الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

N° Ref :……………

Centre Universitaire de Mila

Institut des sciences et de la technologie **Département de Mathématiques et Informatique**

THEME

Stationarity of outoregressive precesse and cousistency of the maximum likelihood estimator

Mémoire préparé En vue de l'obtention du diplôme de licence en Mathématiques

Préparé par :

Kamouche Abd Arraouf

Kaouache Radia

Mokhnache Afaf

Encadré par :

Ahmed Ghezal

Filière : mathématique

Année universitaire : 2012/2013

Remerciement

Nous tenons à remercier toujours et par cette occasion, en premier et avant tout, notre créateur <<ALLAH>> car sans sa majesté et son aide nous n'aurions pu arriver à se stade scientifique.

Nous présentons nos sincères gratitudes et remerciements à notre Encadreur « Ahmedghezal » pour le grande soutient morale Qu'il nous a apportée au cours de notre projet et aussi pour son aide précieuse et ses conseils judicieux qu'il nous a fait bénéficier.

Nous tenons à exprimer nos sincères remerciements à tout le Personnel de l'institut de l'informatique Ainsi que tous les Enseignants qui nous ont enseigné durant toutes nos années D'étude.

Enfin, Nous exprimons nos plus vifs remerciements à toute personne qui nous a aidé à élaborer ce travail de proche ou de loin.

Table des matières

Introduction Générale

La notion classique de fonction aléatoire (processus) définie par une famille de loi temporalles est quelque fois insuffisants d'une parte, elle permet pas l'étude de certains phenomexes, la variable aleatoire de fond par exemple d'autre parte elle nicessité pour les études de régularité l'utilisation de certaine compts (conepts) etrangers à sparabilité par exemple aussi.

L'estimation des paramètres d'un modèle ARMA(p, q) lorsque les ordres p et q sont supposés rrrconnus peut se réaliser par diérentes méthodes dans le domaine temporel :

-Moindres Carrés Ordinaires (modèle sans composante $MA, q = 0$). Dans ce cas, on retrouve les équations de Yule Walker. En remplaçant les autocorrélations théoriques

- Maximum de Vraisemblance approché (Box and Jenkins 1970)

Nous allons présenter ici brièvement la démarche de l'estimation par le maximum de vraisemblance. Cette maximisation est réalisée à l'aide d'algorithmes d'optimisation non

linéaire (Newton-Rahpson, méthode du simplex) que nous n'exposerons pas dans le cadre de ce chapitre. Nous nous contenterons ici de montrer comment s'écrit le programme de maximisation de la vraisemblance permettant d'estimer les paramètres d'un modèle $ARMA(p; q)$

Chapitre 1

Processus l'ineaires généraux

1.1 *Processus stationnaires*

Soit (X_t) une suite chronologique et X_1, X, ..., X_t, t observation de cette serie

1.2 processus linéaire

Définition 1.1 *Une processus l'ineaire est une suite de variable aléatoire definie par :*
$Xt = f(e_{t-1}, X_{t-1}, \ldots) + e_t$.
Ou f est une fonction lineaire.

Exemple 1.2 $X_t = ae_{t-1} + e_t$
$X_t = bx_{t-1} + cx_t - 2 + e_t$
$X_t = be_{t-1} + cx_t + e_t$

1.2.1 processus *stationnaires au sense faible*

Définition 1.3 *Le procussue stationnaire* $(X_t)_{t=0,\,1,\,2,\ldots}$*est une suite stationnaire au sense faible (ou stationnaire du seconde ordre) lorsque les trios proprities suivant sont :*
$E(X_t) = m < \infty\ \forall t \in \mathbb{N}$ *la moyenne ne depende pas d'order* t.
$E(X_t^2) < \infty\ \forall t \in \mathbb{N}$
$Cov(X_t, X_{t+h}) = \gamma_x(h)$ *Couvaraince ne depende pas de* t.

1.2.2 processus *stationnaires au sense fort*

Définition 1.4 *La suite* $(X_t)_{t=1,\,2,\,3\ldots}$*est stationnaire au sense fort si* $L(X_{1+h}, X_{2+h}, \ldots X_{t+h}) = L(X_1, X_2, X_h)$ *Cette définition de stationnaire est plus exigeant que le compete de stationnarité faible, comme l'indique le lemme suivant :*

Lemme 1.5 *Si* (X_t) *est fortement stationnaire et* $E(X_t^2) < \infty$ *alors* (X_t) *est faiblement stationnaire le reciproque est faux en génerale tout fois si* X_t *est gaussion alors :*

$L(X_1,\ ...,\ X_t) = N_n(u_n,\ \sum_n)$ *est les convest du stationnaire.*

1.2.3 *Relation entre stationnarité faible et forte*

Un processus strictement stationnaire de seconde ordre est faiblement stationnaire la réciproque n'est pas vraieen générale.

Contre exemple :

Soit (X_t) une suite de variable aléatoire indépendantes tells que :

$X_t \backsim \varepsilon(1)$ Lorsque t est paire

$X_t \backsim \varepsilon(1, 1)$ Lorsque t est impaire

Alors (X_t) et stationnaire avec e_t

Lorsque , cependant X_1 etX_t n'out pas la meme loi donc (X_t)n'est pas stationnaire.

Proposition 1.6 1) *Montrons que la fonction d'auto-covariance d'une processus stationnaire* (X_t) *et de type postife :*

Si

$$a = (a_1,\ ...,\ a_n)' \in \mathbb{R}^n t = (t_1,\ ...,\ t_n) \in \mathbb{Z}$$

et

$$\mathbb{Z}_t = (X_t - E(X_{t1}),\ ...,\ X_{tn-}E\left(X_{tn}\right))'.$$

Donc :

$$\begin{aligned} 0 &< var\left(a'Z_t\right) = a'E\left(Z_tZ_t'\right)a = a't_na \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} a_i\gamma\left(t_i - t_j\right)a_j \end{aligned}$$

on $t_n\left[\gamma\left(t_i - t_j\right)\right]_{1\leq i,j\leq n}$ *est la matrice de covaraince de* $(X_{t1},\ ...,\ X_{tn})$

2) *montrons que la fonction d'autocovaraince d'une processus stationnaire* (X_t) *et paire :*

Ona :

$$\gamma\left(-h\right) = covX_{t-h}, X_t = cov\left(X_t, X_{t+h}\right) = \gamma\left(h\right).$$

3) $|\gamma\left(h\right)| \leq \gamma\left(0\right)$

$$|\gamma\left(h\right)| = |E\left[X_{t+h}\right) - E\left(X_{t+h}\right)]\left[X_t - E\left(X_t\right)\right]| \leq \sqrt{var\left(X_{t+h}\right)}varX \leq var\left(X_{t+h}\right)^{\frac{1}{2}}var\left(X_t\right) \leq \gamma\left(0\right)$$

4)

$$\gamma\left(0\right) = cov\left(X_t, X_{t+0}\right) = cov\left(X_t, X_t\right) = var\left(X_t\right)$$

1.3 processus causale

Définition 1.7 *Un processus stationnaire X_t s'il peut-etre représente dans la forme :*

$$X_t = g(e_t,\, e_{t-1},\, ...)$$

Telle que g est une fonction linéaire t.

1.4 Le processus inversible

Définition 1.8 *Considérons le processus (X_t) que l'ou processus l'ineaire le processus (X_t) est inversible s'il admet la répresentations et definie par :*

$$e_t = g(X_t,\ X_{t-1},\ X_{t-2}\ldots)$$

1.5 Représentation spectral

Définition 1.9 *On appelle réprenentation spectrale de X la transformée de fourier de sa fonction de covariance de la suite :*

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty}\gamma(k)e^{-jk\omega}\,;\,\omega \in [-\pi,\ \pi]$$

1.6 *Fonction auto-covariance et auto-corrélation*

1.6.1 *Fonction auto-covariance*

Définition 1.10 *Soit (X_t) une processus stationnaire on appelle fonction d'auto-covariance la fonction définition de dansLa fonction d'auto-covariance d'une processus stationnaire vérifie :*

1) $\forall h \in \mathbb{Z} \Longrightarrow \gamma\left(-h\right) = \gamma\left(h\right)$ *elle est pair*
2) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall a_i \in \mathbb{Z} \Longrightarrow \sum\sum a_i a_j \gamma\left|t_i - y_j\right| > 0$ *elle est paire*
3) $\gamma\left(0\right) = var\left(X_t\right)$
4) $|\gamma(h)| \leq \gamma(0)$

1.6.2 *Fonction auto-corrélation*

Définition 1.11 *Soit (X_t) un processus stationnaire, on appelle fonction d'auto-corrélation fonction f définie de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$ par*

$\forall h \in \mathbb{Z},\ p(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)}$

propriété :

La fonction d'auto-corrélation d'un processus stationnaire vérifie :

1) $\forall h \in \mathbb{Z}$ alors $p(-h) = p(h)$

2) $p(0) = 1$

3) $|p(h)| \leq 1 \forall h \in \mathbb{Z}$

La fonction $P(h)$ et l'expression du bien linéaire entre X_t et X_{t-h} si t est l'instant présent $h > 0$, $P(h)$ est l'expression du bien linéaire entre le présent le passé d'ordre h.

Chapitre 2

Proprietées probaliste des modèle AR, MA et ARMA

Il peut paraitre étrange d'introduire des maintenant ces modèle cependant nous avons via la section précédent que certains processus avaient besoin d'une nombre finie de retards pour les caractériser entièrement alors que pour d'autre il fallait (théoriquement) un nombre infinie d'observation des valeur passées les processus AR et MA sont les processus de base vus dans ce cours, on les caractériser entièrement dans le chapitre 2

2.1 Modèle outorégressif (AR) (P)

Définition 2.1 *Ils ont été introduit par yuleen 1927 on prend en compte une dépendance linéaire du processus a son propre passé AR(p) :* $X_t = \sum_{i=1}^{k} \varphi_i X_{t-i} + e_t .... (1,\ 1)$.

$\varphi = (\varphi_1,\ ...,\ \varphi_k)$ *Sont des constantes réels et* e_t *un variable aléatoire Le terme* <<*autorégressif*>>*provient de la forme de l'équation* (1, 1) *dans laquelle la valeur courante de processus s'exprime sous la forme d'une régression des h valeur précédentes du processus plus un suite de variable aléatoire.*

Exemple 2.2 *Le processus autorégressif d'ordre* 1*, notie AR* (1) *est stationnaire est vérifie l'equation :*

$$X_t = \varphi X_{t-1} + e_t$$

ona : atout date

$$E(X_t) = \mu \ \ et\ var(X_t) = \sigma_x^2$$

et ona

$$E(X_t) = \varphi E(X_{t-1}) + E(E_t) = \varphi E(X_{t-1}) \ \ et\ var(X_t)\, \varphi^2 E(X_{t-1}) + var E(X_t) = \varphi^2 var(X_{t-1}) + \sigma^2$$

la stationnarité implique que

$$\begin{cases} \mu = \varphi\mu \\ \sigma_x^2 = \varphi^2\sigma_x^2 + \sigma^2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \mu = 0 \quad ou \quad \varphi = 1 \\ (1-\varphi^2) = \sigma_x^2 = \sigma^2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \mu = 0 \\ |\varphi| < 1 \end{cases}$$

Remarque 2.3 *La contraite $\mu = 0$ n'est pas trés four puisque on passé d'une processus d'esperence μ à un processus d'esperence nulle par simple transalation.*

Exemple 2.4 *Soit $(e_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un processus de varaince σ^2, soit le processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ suivant :*

$$X_t = X_{t-1} + e_t$$

Ona pour $h \in \mathbb{N}^*$: $X_t - X_{t-h} = e_t + ... + e_{t-h+1}$ d'ou

$$E\left[(X_t - X_{t-h})^2\right] = h\sigma^2$$

Si le processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ était stationnaire, on aurent

$$\begin{aligned} E\left[(X_t - X_{t-h})^2\right] &= E\left(X_t^2\right) + E\left(X_{t-h}^2\right) - 2E(X_tX_{t-h}) \\ &= E\left(X_t^2\right) + E\left(X_{t-h}^2\right) - 2E\left(X_tX_{t-h}\right)\left[E\left(X_t\right)\right]^2 - \left[E\left(X_t\right)\right]^2 \\ &= 4var\left(X_t\right) - E\left[(X_t + X_{t-h})^2\right] \\ &= 4varX_t \end{aligned}$$

Or il est impossible d'avoir, pour tout $h \in \mathbb{N}^*$, $h\sigma^2 \leq 4var\left(X_t\right)$ le processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ n'est pas statoinnaire

cas $|\varphi_1| < 1$ l'eqaution de recurrence $(1,\ 1)$ s'ecrite dans le cas $p = 1$

$$X_t = \varphi_t X_{t-1} + e_t ....(1,2)$$

en intéront $(1,\ 2)$, on obtient :

$$\begin{aligned} X_t &= \varphi_1\left(\varphi_1 X_{t-2} + e_t\right) + e_t \\ &= \varphi_1^2\left(\varphi_1 X_{t-3} + e_{t-2}\right)\varphi_1 e_{t-1} + e_t \\ &= \varphi_1^3 X_{t-3} + \varphi_{t-2}^2 + \varphi_1 e_{t-1} + e_t \\ &= \varphi_1^{h+1} X_{t-h+1} + \varphi_1^h e_{t-h} + ... + \varphi_1^2 e_{t-2} + \varphi_1 e_{t-1} + e_t ....(1.3) \end{aligned}$$

en prenant la limite quand $k \longrightarrow 0$, on deduit que

$$X_t = \sum_{h=0}^{\infty} \varphi_1^h e_{t-h}$$

cas $|\varphi_1| > 1$:
dans ce cas la d'aprés (1.3)

$$E\left|X_t - \sum_{h=0}^{\infty} \varphi_1^h e_{t-h}\right|^2 = |\varphi_1|^{2h+2} E\left(X_{t-h+1}^2\right)$$

deverge lorsque k tend vers l'infini par centre, on peut réecrive l'equation définissant (X_t) en fonction de (e_t) comme suivant:

$$X_t = -\varphi_t^{-1} X_{t+1} + \varphi_t^{-1} X_{t+1}.$$

2.1.1 *Processus* $AR(P)$ *causalité*

un processus $AR(P)$ est dite causal l'orsque il existe une suit e de nombre φ_k telle que $\sum |\varphi_t| < \infty$ et

$$X_t = \sum \varphi_t e_{t-h}.$$

propriétées :
le processus autorégressif $AR(P)$ est stationnaire si et seulment si le polynome en Z :

$$A(Z) = 1 - \sum_{k=1}^{p} \varphi_k e^k$$

est telle que $A(Z) \neq 0$ pour tout $Z \in \mathbb{C}$ telle que $|Z| \leq 1$

2.1.2 *Auto-correlatio d'une processus* $AR(P)$

Siot $(e_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un processus stationnaire de varaince σ^2 et un processue $AR(P)$

$$X_t = \sum_{i=1}^{k} \varphi_i e_{t-i} + e_t$$

pour tout $t \in \mathbb{Z}$ et $\varphi = \left(\varphi_1,\ \varphi_2, ..., \varphi_p\right) \in \mathbb{Z}^*$

Lemme 2.5 *On a :*

$$\gamma(0) = \frac{\sigma^2}{1 - \sum \varphi_i p(i)} \text{ et } p(h) = \sum_{i=1}^{k} \varphi_i p(h-i)$$

pour tout $h \in \mathbb{N}$

Preuve On a :

$$\begin{aligned}
\gamma(0) &= cov(X_t, X_{t-h}) = cov\left(X_t,\ \sum_{i=1}^{k}\varphi_i X_{t-i} + e_t\right) \\
&= \sum_{i=1}^{k}\varphi_i cov(X_t, X_{t-i}) + cov(X_t, e_t) \\
&= \sum_{i=1}^{k}\varphi_i \gamma(i) + cov\left(\sum_{i=1}^{k}\varphi_i X_{t-i} + e_t, e_t\right) \\
&= \sum_{i=1}^{k}\varphi_i \gamma(i) + cov(e_t, e_t) \\
&= \sum_{i=1}^{k}\varphi_i \gamma(0)\, p(i) + \sigma^2
\end{aligned}$$

On de méme
$\forall h \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
\gamma(h) &= cov(X_t, X_{t-h}) \\
&= cov\left(\sum_{i=1}^{k}\varphi_i X_{t-i} + e_t, X_{t-h}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{k}\varphi_i X_{t-h}\sum_{i=1}^{k}(X_{t-i}, X_{t-h}) + cov(e_t; X_{t-h}) \\
&= \sum_{i=1}^{k}\varphi_i \gamma(h-i)
\end{aligned}$$

■

2.1.3 *Auto-covaraince d'un processus* $AR(p)$

La fonction d'autocovaraince de $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ solution stationnaire de l'equation $(1,\ 2)$ et donne par la formulle :

$$\begin{aligned}
\gamma_x(h) &= \sigma^2 \sum_{i=-\infty}^{+\infty}\varphi_i\varphi_{i+h} \\
&= \sigma^2 \sum_{l=-\infty}^{+\infty}\varphi_l\varphi_{l-h}
\end{aligned}$$

Qui s'ecrite :

$$\gamma_x(h) = \begin{cases} \sigma^2 \sum_{i=\infty}^{+\infty} \varphi_1^k \varphi_1^{k+h} = \sigma^2 \frac{\varphi_1^h}{1-\varphi_1^2} \text{ si } h \geq 0 \\ \gamma_x(h) \text{ sinon} \end{cases}$$

oú $\gamma(h) = \sigma^2 \varphi_1^k (1 - \varphi_1^2)$

lorsque φ_1 est une réel strictement positif, le processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est positivement corrélé dans le sens ou tout ses coefficient d'autocovaraince sont positifs.

2.2 *modél moyenne mobile MA*(q)

Ils ont également été introduits en 1927 par skutsty

Définition 2.6 *Un processus moyenne mobile et un processus stationnaire de variance σ^2 on dite que $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un processus MA (Moving Average) d'ordre (q) noté $MA(q)$:*

Si : $\forall t \in \mathbb{Z}$ $MA(q) : X_t = e_t + \theta_1 e_{t-1} + ... + \theta_q e_{t-q}$.........(2, 1)

Ou $q \in \mathbb{N}^*$ est fixé et θ_1, ..., θ_q sont des constents réels et $\theta_q \neq 0$ et e_t une suite de variable aléatoire

Un processus MA est toujours stationnaire.

Exemple 2.7 *Soit une suite de varaible aléaitoire désperonce nulle et de varaince finie σ^2 on pose $X_t = e_t + \theta e_{t-1}$ la fonction d'autocovaraince de X_t est donnée par :*

$$cov(X_{t+h}, X_t) = cov(e_{t+h} + \theta e_{t+h-1},\ e_t + \theta e_{t-1}) = \begin{cases} \left(1 + \theta^2\right) \ si\ h = 0 \\ \theta \sigma e^2 \ si\ h = 1 ou\ -1 \\ 0\ si\ |h| > 1 \end{cases}$$

(X_t) est donc un processus stationnaire enfait ou peut montre qu'il est aussi stationnaire au sense forte.

2.3 Inversibilité des processus $MA(q)$

Définition 2.8 *Si $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un processus $MA(q)$ définie par (2, 1) on deduit que $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est inversible lorsque il existe une suite $(\theta_j)_{j=0,\ 1,}$ avec $\sum_{j=0}^{+\infty} |\theta_j| < \infty$ tell que :*

Définition 2.9

$$e_t = \sum_{j=0}^{+\infty} \theta_j X_{t-j}.$$

Définition 2.10 *Un representation cousal*

$$X_t = \sum_{j=0}^{+\infty} \theta_i e_{t-i}$$

d 'une processus stationnaire inversible si on peut aussi representaté la suite des variable aléatoire par une représentation causal

$$e_t = \sum_{i=0}^{+\infty} \pi_i X_{t-i}.$$

Oú $\sum_{i=0}^{+\infty} \pi_i < \infty$.

Remarque 2.11 *Tout processus à moyenne mobile est par définition causal.*

2.3.1 Représentation spectral de processus $MA(q)$

Propriétée :

Si (X_t) est une processus moyenne mobile

$$X_t = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \theta_k e_{t-k}.$$

Remarque 2.12 *Oú* (e_t) *est une suite des variable aléatoire avec* $\sum |\theta_j| < +\infty$ *si considre*

$$Y_t = \sum_{h \in \mathbb{Z}} \theta_h X_{t-h}.$$

Alors on a la relation suivants :

$$f_y(\omega) = f_x(\omega) \left| \sum_{h \in \mathbb{Z}} \theta_h e^{i\omega h} \right|^2.$$

Exemple 2.13 $Y_t = X_t - \theta X_{t-1}$ *ou* $|\theta| < 1$

Alors :

$$f_y(\omega) = f_x(\omega) \left| 1 + \theta e^{i\omega} \right|^2$$

2.4 Auto corrélation d'un processus moyenne mobile

Définition 2.14 *un processus $MA(1)$ est un processus stationnaire de variance δ^2 de la forme*

$$X_t = e_t + \theta e_{t-1}$$

pour un tel processus ona :

$$\begin{aligned} E(X_t) &= E(e_t) + \theta E(e_{t-1}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} var(X_t) &= var(e_t) + \theta^2 var(e_{t-1}) \\ &= \left(1+\theta^2\right)\delta^2 \end{aligned}$$

2.4.1 Auto corrélation MA(1) :

Ona :

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= cov(X_t, X_{t-1}) \\ &= cov(e_t + \theta e_{t+1}, e_{t-1} + \theta e_{t-2}) \\ &= \theta var E(e_{t-1}) = \theta\sigma^2. \end{aligned}$$

le coéfficient d'oto corrélation d'ordre 1 vaut donc

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\gamma_1}{\gamma_0} \\ &= \frac{\theta\sigma^2}{(1+\theta^2)\sigma^2} \\ &= \frac{\theta}{(1+\theta^2)}. \end{aligned}$$

Pour $h > 1$

On a :

$$\begin{aligned} \gamma_n &= cov(\gamma_t.\gamma_{t-h}) \\ &= cov(e_t + \theta e_{t-1},\ e_{t-h} + \theta e_{t-h-1}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc les coéfficients d'oto corrélation d'ordre superieur a 1 sont nuls : $l > 1 \Rightarrow p_n = 0$si on inverse la formule de p_1 on obtient

$$(1+\theta^2)p_1 = \theta \Leftrightarrow \theta^2 p_1 - \theta + p_1 = 0$$

équation en θ qui n'admet de solution que si

$$\Delta = 1 - 4p_1^2 > 0 \Leftrightarrow \theta^2 + p_1 - \theta + p_1 = 0.$$

2.4.2 Auto corrélation MA(q)

soit $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ une processus $MA\,(q)$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$

$$X_t = e_t + \sum_{i=1}^{q} \theta_i e_{t-i}$$

Or :

$$\gamma\,(0) = var\left(e_t + \sum_{i=1}^{q} \theta_i e_{t-i}\right)$$
$$= \sigma^2 \left(1 + \sum_{i=1}^{q} \theta_i^2\right)$$

Ona de meme$\forall h \in \mathbb{N}^*$

$$\gamma\,(h) = cov\,(X_t,\, X_{t-h})$$

$$= cov\left(e_t + \sum_{i=1}^{q} \theta_i e_{t-i},\, e_{t-h} + \sum_{i=1}^{q} \theta_i e_{t-h-j}\right)$$

$$= \begin{cases} 0 \text{ si } h > q \\ \theta_h + \sum_{i=h+1}^{q} \theta_{i-h}\theta_i & sih \in (1, ..., q) \end{cases}$$

Proprietés :

On s'interesse à la fonction d'auto covariance d'un tel processus pour $h = 0$, on obtient :

$$\gamma\,(0) = \left(1 + \theta_1^2 + ... + \theta_q^2\right)\sigma^2$$

Et pour $1 \leq h \leq q$

$$\gamma(h) = (\theta_h + \theta_{h+1}\theta_1 + ... + \theta_q\theta_{q-h})\,\sigma^2$$

Notons que $\gamma(h) = 0$ pour$h > q$ la fonction d'auto corrélation s'en déduit et on particulier $p(h) = 0$ pour $h > q$

on sepose la question de la réciproque à savoir si $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un processus stationnaire et si $\gamma(h) = 0$ pour $h > q$

alors $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$est un $MA(q)$ le résultat est vraie

$$MA(q) \Longleftrightarrow \gamma\,|h| = 0$$

2.5 Modéles ARMA (p, q)

Développé par BOX&Jenkis 1970 les modéle ARMA sont un conbinaisent des modéles autoregréssif est moyenne mobile :

$$ARMA(P, q) : X_t - \varphi X_t + ... + \varphi_p X_{t-p} = e_t + \theta e_{t-1} + ... + \theta_q e_{t-h}$$

Définition 2.15 *on dite qu'un processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un processus $ARMA$ (autoregréssif moyenne mobile) d'order (p, q), noté $ARMA(p, q)$ si $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est stationnaire il existe $\varphi = \left(\varphi_1, ..., \varphi_p\right) \in \mathbb{R}^p$ avec $\varphi_q \neq 0$ et $\theta = (\theta_1, ..., \theta_q)$ tel que pour tout :*

$$X_t - \sum_{i=1}^{p} \varphi_i X_{t-i} = e_t + \sum_{i=1}^{p} \theta_i e_{t-i}$$

Remarque 2.16 *un processus $AR(p)$ est un processus $ARMA(p, 0)$ un processus $MA(q)$ est un processus $ARMA0, q$*

2.5.1 Inversibilité d'un processus $ARMA\ (p, q)$

Soit l'équation récurrent :

$$X_t - \varphi_1 X_{t-1} - ... - \varphi_p X_{t-p} = e_t + \theta e_{t-1} + ... + \theta_q e_{t-q} \quad (3, 1)$$

Les φ_j et θ_j sont des nombre reéls on pose :

$$\varphi(z) = 1 - \varphi z - ... - \varphi_p z^p.$$

Et

$$\theta(z) = 1 + \theta z + ... + \theta_p z^p$$

on suppose $\varphi(z)$ et $\theta(z)$ n'est pas de zéro connue.

Alors l'équation $(3,1)$ admet une soulition stationnaire inversible ou second ordere si et suseailment le polynôme $\theta(z) \neq 0$ pour $|z| \leq 1$.Cette solution est unique et a pour expréssion :

$$e_t = \sum_{k\geq 0} \pi_k X_{t-k}$$

on la suite (π_k) est donner par les coéfficient développement

$$\frac{\varphi(e)}{\theta(e)} = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k e^k$$

2.5.2 Processus causal ARMA(p,q)

Existance d'une solution causal à l'équation

$$X_t - \varphi_1 X_{t-1} ... \varphi_p X_{t-p} = e_t + \theta_1 e_{t-1} + ... + \theta_q e_{t-q}$$

2.5.3 Auto corrélation d'un processus ARMA

On obtient à l'aide de la représentation $MA(\infty)$

$$\gamma(h) = cov(X_t, X_{t-h}) = cov(e_t + \sum \varphi_i e_{t-i}, e_{t-h} + \sum \varphi_i e_{t-i-h}) = \sigma^2 \sum \varphi_i \varphi_{i+h} o\acute{u} \varphi_0 = 1$$

On a :

$$X_t - \varphi_1 X_{t-1} - ... - \varphi_p X_{t-p} = e_t + \theta e_{t-1} + ... + \theta_q e_{t-q}$$

D'ou :

$$\gamma(h) - \varphi_1 \gamma(h-1) - ... - \varphi_p \gamma(h-p)$$
$$= cov(e_t + \theta_1 e_{t-1} + ... + \theta_q e_{t-q}, X_{t-h})$$

$$= cov\left(e_t + \theta_1 e_{t-1} + ... + \theta_q e_{t-q}, \sum \varphi_i e_{t-i-h}\right)$$

$$= \begin{cases} \sigma^2 \sum \varphi_i \theta_{h+i} \text{ si } \ h \in (0, ..., q) \\ 0 \text{ si } h > 0 \end{cases}$$

Les autocorrélation décroissant vers 0

$$\forall h > q$$

Chapitre 3

Estimation

Etant donné le processus(X_t) , $t \in Z$ admettant une représentation $ARMA(p,\, q)$:

$$X_t - \sum_{i=1}^{p}\varphi_i X_{t-1} = e_t - \sum_{i=1}^{q}\theta_i e_{t-i}.$$

Le probléme est d'estimer les paramétres $\varphi(i = 1,\ ..., p), \theta_j(j = 1, ..., q)$

Définition 3.1 *On peut dire qu'un estimateur est une statistique dont la valeur est une estimation du parmètre θ*

Exemple 3.2 *1) $\bar{X}$ est une estimateur de la moyenne.*

2) σ^2est une estimateur de la variance σ^2.

3.0.4 Estimation des coefficients d' autocovariance et d'autocorrélation

Considérons à nouveau un processus (X_t) stationnaire au second order, de moyenne $\mu etdefonctiond'autocovariance \gamma\,(h)$ supposée de module sommable pour estimer la suite $\gamma\,(h)\,.$

nous considérons les estimateur dits de covaraince empiriques définie par :

$$\hat{\gamma}_n\,(h)$$

$$= \begin{cases} n^{-1}\displaystyle\sum_{t=1}^{n-|h|}\left(X_{t+|h|} - \hat{\mu}_n\right)(X_t - \hat{\mu}_n) \text{ si } & |h| \leq n-1 \\ \text{0 sinon} \end{cases} \quad (\alpha)$$

Oú $\hat{\mu}_n = n^{-1}\displaystyle\sum_{t=1}^{n} X_t.$

Remarquons que le nombre d'observation, dont nous disposons etant présément égal à n, il n'existe pas de paires d'opservation séparées de plus de $n-1$ intervalles de temps et donc l'expression (α) ne permet pas d'estimer les valeurs de $\gamma(h)$ pour $|h| \geq n$, de plus lorsque $|h|$ est proche de n,il est clair que l'estimateur (α) de la covariance n'est pas faible dans la mesure ou on ne dispose que de peu de paires d'observations $\left(X_t, X_{t+|h|}\right)$,ce qui implique que l'effet de moyennage statistique ne peut pas jouer .la partie le plus utilisé de la fonction d'outo covariance empirique est celle qui correspond au valeurs du décalage n significativement plus faibles que le nombre d'observations n. A échantillon fini, $\hat{\gamma}_n(h)$ est un estimateur biaisé de $\gamma(h)$.

Un calcul simple montre par exemple que :

$$E\left[\hat{\gamma}_n(0)\right] = \gamma(0) - \tfrac{1}{n} \sum_{k=(n-1)}^{(n-1)} \left(1 - \tfrac{|k|}{n}\right) \gamma(k)$$

Toute fois on peut montrer que, pour tout h l'estimateur donné par (α) est asymptotiquement sans biais dans le sens où $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} E\left[\hat{\gamma}_n(h)\right] = \gamma(h)$ à la vitesse $\frac{1}{n}$.Une propriété importante de cette estimateur et que la suite $\gamma_n(h)$ est de type positif. En effet, si on définit le périodogramme par :

$$I_n(\lambda) = \tfrac{1}{2\pi n} \left| \sum_{k=1}^{n} \left(X_t - \hat{\mu}_n\right) \exp(-it\lambda) \right|^2 \quad (\beta)$$

Par construction, $I_n(\lambda)$ est un fonction positive pour $\lambda \in [-\pi, \pi]$. Par ailleurs,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \exp(i\lambda h)\, I_n(\lambda)\, d\lambda = \tfrac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} \sum_{s=1}^{h} \left(X_t - \hat{\mu}_n\right)\left(X_s - \hat{\mu}_n\right) \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp\left(i\lambda(h - t + s)\right) d\lambda = \hat{\gamma}_n(h)$$

3.1 Maximum de vraisemblance

Si le processus e_t est gaussien $N(0,\sigma^2)$, alors $e \sim N(0,\sigma^2 I)$ et $X \sim N(0,\sigma^2\Omega)$. Ainsi, la varaisemblance densité du vecteur $Y = (Y_1, ..., .Y_t)'$est donné par :

$$L\left(X_1,\ ...,\ X_T; \varphi,\ \theta,\ \sigma^2\right) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{T}{2}}} \frac{1}{(\det\omega)\,\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{-1}{2\sigma^2} Y'\omega^{-1} Y\right).$$

La log-vraisemblance est alors donnée par :

$\ln L\left(X_1,\ ...,\ X_T; \varphi,\ \theta,\ \sigma^2\right) = -\frac{T}{2}(2\pi) - \frac{T}{2}\ln\sigma^2 - \frac{1}{2}\ln(\det\omega) - \frac{1}{2\sigma^2} Y'\omega^{-1} Y$

Le probléme est que cette log-vraisemblance est difficile à calculer et donc à maximiser à cause de $(\det \omega)$ et de $\boldsymbol{\omega^{-1}}$ (matrice $T \times T$). De plus, il faut se donner des valeurs préliminaires pour les paramétres, puisque la maximisation de la log-vraisemblance utilise des algorithmes de maximisation itératifs.

Bibliographie

[1] R.Biscay .M.lavielle,A.Conzalez I. Clarce .end P Valdes .maximum à positerionri estimation af change poite in the EEG int J. of Biou _Medical compting 38 : 199,196,1915.

[2] Jemes D Hamilton Time Series analysis Princeton Universty Press 1994

[3] D.W.Allon statistics of atonic ferquency standards.IEEE Procedings 54 :221-235,1966

[4] Ashley, R (1988) :"un the relation worth of recent macroe cononic forecasts", internationale journal of farecasting 4,363,376