(1)\right)^2 \\
&= np^2(n-1)(p+1-p)^{n-2} + np - (np)^2 \\
&= np^2(n-1) + np - (np)^2 = np - np^2 = np(1-np) \qquad \text{(variance).}
\end{aligned}$$

Loi de poisson

$P[X=k] = \frac{\exp(-\lambda)\lambda^k}{k!}$ pour $k \geq 0$, la fonction génératrice est une expentielle

$$G_X(z) = \exp -\lambda \sum_{k\geq 0} \frac{(\lambda z)^k}{k!} \exp \lambda (z-1).$$

Alors :

$G_X(z) = \exp \lambda (z-1)$ est la fonction génératrice de la loi poisson .

On a aussi :

$$\begin{aligned}
G'_X(z) &= \lambda \exp \lambda (z-1) \\
G''_X(z) &= \lambda^2 \exp \lambda (z-1)
\end{aligned}$$

Nous en dédiusons :

$$\begin{aligned}
E(X) &= G'_X(1) = \lambda \exp -\lambda(1-1) = \lambda \qquad \text{(l'esprence).} \\
V(X) &= G''_X(1) + G'_X(1) - \left(G'_X(1)\right)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda \qquad \text{(variance).}
\end{aligned}$$

2.1.2 Lois absoluments contines

Loi uniforme

Si X est de loi uniforme $x \to u[1,n]$ défine par : $\forall k \in [1,n] : P(x=k) = \frac{1}{n}$.

On a Alors :

$$
\begin{aligned}
G_X(z) &= \sum_{k=1}^{n} P(x=k) z^k \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} z^k = \frac{1}{n} \sum z^k \\
&= \begin{cases} \frac{t}{n} \frac{1-z^n}{1-z} & \text{si } z \neq 1 \\ 1 & \text{si } z = 1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Nous obtenons Alors en utilisant le théoréme de prolongement de fonction de classe $\mathbb{C}^1$:

$$
G_X^{'}(z) = \frac{n \sum_{k=2}^{n+1} \left(k^{n+1}\right)(z-1)^{k-2} - (n+1) \sum_{k=2}^{n} \left(k^n\right)(n-1)^{k-2}}{n}
$$

$$
G_X^{''}(z) = (n-1) \sum_{k=3}^{n+1} \left(k^{n+1}\right)(z-1)^{k-3} - 2x \frac{n^2-1}{n} \sum_{k=3}^{n} \left(k^n\right)(t-1)^{K-3} + (n+1) \sum \left(k^{n-1}\right)^{k-3}.
$$

Nous en déduisons :

$$
\begin{aligned}
E(X) &= G_X^{'}(1) = \frac{n\left(2^{n+1}\right) - n(n+1)\left(2^n\right)}{n} = \frac{n+1}{2}. \\
V(X) &= G_X^{''}(1) + G_X^{'}(1) - \left(G_X^{'}(1)\right)^2 = \frac{n^2-1}{3} + \frac{n+1}{2} - \left(\frac{n^2+1}{2}\right)^2 = \frac{n^2-1}{12}.
\end{aligned}
$$

Loi normale

Si $x \to N(0,1)$ On a :

$$
f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)
$$

Alors :

$$\begin{aligned} G_X(z) &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[\exp(zx) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)\right] dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{-x^2}{2} + zx\right) \; dx \\ &= \exp \frac{1}{2} z^2. \end{aligned}$$

2.2 Lien entre la fonction génératrice et les moments d'une v.a.r :

1. La fonction génératrice des moments d'un v.a. X est définit par :

$$M_X(x) = E(\exp tx) \,.\; t \in \mathbb{R}.$$

2. Si X est associeé une densité de probabilité continue f , alors la fonction génératrice des moments est donnée par :

$$M_X(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp tx \;\, f(x) \;\, dx.$$

Proposition 17 *Soit X un v.a. a valeur dans $\mathbb{N}$ dont la fonction génératrice $G_X(z)$ admet un rayon de convergence stricteement supérieur à 1.*

On a :

1. (a) $E(X) = G_X^{'}(1)\,.$

(b) $V(X) = G_X^{''}(1) + G_X^{'}(1) - \left(G_X^{'}(1)\right)^2.$

Preuve. on a le rayon de convergence R de série entiere est supérieur ou égale à 1.

$(R \geq 1)$

Si $R > 0$ on peut échanger la somme et la dérivée ce qui donne :

1. (a) $G'_X(z) = \sum_{k \geq 0} k z^{k-1} P[x = k]. \implies G'_X(z) = \sum_{k \geq 0} k[x = k] = E(X).$

   (b) $G''_X(z) = \sum_{k \geq 0} k(k-1) z^{k-2} P[x = k]. \implies G''_X(z) = \sum_{k \geq 1} k(k-1) P[x = k] = E(x(x-1)).$

■

2.3 Fonction génératrice des $\overrightarrow{v}$.a :

Dans le cas d'un $\overrightarrow{v}$ .a. à composantes réelles la fonction génératrice des moments est alors définie comme suite :

$$M_X(t) = E(\exp < t, x >)$$

ou t est un vecteur et $< t, x >$ est le produit scalaire .

Proposition 18 *Si $x_1, x_2, ..., x_n$ est une suite de variable aléatoire indépendants identiquement des destribution (iid) de fonction génératrice commune G_X est si N est un v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépend des x_i et de fonction génératrice G_N alors :*

$$G_{z_N}(Z) = G_N(G_X(Z)) \quad t.q : Z_N = x_1 + x_2 + ... + x_N.$$

Preuve. par le théoréme de Fubini est l'indépendance de N et$(x_i : i \in \mathbb{N})$.

$$\begin{aligned}
G_{Z_N}(Z) &= E\left(\left[\sum_{n\geq 0}\prod(N=n)\right]z^{x_1+x_2+......x_n}\right)\\
&= \sum_{k\geq 0}E\left(\prod(N=n)\,z^{x_1+x_2+......x_n}\right)\\
&= \sum_{n\geq 0}p(N=n)\,E\left(z^{x_1+x_2+......x_n}\right)\\
&= \sum_{n\geq 0}p(N=n)\,E(z^x)^n\\
&= G_N(G_x(z)).
\end{aligned}$$

■

Remarque 19 1. *La fonction caracteristique $\varphi_x(t)$ se dediut de la fonction génératrice des moments $G_x(z)$ en remplacant z par it.*

2. *On vient de voir que si une variable aléatoire admet une fonction génératrice de moment, elle admet des moments de tout les ordre entiers positif, la réciproque est fausse .*

Bibliographie

[1] KH. Khaled*. Probabilités.* $5^{\text{éme}}$ édition ,Office Des Publications Universitaires, (Alger), 2008.

[2] D. Foata, A. Fuchs. *Calcul des probabilités*, $2^{\text{éme}}$ édition Dunod, Pais 2003.

[3] J.Pierre Le coutre. *statistique et probabilités*, $4^{\text{éme}}$ édition Dunod,paris 2009.

[4] Messasi, *F Notions fondamentales de la théorie de probabilités.* Les éditions de l'université de Mentouri constantine,2001.