الجمهورية الجزائرية الديموقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Minstère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

CENTRE UNIVERSITAIRE DE MILA
INSTITUT DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE

Réf. /12

Mémoire de fin d'étude
Présenté pour l'obtention du diplôme de

Licence Académique

Domaine : **Mathématiques et Informatique**
Filière : **Mathématiques**
Spécialité : **Mathématiques Fondamentales**

Thème

Etude comparative entre l'intégral de Riemann et l'intégral de Lebesgue

Présenté par :
1-Borni Amina
2-Rekab Souheila

Dirigé par :
Mr. Mehazzem Allal

Année universitaire 2011-2012

Remerciements

En premier lieu, nous tenons à remercier Dieu tout puissant qui nous a donné la force pour terminer nos études et ce travail.

Nous remercions et nous exprimons notre profonde gratitude et respect à notre encadreur

Le professeur A.Mehazzam

Pour l'aide, les conseils et sa grande disponibilité qui ont abouti à la réalisation de ce travail.

Nous très vifs remerciement et notre gratitude s'adressent évidement à tous nos enseignants qui ont contribué à notre formation.

Nous exprimons également notre remerciement au personnel de l'Institut des Sciences et de la Technologie.

Enfin, nous tenons à remercier toute personne qui nous a aidés de près ou de loin afin de réaliser ce travail.

Amina & Souheila

Table des matières

Introduction Générale

L'histoire des mathématiques doit beaucoup à la théorie de l'intégration, et de tout temps, sa place prédominante a façonné l'analyse en offrant à qui une solution, à qui un problème. Le lustre des "méthodes intégrales " en Grèce antique l'atteste, et bien qu'il faille attendre le calcul infinitésimal pour une première formalisation, elles nous avaient déjà offert de profonds et beaux résultats : les athéniens évaluèrent les grandeurs de l'espace puis en démontrèrent implicitement l'existence et l'unicité ; au $XVII^e$ siècle naissent des méthodes générales de "calcul de l'infini" (rectification de courbes, quadratures, etc...). C'est Leibnitz qui opère le fondement de la théorie de l'intégration (Géometria recondita,1686), perpétué jusqu'aujourd'hui, d'une part par un symbolisme intégral reliant intégration et dérivation, d'autre part par la mise en place des principaux théorèmes.

L'intégrale de Riemann (Bernhard Riemann, 1854, publication posthume en 1867) puis l'intégrale de Lebesgue (Henri Lebesgue, 1902) ont marqué les esprits par leur formalisation aboutie. L'intégration est encore un sujet pour la recherche contemporaine ; en témoigne des extensions telles que l'intégrale d'itou, l'intégrale de Kurzweil-Henstock, ou la recentre construction de Bon giorno (1996).

Le schéma général utilisé pour construire une intégrale et qui cherche à mesurer l'aire du domaine sous la courbe, est le même pour les trois approches de l'intégration, au sens de Riemann, au sens de Lebesgue, ou au sens de Kurzweil-Henstock.

D'abord, on considère une famille de fonctions élémentaires, pour les quelles nous avons un moyen évidait de mesurer l'aire sous la courbe. Dans le cas de l'intégrale de Riemann ou de Kurzwiel-Henstock, les fonctions en escalier dont l'aire sous la courbe est égale à la somme des aires des rectangles ; les fonctions en escalier étant constantes sur des intervalles, le domaine sous la courbe d'une telle fonction peut alors être vu comme une réunion de rectangles. Pour l'intégrale de Lebesgue, les fonctions élémentaires sont les fonctions étagées, constantes, non plus sur des intervalles des parties mesurables (approche plus souple et plus générale).

L'intégrale de Riemann permet d'intégrer entre les fonctions croissantes ou décroissantes, et les fonctions continues, donc aussi les fonctions continues par morceaux, ainsi que les fonctions monotones par morceaux. Cependant une limite simple (c'est -à-dire $f(x) = \lim f_n(x)$ pour tout x de l'intervalle $[a, b]$ sans condition d'uniformité en x) de fonctions Riemann intégrables n'est pas nécessairement Riemann intégrable. Il est possible de caractériser les fonctions intégrables au sens de Riemann : ce sont les fonctions bornées dont l'ensemble des poids de discontinuité est de mesure nulle (théorème de Lebesgue). L'intégration au sens de Lebesgue permet d'intégrer plus de fonctions (dont des fonctions qui ne sont même pas localement bornées), et elle donne la même valeur à l'intégrale lorsque la fonction est déjà intégrable au sens de Riemann. Elle a l'avantage de munir l'espace vectoriel des fonctions intégrables (modulo l'égalité presque partout) d'une structure d'espace normé complet. Ceci est essentiel pour beaucoup d'applications. Cependant, on perd la notion de sommes de Riemann, et il existe des contextes (étude des suites uniformément distribuées par exemple) où les fonctions intégrables au sens de Riemann surviennent naturellement ; pour une généralisation de cette dernière permettant néanmoins d'intégrer également toutes les fonctions mesurables (au sens de Lebesgue), voir l'intégrale de Kurzweil-Henstock.

Chapitre 1

Intégrales de Riemann

1.1 L'intégrale de Riemann d'une fonction en escalier

Dans toute cette section, on note a, b deux réels tels que $a \leq b$ et $(E, \|.\|_E)$ un espace de Banach sur $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. on note $\mathcal{F}([a, b], E)$ l'espace vectoriel des fonctions de $[a, b]$ dans E. Pour $f \in \mathcal{F}([a, b], E)$, on note $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} \|f(t)\|_E$, qui est un élément de $[0, +\infty[$ par définition de la borne supérieur et qui est fini ssi f est bornée. Dans la suite, on notera $\mathfrak{B}([a, b], E)$ l'espace vectoriel des fonctions bornées de $[a, b]$ dans E. L'application $\|.\|_\infty$est une semi-norme sur $\mathcal{F}([a, b], E)$ et une norme sur $\mathfrak{B}([a, b], E)$.

1.1.1 Fonction en escalier

Supposons d'abord $a < b$.

Définition 1.1 *(Subdivision de $[a, b]$) Soit $m \in \mathbb{N}$. On appelle subdivision d'ordre m de $[a, b]$ tout élément $\alpha = (\alpha_0, ..., \alpha_m)$ de $\mathbb{R}^{m+1}$ vérifiant $a = \alpha_0 < \alpha_1 < ... < \alpha_m = b$. on note $S(m)$ l'ensemble des subdivisions d'ordre m de $[a, b]$ et on pose $S = \cup_{m\in\mathbb{N}} S(m)$. Un élément de S est appelé subdivision de $[a, b]$. Le nombre réel $k(\alpha) = \max_{0\leq i\leq m-1} (\alpha_{i+1} - \alpha_i)$ est appelé le pas de la subdivision $\alpha = (\alpha_0, ..., \alpha_m)$.*

On notera que, puisque $a < b$, une subdivision de $[a, b]$ possède au moins deux élément. Lorsque $a = b$, on pose $S(m) = \varnothing$ pour tout m. Si $\alpha = (\alpha_0, ..., \alpha_m)$ est une subdivision de $[a, b]$, on note $\langle\alpha\rangle$ l'ensemble $\{\alpha_0, ..., \alpha_m\}$. Réciproquement, à toute partie finie C de $[a, b]$ contenant a et b est associée une unique subdivision de $[a, b]$, que l'on notera $[C]$ et qui s'obtient en ordonnant les éléments de la partie C. Il existe une opération naturelle sur S : si $\alpha = (\alpha_0, ..., \alpha_m)$ et $\beta = (\beta_0, ..., \beta_l)$ sont des subdivisions de $[a, b]$, on notera $\alpha \vee \beta = [\langle\alpha\rangle \cup \langle\beta\rangle]$ l'opération $\vee$ sera dite réunion des subdivisions. Il existe par ailleurs une relation d'ordre partiel naturelle sur S : La relation d'inclusion des ensembles accoisé. On notera $\alpha \leq \beta$ lorsque $\langle \alpha \rangle \subset \langle \beta \rangle$.

Définition 1.2 *(Fonction en escalier). Une fonction φ de $[a, b]$ dans E est dit en escalier s'il existe une subdivision $\alpha = (\alpha_0, ..., \alpha_m)$ de $[a, b]$ telle que φ soit constant sur chacun des intervalles ouverts $]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$, $0 \leq i \leq m-1$. Une telle subdivision sera dite adaptée à la fonction en escalier φ. On notera $\mathcal{E}sc\left([a, b], E\right)$, ou simplement Esc si le contexte le permet, l'ensemble des fonctions en escalier de $[a, b]$ dans E. Lorsque $a = b$, on pose $\mathcal{E}sc\left(\{a\}, E\right) = \mathcal{F}\left(\{a\}, E\right)$(cette ensemble à E via l'application $\varphi \to \varphi(a)$).*

Proposition 1.3 *L'ensemble $\mathcal{E}sc\left([a, b], E\right)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathfrak{B}\left([a, b], E\right)$ des fonctions bornées de $[a, b]$ dans E, si E est une algèbre, $\mathcal{E}sc\left([a, b], E\right)$ est une sous-algèbre de l'algèbre $\mathfrak{B}\left([a, b], E\right)$.*

Preuve. Une fonction en escalier est bornée (son ensemble image est fini), donc $\mathcal{E}sc \subset \mathfrak{B}$. De plus, $\mathcal{E}sc \neq \varnothing$ car $\mathcal{E}sc$ contient la fonction nulle. Vérifiant la stabilité par combinaison linéaire, soit $\varphi \in \mathcal{E}sc$ et soit $\lambda \in \Bbbk$, $\lambda\varphi$ est encore en escalier : si α est une subdivision adaptée à φ, α est aussi adaptée à λf. Soient φ et ψ deux éléments de les $\mathcal{E}sc$. Si α est une subdivision adaptée à φ et β une subdivision adaptée à ψ, alors $\alpha \vee \beta$ est à la foi adaptée à φ et à ψ, donc aussi à $\varphi + \psi$, ce qui montre que $\varphi + \psi \in \mathcal{E}sc$. De la même manière, si E est une algèbre, le produit $\varphi \cdot \psi$ est encore en escalier sur $[a, b]$ ($\alpha \vee \beta$ pour subdivision adaptée). ■

1.1.2 Intégrale d'une fonction en escalier

On suppose d'abord $a < b$. Considérons un élément φ de $\mathcal{E}sc$, et deux subdivisions α et β adaptées à φ. On pose

$$I_\alpha(\varphi) = \sum_{i=0}^{m-1} (\alpha_{i+1} - \alpha_i)\, c_i \text{ et } I_\beta(\varphi) = \sum_{i=0}^{m-1} \left(\beta_{j+1} - \beta_j\right) d_j$$

où c_i (respectivement d_j) désigne la valeur (constante) de φ sur l'intervalle $]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$ (respectivement $\left]\beta_j, \beta_{j+1}\right[$). On vérifie alors que $I_\alpha(\varphi) = I_{\alpha\vee\beta}(\varphi) = I_\beta(\varphi)$, et cette remarque justifie la définition suivante.

Définition 1.4 *(Intégrale de Riemann d'une fonction en escalier). Soit $\varphi \in \mathcal{E}sc\left([a, b], E\right)$. On appelle intégrale de Riemann de φ l'élément I_α de E ci-dessus, où α est une subdivision quelconque adaptée à φ. On la note*

$$\int_a^d \varphi(t)\, dt.$$

Lorsque $a = b$, on pose $\int_a^d \varphi(t)\,dt = 0$ pour toute fonction φ de $\{a\}$ dans E.

La propriété suivante est fondamentale. Nous en ferons un usage récurrent dans les constructions qui vont suivre.

Proposition 1.5 *(Inégalité triangulaire pour l'intégrale des fonctions en escalier). Pour tout $\varphi \in \mathcal{E}sc([a,b], E)$, l'application $\|\varphi\|_E : t \to \|\varphi(t)\|_E$ vérifie $\|\varphi\|_E \in \mathcal{E}sc([a,b], \mathbb{R})$ et $\left\|\int_a^d \varphi(t)\,dt\right\|_E \leq \int_a^d \|\varphi(t)\|_E\,dt$.*

Preuve. Toute subdivision α adaptée à φ est encore adaptée à $\|\varphi\|_E$, qui est donc en escalier.

Notons c_i la valeur de φ sur $]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$. Alors, on a

$$\left\|\int_a^d \varphi(t)\,dt\right\|_E = \left\|\sum_{i=0}^{m-1}(\alpha_{i+1}-\alpha_i)\,c_i\right\|_E \leq \sum_{i=0}^{m-1}(\alpha_{i+1}-\alpha_i)\,\|c_i\|_E = \int_a^d \|\varphi(t)\|_E\,dt.$$

On déduit de la proposition précédent, le résultat suivant, qui est à la base des extensions ultérieures de la notion d'intégrale. ■

Proposition 1.6 *L'application P de $(\mathcal{E}sc, \|.\|_\infty)$ dans $(E, \|.\|_E)$ définie par*

$$P(\varphi) = \int_a^d \varphi(t)\,dt$$

est une application linéaire continue (donc uniformément continue) et vérifie $\left\|\int_a^d \varphi(t)\,dt\right\|_E \leq (b-a)\,\|\varphi\|_\infty$.

Preuve. Soit $\varphi \in \mathcal{E}sc$ et soit $\lambda \in \Bbbk$. toute subdivision adaptée à φ est aussi adaptée à $\lambda\varphi$ et si $\alpha = (\alpha_0, ..., \alpha_m)$ est une telle subdivision :

$$\int_a^d \lambda\varphi(t)\,dt = \sum_{i=0}^{m-1}(\alpha_{i+1}-\alpha_i)(\lambda c_i) = \lambda\sum_{i=0}^{m-1}(\alpha_{i+1}-\alpha_i)\,c_i = \lambda\int_a^d \varphi(t)\,dt,$$

où c_i est la valeur de φ sur $]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$. Soit maintenant φ et ψ dans $\mathcal{E}sc$ et $\gamma = (\gamma_0, ..., \gamma_k)$ une subdivision adaptée à la fois à φ et à ψ (prendre $\gamma = \alpha \vee \beta$, où α et β sont adaptées à φ et à ψ respectivement). Alors γ est aussi adaptée à $\varphi + \psi$; en notant

c_i et d_i les valeurs de φ et ψ sur $]\gamma_i, \gamma_{i+1}[$, on a

$$\begin{aligned}
\int_a^d (\varphi + \psi)(t)\, dt &= \sum_{i=0}^{k} (\gamma_{i+1} - \gamma_i)(c_i + d_i) = \sum_{i=0}^{k} (\gamma_{i+1} - \gamma_i) c_i + \sum_{i=0}^{k} (\gamma_{i+1} - \gamma_i) d_i \\
&= \int_a^d \varphi(t)\, dt + \int_a^d \psi(t)\, dt,
\end{aligned}$$

ce qui montre la linéarité de P. Enfin, d'après la proposition précédent on a

$$\left\| \int_a^d \varphi(t)\, dt \right\|_E \leq \int_a^d \|\varphi(t)\|_E\, dt = \sum_{i=0}^{m-1} (\alpha_{i+1} - \alpha_i) \|c_i\|_E \leq \|\varphi\|_\infty \sum_{i=0}^{m-1} (\alpha_{i+1} - \alpha_i) = (b-a) \|\varphi\|_\infty,$$

Ce qui montre la continuité de P de $(\mathcal{E}sc, \|.\|_\infty)$ dans $(E, \|.\|_E)$ et l'inégalité annoncée.

■

1.2 Intégrale de Riemann d'une fonction réglée

On note encore $[a, b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$, et $(E, \|.\|_E)$ un espace de Banach sur $\mathbb{k}$. Nous allons maintenant exploiter la continuité uniforme de l'application P et la complétude de E pour étendre directement l'intégrale de Riemann à une classe de fonctions plus large que $\mathcal{E}sc([a, b], E)$.

1.2.1 Fonction réglées

Définition 1.7 *(Fonction réglée). On note $\mathfrak{Reg}([a, b], E)$, ou simplement $\mathfrak{Reg}$ si le contexte le permet, l'adhérence de $\mathcal{E}sc([a, b], E)$ dans $\mathcal{F}([a, b], E)$ pour la topologie définie par la semi-norme $\|.\|_\infty$. On appelle fonctions réglées les éléments de $\mathfrak{Reg}([a, b], E)$. Lorsque $a = b$, on pose $\mathfrak{Reg}(\{a\}, E) = \mathcal{F}(\{a\}, E) \simeq E$.*

Proposition 1.8 *Une fonction réglée sur $[a, b]$ est bornée sur $[a, b]$ et l'ensemble $\mathfrak{Reg}([a, b], E)$ est exactement l'adhérence de $\mathcal{E}sc([a, b], E)$ dans $\mathfrak{B}([a, b], E)$ pour la norme $\|.\|_\infty$ et est donc un sous-espace vectoriel fermé de $\mathfrak{B}([a, b], E)$.*

Preuve. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\sup_{t \in [a,b]} \left\| f(t) - \varphi_{n_0}(t) \right\|_E < 1$. Alors, pour tout $t \in$

$[a, b]$, $\|f(t)\|_E \leq \left\| f(t) - \varphi_{n_0}(t) \right\|_E + \left\| \varphi_{n_0}(t) \right\|_E \leq 1 + \left\| \varphi_{n_0}(t) \right\|_E$. Une fonction en escalier étant borée, f l'est également. On a donc $\mathfrak{Reg} \subset \mathfrak{B}$ et, par définition de la norme infinie, $\mathfrak{Reg} = \overline{\mathcal{E}sc}^{(B)}$.

L'adhérence d'un sous-espace vectoriel, la proposition est démontrée. ■

Corollaire 1.9 *Les fonctions continues de $[a,b]$ dans E sont réglées. Lorsque $E=\mathbb{R}$, les fonctions monotones de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ sont réglées.*

Preuve. Les fonctions continues possèdent une limite en tout point et sont donc

réglées. Lorsque $E = \mathbb{R}$ et que f est monotone, on a, pare exemple pour f croissante, $\lim_{t\to t_0, t<t_0} f(t) = \sup_{t\in[a,t_0[} t(t)$ pour tout point $t_0 \in [a,b[$ et $\lim_{t\to t_0, t<t_0} f(t) = \inf_{t\in]t_0,b]} f(t)$ pour tout point $t_0 \in]a,b]$. On peut donc de nouveau appliquer la procède et le corollaire est démontré.

Notons que, bien que $\mathcal{E}sc$ soit dense dans l'ensemble $\zeta^0([a,b],E)$ des fonctions continues de $\zeta^0([a,b],E)$ dans E, l'intersection $\mathcal{E}sc\cap\zeta^0([a,b],E)$ est triés petite : elle se réduit à l'ensemble des fonctions constantes. ■

Proposition 1.10 *L'ensemble des points de discontinuité d'une fonction réglée sur $[a,b]$ est au plus dénombrable.*

Preuve. Rappelons qu'un point de discontinuité de $f:[a,b]\to E$ est un point où

f n'est pas continue. Soit $f\in\mathfrak{R}eg$ et soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions en escalier qui converge uniformément vers f sur $[a,b]$. Chaque φ_n a un ensemble fini de points de discontinuité, que l'éon notera D_n. Alors l'ensemble $D=\cup_{n\in\mathbb{N}}D_n$ est au plus dénombrable.

Soit $x_o\in[a,b]\setminus D$, chaque fonction φ_n est continue au point x_0, et la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f, donc f est continue au point x_0. Donc l'ensemble des points de discontinuité de f est contenu dans D es est donc au plus dénombrable. ■

1.2.2 Intégrale d'une fonction réglée

nous pouvons maintenant introduire le prolongement à $\mathfrak{R}eg([a,b],E)$ de l'intégrale des fonctions en escalier. L'existence et l'unicité de ce prolongement.

Définition 1.11 *On note $\mathfrak{I}_{\mathfrak{R}eg}:\mathfrak{R}eg([a,b],E)\to E$ l'unique prolongement continu à $\mathfrak{R}eg([a,b],E)$ de l'application linéaire continue $P:(\mathcal{E}sc([a,b],E),\|.\|_\infty)\to(E,\|.\|_E)$. Etant donné une fonction f de $\mathfrak{R}eg([a,b],E)$, on note $\mathfrak{I}_{\mathfrak{R}eg}(f)=\int_a^b f(t)\,dt$ et on dit que $\mathfrak{I}_{\mathfrak{R}eg}(f)$ est l'intégrale de Riemann de la fonction réglée f.*

Remarque 1.12 *La construction de l'intégrale des fonctions réglées a pour corolaire l'important fait suivant : les fonction continues de $[a,b]$ dans E sont intégrables ; les fonctions monotones de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ sont intégrales. Ces deux types de fonctions sont en effet des fonctions réglées sur $[a,b]$ et sont donc intégrables sur cet intervalle.*

L'existence et l'unicité du prolongement ci-dessus proviennent de l'uniforme continuité de l'intégrale sur $\mathcal{E}sc$ et de la complétude de E. De manière plus explicite, le prolongement $\mathfrak{I}_{\mathfrak{R}eg}$ de P s'obtient de la manière suivante : étant donné $f \in \mathfrak{R}eg$, il existe par définition de $\mathfrak{R}eg$ une suite de fonction en escalier $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers f. Comme P est uniformément continue (car linéaire et continue), la suit $(P(\varphi_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Comme E est complet, elle converge vers une limite $A \in E$. La contrait de continuité du prolongement impose le choix : $\mathfrak{I}_{\mathfrak{R}eg}(f) = A = \lim_{n\to+\infty} P(\varphi_n)$.

1.3 L'intégrale de Riemann

1.3.1 Fonctions Riemann-intégrables

Comme précédemment, on suppose d'abord $a < b$. Nous allons construire une semi-norme P_E sure $\mathcal{F}([a,b],E)$, définie à lé aide des fonctions en escalier. Le but est de faire coïncider in fine la semi-norme $P_E(f)$ d'une fonction intégrable avec l'intégrale $\int_a^b \|f(t)\|_E \, dt$, que nous avons déjà rencontrée pour les fonctions en escalier et les fonctions réglée.

Pour $f \in \mathcal{F}([a,b],E)$, on pose

$$M(f) = \{\mu \in \mathcal{E}sc([a,b],E) \,|\, \forall t \in [a,b], \mu(t) \geq \|f(t)\|_E\}.$$

Notons que les fonction μ ci-dessus sont à valeurs réelles (positives). Remarquons également que si f est bornée, alors $M(f)$ est non vide, mais que, pour f quelconque, il est possible que $M(f)$ soit l'ensemble vide. On pose ensuite

$$P_E(f) = \inf_{\mu\in M(f)} \left\{ \int_a^b \mu(t) \, dt \right\}.$$

Remarquons que, pour tout $\mu \in M(f)$,on a $\mu \geq 0$ donc $P_E(f) \geq 0$. Si $M(f) = \varnothing$, alors $P_E(f) = \inf \varnothing = +\infty$ par définition de la borne inférieure. L'application P_E ainsi définie est donc une application de $\mathcal{F}([a,b],E)$ à valeurs dans $[0,+\infty]$. De plus, si f est en escalier, alors, pars définition de P_E, on a $P_E(f) = \int_a^b \|f(t)\|_E \, dt$. Nous allons maintenant montrer que P_E est une semi-norme sur $\mathcal{F}([a,b],E)$ et nous rappelons que ni le fait que P_E ait un noyau, ni le fait que P_E puisse prendre la valeur $+\infty$ n'empêchent de l'utiliser dans le théorème de prolongement des applications uniformément continues à valeurs dans un espace métrique complet.

Proposition 1.13 *L'application* $P_E : \mathcal{F}([a,b],E) \to [0,+\infty]$ *est une semi-norme sur* $\mathcal{F}([a,b],E)$.

Preuve. Montrons l'homogénéité de P_E. Soit $f \in \mathcal{F}$ et soit $\lambda \in \Bbbk$, $\lambda \neq 0$. Alors on a $M(\lambda f) = \{|\lambda| \mu : \mu \in M(f)\}$. Puisque $\int_a^b |\lambda| \mu(t)\, dt = |\lambda| \int_a^b \mu(t)\, dt$, on a donc $P_E(\lambda f) = |\lambda| P_E(f)$. Si $\lambda = 0$, l'égalité est claire. Montrons l'inégalité triangulaire. Si $M(f) = \varnothing$ ou $M(g) = \varnothing$, l'inégalité triangulaire est vraie puisque le nombre de droite de l'inégalité est égal à $+\infty$. Supposons donc $M(f) \neq \varnothing$ et $M(g) \neq \varnothing$. Soit $\epsilon > 0$. Par définition de la borne inférieure, il existe $\mu \in M(f)$ tel que $\int_a^b \mu(t)\, dt \leq P_E(f) + \epsilon$ et $v \in M(g)$ tel que $\int_a^b v(t) \leq P_E(g) + \epsilon$. De plus, $\|f(t) + g(t)\|_E \leq \|f(t)\|_E + \|g(t)\|_E \leq \mu(t) + v(t)$, donc $(\mu + v) \in M(f+g)$. Par conséquent, on a

$$P_E(f+g) \leq \int_a^b (\mu + v)(t)\, dt = \int_a^b \mu(t)\, dt + \int_a^b v(t)\, dt \leq P_E(f) + P_E(g) + 2\epsilon.$$

Comme ϵ est arbitraire, on obtient bien $P_E(f+g) \leq P_E(f) + P_E(g)$.

On peut alors munir $\mathcal{F}([a,b], E)$ de la topologie associée à P_E et s'intéresser à l'adhérence de $\mathcal{E}sc$ dans $\mathcal{F}$ pour cette topologie. ■

Définition 1.14 *(Fonction Riemann-intégrable). On note $\mathfrak{RI}([a,b], E)$, ou simplement $\mathfrak{RI}$ si le contexte le permet, l'adhérence de $\mathcal{E}sc([a,b], E)$ dans $\mathcal{F}([a,b], E)$ pour la topologie définie par la semi-norme P_E. On appelle fonctions Riemann-intégrables les éléments de $\mathfrak{RI}([a,b], E)$. Lorsque $a = b$, on pose : $\mathfrak{RI}(\{a\}, E) = \mathcal{F}(\{a\}, E) \simeq E$.*

Remarque que l'ensemble $\mathfrak{RI}$ est l'adhérence d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$ et est donc lui-même un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$. De plus, une fonction Riemann-intégrable est par définition limite d'une suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions en escalier pour la semi-norme P_E. Outre la définition ci-dessus, qui nous sera directement utile pour la construction de l'intégrale de Riemann par prolongement de l'intégrale des fonction en escalier, il s'avère vite indispensable de disposer d'une caractérisation directe des fonctions Riemann-intégrables qui traduise l'existence de fonctions en escalier φ arbitrairement proches de f pour la semi-norme P_E. Cette caractérisation est souvent utilisée comme définition de l'intégrabilité au sens de Riemann.

Proposition 1.15 *(Caractérisions des fonctions Riemann-intégrables). Soit $f \in \mathcal{F}([a,b], E)$. Pour que f soit Riemann-intégrable, il faut et il suffit que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe des fonctions $\varphi \in \mathcal{E}sc([a,b], E)$ et $\mu \in \mathcal{E}sc([a,b], \mathbb{R})$ telles que $\|f(t) - \varphi(t)\|_E \leq \mu(t)$ pour tout $t \in [a,b]$ et $\int_a^b \mu(t)\, dt > \epsilon$.*

Preuve. Soit f dans l'adhérence de $\mathcal{E}sc([a,b], E)$ pour la topologie associée à P_E et soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe une fonction $\varphi \in \mathcal{E}sc([a,b], E)$ telle que $P_E(f - \varphi) < \frac{\epsilon}{2}$.

Par définition de P_E, il existe donc une fonction $\mu \in M(f - \varnothing)$ telle que $\int_a^b \mu(t)\, dt < P_E(f - \varphi) + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$. Les fonctions φ et μ vérifient les conditions demandées.

Réciproquement, supposons que $f \in \mathcal{F}([a,b], E)$ et que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe des fonctions $\varphi \in \mathcal{E}sc([a,b], E)$ et $\mu \in \mathcal{E}sc([a,b], \mathbb{R})$ qui vérifient $\|f(t) - \varphi(t)\|_E \leq \mu(t)$ pour tout $t \in [a,b]$ et $\int_a^b \mu(t)\, dt < \epsilon$. Ceci signifie que $\mu \in M(f - \varphi)$ et que $P_E(f - \varphi) < \epsilon$. L'arbitraire sur ϵ montre alors que f est dons l'adhérence de $\mathcal{E}sc([a,b], E)$ pour P_E, c'est-à-dire que f est Riemann-intégrable. ■

Corollaire 1.16 *Une fonction Riemann-intégrable sur $[a,b]$ est bornée sur cet intervalle.*

Preuve. Soit $f \in \mathfrak{RI}([a,b], E)$. Il existe alors $\varphi \in \mathcal{E}sc([a,b], E)$ et $\mu \in \mathcal{E}sc([a,b], \mathbb{R})$ telles que $\|f(t) - \varphi(t)\|_E \leq \mu(t)$ et $\int_a^b \mu(t)\, dt \leq 1$. Donc, pour tout $t \in [a,b]$, $\|f(t)\|_E \leq \|f(t) - \varphi(t)\|_E + \|\varphi(t)\|_E \leq \mu(t) + \|\varphi(t)\|_E$. Les fonctions en escalier étant bornées, il en est de même de f. ■

Proposition 1.17 *La topologie $\mathfrak{I}_{P_E}$ associée à la semi-norme P_E sur $\mathcal{F}([a,b], E)$ est moine fine que la topologie $\mathfrak{I}_\infty$ associée à la semi-norme $\|.\|_\infty$ sur $\mathcal{F}([a,b], E)$: $\mathfrak{I}_{P_E} \subset \mathfrak{I}_\infty$.*

Par conséquent, $\mathfrak{R}eg([a,b], E) = \overline{\mathcal{E}sc([a,b], E)}^{(\infty)} \subset \overline{\mathcal{E}sc([a,b], E)}^{(P_E)} = \mathfrak{RI}([a,b], E)$.

Preuve. Il suffit de montrer que, pour tout $f_0 \in \mathcal{F}$ et tout $\eta > 0$, la boule ouvert $B_{P_E}(f_0, \eta)$ pour P_E contient une boule ouvert $B_\infty(f_0, \epsilon)$ pour la norme $\|.\|_\infty$. Soit $\epsilon = \eta / [2(b-a)]$ et soit $f \in \mathcal{F}$ telle que $\|f - f_0\|_\infty < \epsilon$.

Soit alors $\mu \in \mathcal{E}sc([a,b], \mathbb{R})$ définie par $\mu(t) = \epsilon$ pour tout $t \in [a,b]$. On a alors $\mu \in M(f - f_0)$ et $\int_a^b \mu(t)\, dt = \frac{\eta}{2}$, donc $P_E(f - f_0) \leq \frac{\eta}{2} < \eta$, soit $f \in B_{P_E}(f_0, \eta)$. ■

1.3.2 Intégrale d'une fonction Riemann-intégrable

Nous allons maintenant montrer que l'application $P : \mathcal{E}sc \to E$ se prolonge à l'ensemble $\mathfrak{RI}$. Comme dans la section précédent, cette propriété découlera de la continuité uniforme de l'application P, cette fois-ci pour la semi-norme P_E.

Proposition 1.18 *L'application P de $(\mathcal{E}sc([a,b], E), P_E)$ dans $(E, \|.\|_E)$ est linéaire et continue (donc uniformément continue).*

Preuve. On sait déjà que P est linéaire. Soit $\varphi \in \mathcal{E}sc([a,b], E)$. L'application $\|\varphi\|_E$: $t \to \|\varphi(t)\|_E$ est dans $\mathcal{E}sc([a,b], \mathbb{R})$ et, par définition de P_E, on a $P_E(\varphi) = \int_a^b \|\varphi(t)\|_E\, dt$. Donc, $\|P(\varphi)\|_E = \left\| \int_a^b \varphi(t)\, dt \right\|_E \leq \int_a^b \|\varphi(t)\|_E\, dt = P_E(\varphi)$, ce qui prouve que P continue.

Ainsi, bien que l'on travaille désormais avec une topologie, la topologie T_{P_E}, moine fine que T_∞, l'application linéaire P reste continue. L'espace vectoriel normé E étant supposé complet. ■

Définition 1.19 *(Intégrale de Riemann). On note* $\mathfrak{Int}$ *l'unique prolongement continu de l'application linéaire continue* $P : \mathcal{E}sc([a,b], E) \to E$ *(intégrale des fonctions en escalier) à* $\mathfrak{RI}([a,b], E) = \overline{\mathcal{E}sc([a,b], E)}$. *Pour une fonction* f *de* $\mathfrak{RI}([a,b], E)$, *on note* $\mathfrak{Int}(f) = \int_a^b f(t)\,dt$ *et on dit que* $\mathfrak{Int}(f)$ *est l'intégrale de Riemann de la fonction (Riemann-intégrable)* f.

Proposition 1.20 *L'application* $\mathfrak{Int} : (\mathfrak{RI}([a,b], E), P_E) \to (E, \|.\|_E)$ *est linéaire et continue. Plus précisément, si* f *est Riemann-intégrable, on a* $\left\|\int_a^b f(t)\,dt\right\|_E \leq P_E(f)$.

Preuve. La linéarité et la continuité de $\mathfrak{Int}$ sont conséquences de sa définition comme prolongement d'une application linéaire continue. Explicitons la continuité de $\mathfrak{Int}$ en montrant l'inégalité proposée. Si $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions en escalier convergeant vers f pour la semi-norme P_E alors par l'inégalité triangulaire pour la semi-norme P_E, on a $|P_E(f) - P_E(\varphi_n)| \leq P_E(f - \varphi_n)$, donc $\lim_{n\to+\infty} P_E(\varphi_n) = P_E(f)$ dans $\mathbb{R}$. Par ailleurs, chaque φ_n étant en escalier, on a $\left\|\int_a^b \varphi_n(t)\,dt\right\|_E \leq \int_a^b \|\varphi_n(t)\|_E\,dt = P_E(\varphi_n)$. Or, par définition de l'intégrale de Riemann, $\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \varphi_n(t)\,dt$ dans E donc $\left\|\int_a^b f(t)\,dt\right\|_E = \lim_{n\to+\infty} \left\|\int_a^b \varphi_n(t)\,dt\right\|_E \leq \lim_{n\to+\infty} P_E(\varphi_n) = P_E(f)$.

Le résultat ci-dessus peut aussi se démontrer en remarquant que l'application linéaire continue $P : (\mathcal{E}sc, P_E) \to E$ est de norme 1 et que son prolongement à $\overline{\mathcal{E}sc}$ est donc également de norme 1. Afin de mettre l'inégalité obtenue sous une forme plus habituelle, donnons l'interprétation suivante de $P_E(f)$ pour f Riemann-intégrable. ■

Corollaire 1.21 *(Inégalité triangulaire). Si* $f \in \mathfrak{RI}([a,b], E)$, *alors l'application* $\|f\|_E : t \to \|f(t)\|_E$ *vérifie* $\|f\|_E \in \mathfrak{RI}([a,b], \mathbb{R})$ *et on a* $P_E(f) = \|f(t)\|_E\,dt$. *Par conséquent,*

$$\left\|\int_a^b f(t)\,dt\right\|_E \leq \int_a^b \|f(t)\|_E\,dt.$$

Une fonction Riemann-intégrable étant bornée ceci entraine : $\left\|\int_a^b f(t)\,dt\right\|_E \leq (b-a)\|f\|_\infty$.

Preuve. Soit $f \in \mathfrak{RI}([a,b], E)$, il existe, pour tout $n \geq 1$, des application $\varphi_n \in \mathcal{E}sc([a,b], E)$ et $\mu_n \in \mathcal{E}sc([a,b], \mathbb{R})$ telles que $\|f(t) - \varphi_n(t)\|_E \leq \mu_n(t)$ pour tout t et $\int_a^b \mu_n(t)\,dt < 1/n$. On a donc

$$|\|f(t)\|_E - \|\varphi_n(t)\|_E| \leq \|f(t) - \varphi_n(t)\|_E \leq \mu_n(t),$$

ce qui montre que $\lim_{n\to+\infty} P_{\mathbb{R}}(\|f\|_E - \|\varphi_n\|_E) = 0$, où $P_{\mathbb{R}}$ désigne la semi-norme P_E sur $\mathcal{F}([a,b],\mathbb{R})$. Par définition de $\mathfrak{RI}([a,b],\mathbb{R})$, on a donc $\|f\|_E \in \mathfrak{RI}([a,b],\mathbb{R})$ et $\int_a^b \|f(t)\|_E\,dt = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \|\varphi_n(t)\|_E\,dt = P_E(f)$. Donc, on a bien $\left\|\int_a^b f(t)\,dt\right\|_E \leq \int_a^b \|f(t)\|_E\,dt \leq (b-a)\|f\|_\infty$. ■

1.3.3 Intégrales de Riemann généralisées

Nous terminons ce chapitre par quelques aspects de la théorie de Riemann, qui d'une part généralisent ce qui a été dit jusque-là et d'autre part nous seront utiles lors de la comparaison avec la théorie de Lebesgue. Nous n'évoquerons cependant pas ici la théorie de Riemann pour l'intégrale des fonctions définies sur un pavé $\prod_{i=1}^{n}[a_i,b_i]$ de $\mathbb{R}^n$, pour laquelle nous renvoyons à l'ouvrage de $L2$.

1.3.4 Intégrale d'une fonction $f : [a,b[\to E$

Définition 1.22 *(Fonction localement intégrable sur $[a,b[$)*
soit $a < b \leq +\infty$. on note : $\mathfrak{RI}_{\mathfrak{loc}}([a,b[,E)$ l'ensemble des fonctions $f : [a,b[\to E$ dont le restriction à tout segment $[c,d] \subset [a,b[$ est Riemann-intégrable. Les élément de $\mathfrak{RI}_{\mathfrak{loc}}([a,b[,E)$ sont appelés fonctions localement intégrables sur $[a,b[$.

Notons que $\mathfrak{RI}_{\mathfrak{loc}}([a,b[,E)$ contient les fonctions continues sur $[a,b[$ et n'est donc pas contenu dans $\mathfrak{B}([a,b[,E)$,même si $[a,b[$ est un intervalle borné (par exemple, la fonction $\chi \mapsto \frac{1}{1-\chi}$ est localement intégrable sur $[0,1[$).

Définition 1.23 *(Intégrales convergentes). Soit $a < b \leq +\infty$ une fonction $f : [a,b[\to E$ est dite Riemann-intégrable au sens généralisé sur $[a,b[$ si d'une part $f \in \mathfrak{RI}_{\mathfrak{loc}}([a,b[,E)$ et si d'autre part la fonction $F : \chi \mapsto \int_a^\chi f(t)\,dt$ possède une limite lorsque χ tend vers b. On note alors :*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{\chi\to b,\chi\to b} \int_a^\chi f(t)\,dt.$$

Et on dit aussi que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ converge pour signifier que f est Riemann-intégrable au sens généralisé sur $[a,b[$.

Définition 1.24 *(Intégrales absolument convergents). Soit $f \in \mathfrak{RI}_{\mathfrak{loc}}([a,b[,E)$. On sait alors que $\|f\|_E \in \mathfrak{RI}_{\mathfrak{loc}}([a,b[,E)$ et on dit que $\int_a^b f(t)\,dt$ est absolument convergente.*

La proposition suivant est alors une conséquence de la complétude de E.

Proposition 1.25 *Soit* $f \in \mathfrak{R}\mathfrak{I}_{\mathfrak{loc}}\left([a,b[\,,E\right)$.*Si* $\int_a^b f(t)\,dt$ *est absolument convergente, alors elle est convergente.*

Lemme 1.26 *(Critère de Cauchy pour les intégrale). Soit* $f \in \mathfrak{R}\mathfrak{I}_{\mathfrak{loc}}\left([a,b[\,,E\right)$. *L'intégrale* $\int_a^b f(t)\,dt$ *est convergente ssi, pour tout* $\epsilon > 0$*, il existe* $\mathcal{A} \in [a,b[$ *tel que pour tous* c, d *vérifiant* $d > c > \mathcal{A}$*, on ait* $\left\|\int_c^d f(t)\,dt\right\|_E < \epsilon$.

Preuve. C'est, compte tenu de la relation de Chasles, le critère de Cauchy appliqué à la fonction $F : \chi \mapsto \int_a^\chi f(t)\,dt$ pour l'existence d'une limite en b. ■

Chapitre 2

Intégrale de Lebesgue

2.1 Intégrale sur un espace mesuré

Dans cette section, nous donnons une construction de l'intégrale de Lebesgue des fonctions mesurables définies sur un espace mesuré (X, M, μ) et à valeur d'abord dans $[0, +\infty]$, puis $\mathbb{R}$, puis $\mathbb{C}$ et enfin $\mathbb{R}^n$et $\mathbb{C}^n$. Ces différents espace d'arrivée seront toujours munis de leurs tribus boréliennes.

2.1.1 Fonction étagées mesurable

définition et représentation standard des fonctions étagées

Les fonctions étagées sont les fonctions de base de la théorie de Lebesgue : c'est a partir de la définition de leurs intégrale et d'un procédé d'approximation adéquat que l'on peut définir l'intégrale de Lebesgue de fonctions plus générales.

Définition 2.1 *(Fonction étagée). Soient X et Y deux ensembles. Une application φ : $X \to Y$ est dit étagée si l'ensembles image $\varphi(X)$ est une partie finie de Y.*

Définition 2.2 *(Représentation standard d'une fonction étagée). supposons que $Y = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ou encore $[0, +\infty]$ et soit $\varphi : X \to Y$ une application étagée. notons $\varphi(X) = \{y_1, ..., y_m\} \subset Y$, les y_j étant supposés deux à deux distincts, et posons $A_j = \varphi^{-1}(\{y_j\})$ pour tout $j \in \{1, ..., m\}$. Alors $\varphi = \sum_{j=1}^{m} y_j$, et cette écriture de φ sous forme de combinaison linéaire de fonctions indicatrices est appelée représentation standard de φ. Remarquons que les $(A_j)_{i \leq j \leq m}$ forment une partition de X.*

Intégrale des fonctions étagées mesurables

Définition 2.3 *(Intégrale d'une fonction $\varphi : X \to [0,+\infty[$ étagée mesurable). soit (X, M, μ) un espace mesuré et $\varphi : X \to [0,+\infty[$ une fonction étagée mesurable. Soit $\sum_{j=1}^{m} y_j \chi_{A_j}$ la représentation standard de φ . On appelle intégrale de φ sur X la quantité , notée $\int_X \varphi d\mu$, définie par :*

$$\int_X \varphi d\mu = \sum_{j=1}^{m} y_j \mu(A_j) \in [0,+\infty].$$

Exemple 2.4 *La fonction indicatrice χ_A d'une partie mesurable A de X est étagée mesurable et vérifie $\int_X \chi_A d\mu = \mu(A)$. per exemple , $\mathbb{Q}$ est un borélien de $\mathbb{R}$ comme réunion dénombrable de point et on à donc $\int_{\mathbb{R}} \chi_{\mathbb{Q}} d\lambda = \lambda(\mathbb{Q}) = 0$ (λ la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}$).*

Solution 2.5 *Remarquons que par définition de $\int_X \varphi d\mu$ pour φ étagée de représentation standard $\varphi = \sum_{j=1}^{m} y_j \chi_{A_j}$, on a pour tout $A \in M$, $\int_X \chi_A d\mu = \mu(A)$ et de plus $\int_x \left(\sum_{j=1}^{m} y_j \chi_{A_j}\right) d\mu = \sum_{j=1}^{m} y_j \mu(A_j) = \sum_{j=1}^{m} y_j \int_X \chi_A d\mu$. Plus généralement, on a le résultat suivant.*

Lemme 2.6 *Soit $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ une partition de X en sous-ensembles mesurable et soit $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{X_i}$ avec $\alpha_i \in [0,+\infty[$. Alors φ étagée mesurable et $\int_X \varphi d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(X_i)$.*

Preuve. *La différence avec la définition précédent réside dans le fait qu'ici $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{X_i}$ n'est pas nécessairement la représentation standard de φ. En particulier, les α_i ne sont pas nécessairement deux à deux distincts. La fonction φ est bien étagée car $\varphi(X) = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ est un ensemble fini. Les X_i étant mesurables, φ est mesurable comme somme finie d'applications mesurables à valeurs dans $[0,+\infty[$. Soit $\sum_{j=1}^{m} y_j \chi_{A_j}$ la représentation standard de φ. Pour $j \in \{1, ..., m\}$ on note $I_j = \{i \in \{1, ..., n\} / \alpha_i = y_j\}$. Alors $A_j = \cup_{i\in I_j} X_i$ est cette réunion est disjointe. Donc : $\int_X \varphi d\mu = \sum_{j=1}^{m} y_j \mu(A_j) = \sum_{j=1}^{m} y_j \left(\sum_{i\in I_j} \mu(A_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i)$. La relation $\int_X \chi_1 d\mu = \mu(A)$ se déduit de ce qui précède appliqué à la partition mesurable $(A, X \backslash A)$ de X.* ■

Proposition 2.7 *Si φ et ψ sont deux fonctions étagées mesurable de X dans$[0,+\infty[$, alors $\int_X (\varphi + \psi) d\mu = \int_X \varphi d\mu + \int_X \psi d\mu$.*

Preuve. Soit $\sum_{j=1}^{m} y_j \chi_{A_j}$et $\sum_{k=1}^{p} z_k \chi_{B_k}$ les représentations standard respectives de φ et ψ.

Alors $X+\cup_{j,k}(A_j\cap B_k)$ et cette réunion est disjointe. De plus, $\varphi+\psi=\sum_{j,k}(y_j+z_k)\chi_{A_j\cap B_k}$.

$$\begin{aligned}\int_X(\varphi+\psi)\,d\mu &= \sum_{j,k}(y_j+z_k)\,\mu(A_j\cap B_k)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{p}(y_j\mu(A_j\cap B_k)+z_k\mu(A_j\cap B_k))\\ &= \sum_{j=1}^{m}y_j\left(\sum_{k=1}^{p}\mu(A_j\cap B_k)\right)+\sum_{k=1}^{p}z_k(\sum_{j=1}^{m}\mu(A_j\cap B_k)).\end{aligned}$$

Or $(A_j)_{1\leq j\leq m}$et $(B_k)_{1\leq k\leq p}$ sont des partitions de X, donc $\sum_{k=1}^{p}\mu(A_j\cap B_k)=\mu(A_j)$ et $\sum_{j=1}^{m}\mu(A_j\cap B_k)=\mu(B_k)$. Donc :

$$\int_X(\varphi+\psi)\,d\mu=\sum_{j=1}^{m}y_j\mu(A_j)+\sum_{k=1}^{p}z_k\mu(B_k)=\int_X\varphi d\mu+\int_X\psi d\mu.$$

■

Proposition 2.8 *1. Soit $\varphi:X\to[0,+\infty[$ une fonction étagée mesurable et soit $\alpha\in[0,+\infty[$. Alors $\alpha\varphi$ est étagée et $\int_X(\alpha\varphi)\,d\mu=\alpha\int_X\varphi d\mu$.*

2. Si $\varphi,\psi:X\to[0,+\infty[$ sont deux fonctions étagées mesurables vérifiant $\varphi(x)\leq\psi(x)$ pour tout $x\in X$, alors $\int_X\varphi d\mu\leq\int_X\psi d\mu$.

Preuve. 1. Soit $\sum_{j=1}^{m}y_j\chi_{A_j}$ la représentation standard de φ. Alors $\sum_{j=1}^{m}(\alpha y_j)\chi_{A_j}$ est la représentation standard de $(\alpha\varphi)$ et on à donc $\int_X(\alpha\varphi)\,d\mu=\sum_{j=1}^{m}(\alpha y_j)\,\mu(A_j)=\alpha\sum_{j=1}^{m}y_j\mu(A_j)=\alpha\int_X\varphi d\mu$.

2. Soient $\sum_{j=1}^{m}y_j\chi_{A_j}$ et $\sum_{k=1}^{p}z_k\chi_{B_k}$ les représentations standard respectives de φ et ψ.

Puisque $\varphi\leq\psi$, on à $y_j\leq z_k$ chaque fois que $A_j\cap B_k\neq\varnothing$. ■

Définition 2.9 *(Intégrale sure une partie mesurable $A\subset X$). soit $A\subset X$ une partie mesurable et soit $\varphi:X\to[0,+\infty[$ une fonction étagée mesurable. Alors, la fonction $\varphi\chi_A$ est étagée mesurable et on appelle intégrale de φ sur A la quantité $\int_X\varphi d\mu=\int\limits_X\varphi\chi_A d\mu$.*

Proposition 2.10 *Soit $\varphi:X\to[0,+\infty]$ une fonction étagée mesurable. L'application $v_\varphi:A\in M\to\int_A\varphi d\mu$ est une mesure sur M.*

Preuve. Si $A=\varnothing$, on a $(\varphi\chi_A)(x)=0$ pour tout $x\in X$, donc $\int_A\varphi d\mu$. Soit $\sum_{j=1}^{m}y_j\chi_{c_j}$ représentation standard de φ et soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable de parties mesurables deux a deux disjointes de X. Si $A=\cup_{n\in\mathbb{N}}A_n$, alors $\int_A\varphi d\mu=\sum_{j=1}^{m}y_j\mu(C_j\cap A)=$

$\sum_{j=1}^{m} y_j \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mu\left(C_j \cap A_n\right)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=1}^{m} y_j \mu\left(C_j \cap A_n\right)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_{A_n} \varphi d\mu\right)$, et on a $v_\varphi\left(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_\varphi\left(A_n\right)$ et v_φ est donc bien une mesure. Remarquons que l'interversion $\sum_{j=1}^{m}\sum_{n=0}^{+\infty} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{j=1}^{m}$ ci-dessus est un résultat déjà connu provenant de la théorie des série à termes positifs : si a_n,$b_n \geq 0$ pour tout n, alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(a_n + b_n\right)$ converge si et seulement si chacune des séries $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ converge et on a, en cas de convergence comme en cas de divergence, $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(a_n + b_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$, ce résultat s'étendant au cas d'un nombre fini de séries à terme positifs. ■

2.1.2 Fonctions mesurables à valeurs dans $[0, +\infty]$

Intégration des fonctions mesurables à valeurs dans $[0, +\infty]$

Définition 2.11 *(Intégration d'un fonction mesurable positive). Soit $f : X \to [0, +\infty]$ une fonction mesurable. On appelle intégrale de f la quantité, notée $\int_X f d\mu$, définie par $\int_X f d\mu = \sup\left\{\int_X \varphi d\mu : \varphi : X \to [0, +\infty[\text{ mesurable étagée telle que } \varphi \leq f\right\} \in [0, +\infty]$.*

Si $A \subset X$ est un partie mesurable, on pose $\int_X f d\mu = \int_X f\chi_A d\mu$.

Définition 2.12 *(Fonction positive et intégrable). Une fonction $f : X \to [0, +\infty]$ et dite intégrable si elle est mesurable et si sont intégrale au sens ci-dessus est finie : $\int_X f d\mu \leq +\infty$.*

Proposition 2.13 *Si $f : X \to [0, +\infty]$ vérifie $\int_X f d\mu \leq +\infty$, alors $\mu\left(\{f = +\infty\}\right) = 0$.*

Preuve. Soit $n \in \mathbb{N}$ est soit φ_n la fonction étagée $\varphi_n = n\chi_{\{f=+\infty\}}$. Les φ_n sont mesurables et vérifient $0 \leq \varphi_n \leq \int_X f$, donc $\int_X \varphi_n \leq \int_X f$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ par définition de l'intégrale de f. Or $\int_X \varphi_n = n\mu_{\{f=+\infty\}}$, qui tend vers $+\infty$ si $\mu\left(\{f = +\infty\}\right) \neq 0$. Dans ce cas, on a donc :$\int_X f d\mu = +\infty$, ce qui contredit l'hypothèse faite sur f. ■

Théorème de convergence monotone

Théorème 2.14 *(théorème de convergence monotone). Soit $\left(f_n : X \to [0, +\infty]\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables vérifiant $f_n \leq f_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $f = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n = \lim_{n\to+\infty} f_n$. Alors f est mesurable, la suite $\left(\int_X f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $[0, +\infty]$et on a :*

$$\int_X f = \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_X f_n.$$

Preuve. La fonction f est mesurable comme limite simple d'une suite de fonctions mesurables. Puisque $f_n \leq f_{n+1}$, on a, $\int_X f_n \leq \int_X f_n$, de sorte que la suite $\left(\int_X f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'éléments de $[0, +\infty]$ et est donc convergente de limite $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_X f_n$ $\in [0, +\infty]$. Par ailleurs, puisque $f_n \leq f$ pour tout n, on a également $\int_X = f_n \leq \int_X f$ pour tout n, donc $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_X f_n \leq \int_X f$. pour montrer l'intégralité inverse, fixons une fonction étagée mesurable φ telle que $0 \leq \varphi \leq f$ et un réel $\alpha \in [0; 1[$. Posons alors $E_N + \{x \in X | f_n(x) \geq \alpha\varphi(x)\}$. Puisque pour tout $x \in X$ la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissant de limite $f(x)$ et que $\alpha\varphi(x) \prec \varphi(x) \leq f(x)$, on a $E_n \subset E_{n+1}$ et $\cup_{n\in\mathbb{N}} E_n = X$. De plus, on a $\int_X f_n \geq \int_{E_n} f_n \geq \alpha \int_{E_n} \varphi = \alpha v_\varphi(E_n)$, où v_φ est la mesure $v_\varphi(A) = \int_X \varphi$ sur X. La suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante et de réunion X tout entier, montre que $\lim_{n\to+\infty} v_\varphi(E_n) = v_\varphi(X) = \int_X \varphi$. Donc $\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n \geq \alpha \int_X \varphi$, et ceci pour tout $\alpha \in [0, 1[$. En faisant tendre α vers 1, on obtient donc $\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n \geq \int_X \varphi$, et ceci pour toute φ étagée mesurable telle que $0 \leq \varphi \leq f$. En prenant le sup sur les telles φ, on obtient bien $\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n \geq \int_X f$. ■

2.1.3 Fonctions Lebesgue-intégrables

Intégration des fonctions à valeurs réelles

Soit (X, M, μ) un espace mesuré et $f : X \to \mathbb{R}$ une application mesurable. Notons f_+ et f_- les applications

$$f_+ = \max(f, 0) \text{ et } f_- = \max(-f, 0)$$

Les applications f_+ et f_- sont mesurables, car f l'est, es sont à valeurs dans $[0, +\infty[$. Remarquons qu'ici la valeur $+\infty$ est exclue : celle-ci n'avait été autorisé jusqu'ici que pour obtenir un énoncé du théorème de convergence monotone où l'on n'ait pas besoin de distinguer les cas selon que $\sup_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n$ prend ou non la valeur $+\infty$. Les relations suivantes vérifiées par f_+ et f_- sont fondamentales pour comprendre la définition qui va suivre et se vérifient immédiatement :

$$f = f_+ - f_- \text{ et } |f| = f_+ + f_-$$

puisque f_+ et f_- sont mesurables et à valeurs positives, les intégrales $\int f_+$ et $\int f_-$ sont des éléments bien définis de $[0, +\infty]$, de même que $\int |f|$. On a d'ailleurs l'égalité $\int |f| = \int f_+ + \int f_-$ dans $[0, +\infty]$. Enfin, puisque $|f| = f_+ + f_- \geq f_+$ et $\geq f_-$,on a $\int |f| < +\infty$ si et seulement si on a à la fois $\left(\int f_+ < +\infty\right)$ et $\left(\int f_- < +\infty\right)$ et, dans ce cas, l'égalité précédente est une égalité dans $\mathbb{R}$.

Définition 2.15 *(Fonction intégrable à valeurs réelles). une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ est dite intégrable par rapport à la mesure μ, ou simplement intégrale, si f est mesurable et si $\int_X |f|\, d\mu < +\infty$. Dans ce cas, on appelle intégrale de f sur X le nombre réel, noté $\int_X f d\mu$, défini par*

$$\int_X f d\mu = \int_X f_+ d\mu + \int_X f_- d\mu$$

Si $A \subset X$ est une partie mesurable de X, on dit que f est intégrable sur A si $f\chi_A d\mu$. Enfin, on note $\mathcal{L}^1(X, \mu, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions intégrables à valeurs réelles.

Proposition 2.16 *L'ensemble $\mathcal{L}^1(X, \mu, \mathbb{R})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et l'application :*

$$\begin{array}{ccc} F & : & \mathcal{L}^1(X, \mu, \mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ f & \to & \displaystyle\int_X f d\mu \end{array}$$

est linéaire et vérifie l'égalité suivante, dite inégalité triangulaire :

$$\left| \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f|\, d\mu$$

L'application $f \in \mathcal{L}^1 \to \int_X |f|\, d\mu$ est une semi-norme sur $\mathcal{L}^1(X, \mu, \mathbb{R})$ et F est continue pour la topologie définie par cette semi-norme.

Preuve. Soient $f, g : X \to \mathbb{R}$ deux fonctions intégrables. Puisque $|f + g| \leq |f| + |g|$,

on a $\int |f + g| \leq \int (|f| + |g|) = \int |f| + \int |g| < +\infty$, donc $f + g$ est intégrable. De plus,$(f + g)_+ = f_+ + g_+$ et $(f + g)_- = f_- + g_-$, donc $\int (f + g) = \int f + \int g$. de même, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, (αf) est intégrable si f l'est et $\int (\alpha f) = \alpha \int f$. enfin,

$$\left| \int f \right| = \left| \int f_+ - \int f_- \right| \leq \left| \int f_+ \right| + \left| \int f_- \right| = \int f_+ + \int f_- = \int |f|$$

Montrons alors que l'application $f \to \int |f|$ est une semi-norme sur L^1 : l'homogénéité est conséquence de la linéarité de F et l'inégalité triangulaire se déduit de $|f + g| \leq |f| + |g|$ et de la croissance de l'intégrale. Enfin, l'inégalité triangulaire pour F montre que l'application linéaire F est contenue pour cette semi-norme. ■

Proposition 2.17 *1. Si $f : X \to \mathbb{R}$ est mesurable et vérifie $|f| \leq g$ avec $g : X \to [0, +\infty]$*

intégrable sur X, alors f est intégrable sur X.

2. Soit $f : X \to \mathbb{R}$ intégrable. alors l'ensemble $\{x \in X | f(x) \neq 0\}$ est σ-fini.

3.Soit $f : X \to \mathbb{R}$ intégrable et telle que $f \geq 0$ sur X. Alors $\int_X f \geq 0$.

4.Soit $f, g : X \to \mathbb{R}$ intégrable et telles que $f \leq g$ sur X. Alors $\int f \leq \int g$.

Preuve. 1. Si $|f| \leq g$, alors $\int |f| \leq \int g < +\infty$, donc f est intégrable.

2. Si f est intégrable, alors par définition $\int |f| < +\infty$. donc, l'ensemble $\{x \in X / |f| > 0\}$ est σ-fini. Or $\{x \in X / |f| > 0\} = \{x \in X / f(x) \neq 0\}$.

3. C'est une conséquence directe de la définition de l'intégrale d'une fonction positive.

4. On applique le point 3 à la fonction $g - f \geq 0$ et on utilise la linéarité de l'intégrale.

■

Intégrale des fonction à valeurs complexes

Définition 2.18 *(Fonction intégrable à valeurs complexes). Une fonction $f : X \to \mathbb{C}$ est dite intégrable par rapport à la mesure μ, ou simplement intégrable, si f est mesurable et si $\int_X |f| \, d\mu < +\infty$. Dans ce cas, on appelle intégrale de f sur X le nombre complexe, noté $\int_X f d\mu$, défini par :*

$$\int_X f d\mu = \int_X \operatorname{Re} f d\mu + i \int_X \operatorname{Im} f d\mu$$

Si $A \subset X$ est une partie mesurable de X, on dit que f est intégrable sur A si $f\chi_A$ est intégrable sur X. Dan ce cas, l'intégrale de f sur A est définie par $\int_X f d\mu = \int_X f\chi_A d\mu$. Enfin, on note $\mathcal{L}^1(X, \mu, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions intégrables à valeurs complexes.

Proposition 2.19 *L'ensemble $\mathcal{L}^1(X, \mu, \mathbb{C})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ et l'application*

$$\begin{array}{rcl} F & : & \mathcal{L}^1(X, \mu, \mathbb{C}) \to \mathbb{C} \\ f & \to & \displaystyle\int_X f d\mu \end{array}$$

est linéaire et vérifie l'inégalité suivante, dite inégalité triangulaire :

$$\left| \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f| \, d\mu,$$

avec égalité si et seulement s'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $f = e^{i\theta} |f|$ μ-presque partout. De plus, $\operatorname{Re}\left(\int f\right) = \int (\operatorname{Re} f)$ et $\operatorname{Im}\left(\int f\right) = \int (\operatorname{Im} f)$. Enfin, l'application $f \in \mathcal{L}^1 \to \int_X |f| \, d\mu$

est une semi-norme sur $\mathcal{L}^1(X,\mu,\mathbb{C})$ et F est continue pour la topologie définie pour cette semi-norme.

Preuve. Soient $f, g : X \to \mathbb{R}$ deux fonctions intégrables. Puisque $|f+g| \leq |f| + |g|$, on a : $\int |f+g| \leq \int (|f|+|g|) = \int |f| + \int |g| \leq +\infty$, donc $f+g$ est intégrable. De plus,

$$\begin{aligned} \int |f+g| &= \int \operatorname{Re}(f+g) + i \int \operatorname{Im}(f+g) \\ &= \left(\int \operatorname{Re} f + i \int \operatorname{Im} f\right) + \left(\int \operatorname{Re} g + i \int \operatorname{Im} g\right) \\ &= \int f + \int g. \end{aligned}$$

de même, pour $z = a+ib \in \mathbb{C}$, $\int |zf| = |z| \int |f|$, donc (zf) donc (zf) est intégrable si f l'est et

$$\begin{aligned} \int (Zf) &= \int (a+ib)(\operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f) \\ &= \int ((a \operatorname{Re} f - b \operatorname{Im} f) + i (b \operatorname{Re} f + a \operatorname{Im} f)) \\ &= \int (a \operatorname{Re} f - b \operatorname{Im} f) + i \int (b \operatorname{Re} f + a \operatorname{Im} f) \\ &= a\left(\int \operatorname{Re} f + i \int \operatorname{Im} f\right) + ib\left(\int \operatorname{Re} f + i \int \operatorname{Im} f\right) \\ &= a \int f + ib \int f = (a+ib) \int f = z \int f. \end{aligned}$$

On a de plus, par définition de l'intégrale de $f : X \to \mathbb{C}$, $\int f = \int \operatorname{Re} f + i \int \operatorname{Im} f$, donc $\operatorname{Re}\left(\int f\right) = \int \operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im}\left(\int f\right) = \int \operatorname{Im} f$. Soit maintenant $f \in L^1(X,\mu,\mathbb{C})$; posons $\alpha = \int f \in \mathbb{C}$. Si $\alpha + 0$, alors $\left|\int f\right| = 0 \leq \int |f|$. sinon, il existe $e^{i\theta} \in S^1$ tel que : $e^{i\theta} \int f = \left|\int f\right|$ (à savoir, $e^{i\theta} = \frac{|\alpha|}{\alpha} \operatorname{Re}\left(e^{i\theta} f\right)$), soit $\int \left(e^{i\theta} f\right) = \left|\int f\right| \in [0, +\infty[$. On obtient $\left|\int f\right| = \int \left(e^{i\theta} f\right) = \operatorname{Re}\left(\int e^{i\theta} f\right) = \int \operatorname{Re}\left(e^{i\theta} f\right) \leq \left|\int \operatorname{Re}\left(e^{i\theta} f\right)\right| \leq \int \left|\int \operatorname{Re}\left(e^{i\theta} f\right)\right| \leq \int \left|e^{i\theta} f\right|$ $= \int |f|$.

En cas d'égalité, on a donc $\int \operatorname{Re}\left(e^{i\theta} f\right) = \int |f| = \int \left|e^{i\theta} f\right|$ soit $\int \left(\left|e^{i\theta} f\right| - \operatorname{Re}\left(e^{i\theta} f\right)\right) = 0$. Or $\left|e^{i\theta} f\right| - \operatorname{Re}\left(e^{i\theta} f\right) \geq 0$, donc, $\left|e^{i\theta} f\right| = \operatorname{Re}\left(e^{i\theta} f\right)$ μ-presque partout. Or la partie réelle d'un nombre complexe z et égale à son module si est seulement si $\operatorname{Re} z = z$, donc ici on a $e^{i\theta} f = \operatorname{Re}\left(e^{i\theta} f\right) = \left|e^{i\theta} f\right| = |f|$ μ-presque partout. ■

Fonctions définies sur un espace mesuré complet

Lemme 2.20 *Soit*(X, M, μ) *un espace mesuré et soit* $Y = [0, +\infty]$, $\mathbb{R}$, *ou* $\mathbb{C}$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. l'espace mesuré (X, M, μ) *est complet ;*

2. pour toutes fonctions $f, g : X \to Y$ *telles que* $f = g$ μ*-presque partout,* f *est mesurable si et seulement si* g *est mesurable.*

En particulier, une fonction $h : X \to Y$ *nulle* μ*-presque partout a définie sur un espace mesuré complet est mesurable.*

Preuve. Supposons d'abord (X, M, μ) complet ; soient f et g deux fonctions $X \to Y$

telles que : f soit mesurable et que $f = g$ en dehors d'un ensemble $N \in M$ de mesure $\mu(N) = 0$. Montrons que g est mesurable. Soit A un borélien de Y. Alors $g^{-1}(A) = (g^{-1}(A) \cap N^c) \cup (g^{-1}(A) \cap N) = (f^{-1}(A) \cap N^c) \cup (g^{-1}(A) \cap N)$. Or $f^{-1}(A) \cap N^c$ est mesurable comme intersection d'ensembles mesurables et $g^{-1}(A) \cap N$ est mesurable, car inclus dans N qui est mesurable de mesure nulle et car (X, M, μ) est complet. Donc $g^{-1}(A)$ est mesurable .

Réciproquement, supposons que, pour toutes fonction $f, g : X \to Y$ qui coïncident μ-presque partout, f est mesurable si est seulement si g est mesurable. Soit $N \subset X$ un ensemble mesurable de mesure nulle et soit $P \subset N$. Montrons que P est mesurable. La fonction $f = \chi_N$ est mesurable car N est mesurable et la fonction $g = \chi_P$ coïncide avec f en dehors de N (elles sont toutes deux nulles sur N^c), c'est-à-dire en dehors d'un ensemble mesurable de mesure nulle. Donc $g = \chi_P$ est mesurable, donc P est mesurable.

La fonction nulle étant mesurable, une fonction nulle presque partout sur un espace mesuré complet est mesurable d'après le point 2. ∎

Intégration des applications à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$

Définition 2.21 *Une fonction* $f = (f_1, ..., f_n) : X \to \mathbb{k}^n$ *et intégrable si, pour tout* $j \in \{1, ..., n\}$, *la fonction* $f_j : X \to \mathbb{k}$ *est intégrable. On appelle alors intégrale de* f *l'élément de* $\mathbb{k}^n$ *noté* $\int_X f d\mu$ *et défini par :*

$$\int_X f d\mu = \left(\int_X f_1 d\mu, ..., \int_X f_n d\mu \right) \in \mathbb{k}^n$$

Si $A \subset X$ *est une partie mesurable de* X, *on dit que* f *est intégrable sur* A *si* $f\chi_A$ *est intégrable sur* X. *Dans ce cas, l'intégrale de* f *sur* A *est définie par* $\int_X f d\mu = \int_X f\chi_A d\mu$. *Enfin, on note* $\mathcal{L}^1(X, \mu, \mathbb{k}^n)$ *l'espace vectoriel sur* $\mathbb{k}$ *des fonctions intégrables à valeurs dans* $\mathbb{k}^n$.

Intégration par rapport à mesure image

Proposition 2.22 *Soit $g : Y \to [0, +\infty]$ mesurable. Alors $\int_Y gd(h * \mu) = \int_X (g \circ h)\, d\mu$. De plus, une fonction $f : Y \to \mathbb{C}$ est intégrable par rapport à $h * \mu$ si et seulement si la fonction $f \circ h : X \to \mathbb{C}$ est intégrable par rapport à la mesure μ. Dans ce cas, on a*

$$\int_Y fd(h * \mu) = \int_X (f \circ h)\, d\mu$$

Preuve. Si $g = \chi_A$ est la fonction indicatrice d'une partie mesurable A de Y, alors

par définition de la mesure image on a :

$$\int_Y \chi_A d(h * \mu) = (h * \mu)(A) = \mu\left(h^{-1}(A)\right) = \int_X \chi_{h^{-1}(A)} d\mu = \int_X (\chi_A \circ h) d\mu$$

car $\chi_{h^{-1}(A)} = \chi_A \circ h$. On en déduit le résultat pour $g = \sum_{j=1}^m z_j \chi_A$ étagée mesurable et positive ($z_j \in [0, +\infty[$) par linéarité de l'intégrale. Si $g : Y \to [0, +\infty]$ est mesurable, il existe une suite croissant $(\varphi_n : Y \to [0, +\infty[)_{n \in N}$ de fonctions étagées mesurables telle que $\lim_{n \to +\infty} \varphi_n = g$.

D'après ce qui précède, on a, pour tout $n \in N$, $\int_Y \varphi_n d(h * \mu) = \int_X (\varphi_n \circ h)\, d\mu$. la suite $(\varphi_n \circ h)_{n \in N}$ étant croissante de limite $(g \circ h)$, on a, d'après le théorème de convergence monotone.

$$\int_Y gd(h * \mu) = \lim_{n \to +\infty} \int_Y \varphi_n d(h * \mu) = \lim_{n \to +\infty} \int_X (\varphi_n \circ h)\, d\mu = \int_X (g \circ h)\, d\mu$$

Soit maintenant $f : Y \to \mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ mesurable. Alors, d'après ce qui précède, $\int_Y |f|\, d(h * \mu) = \int_X |f \circ h|\, d\mu$, donc f est $(h * \mu)$-intégrable si et seulement si et seulement si $f \circ h$ est μ-intégrable. Dans ce cas, on a, pour $\mathbb{k} = \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\int_Y fd(h * \mu) &= \int_Y f_+ d(h * \mu) - \int_Y f_- d(h * \mu) \\
&= \int_X (f_+ \circ h)\, d\mu - \int_X (f_- \circ h)\, d\mu \\
&= \int_X (f \circ h)_+\, d\mu - \int_X (f \circ h)_-\, d\mu \\
&= \int_X (f \circ h)\, d\mu
\end{aligned}$$

Et de même pour $\Bbbk = \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}\int_Y fd(h*\mu) &= \int_Y (\operatorname{Re} f)d(h*\mu) + i\int_Y (\operatorname{Im} f)d(h*\mu) \\ &= \int_X (\operatorname{Re} f\circ h)\,d\mu + i\int_X (\operatorname{Im} f\circ h)\,d\mu \\ &= \int_X \operatorname{Re}(f\circ h)d\mu + i\int_X \operatorname{Im}(f\circ h)d\mu \\ &= \int_X (f\circ h)d\mu.\end{aligned}$$

■

Intégration sur une partie et espace mesuré induit

Proposition 2.23 *Une fonction $f : A \to \mathbb{C}$ est μ_A-intégrable si et seulement si et seulement si f est la restriction à $A \subset X$ d'une fonction $g : X \to \mathbb{C}$ telle que $g\chi_A$ soit intégrable sure X. Dans ce cas, on a*

$$\int_A (g|_A)\,d\mu_A = \int_X g\chi_A d\mu.$$

Preuve. Remarquons qu'une fonction $f : A \to \mathbb{C}$ est toujours la restriction à A de la fonction $\widetilde{f}\chi_A$ où $\widetilde{f} : x \to f(x)$ si $x \in A$ et 0 si $x \notin A$. Il suffit donc, pour démontrer la proposition, de démontrer l'égalité ci-dessus pour $g : X \to \mathbb{C}$ intégrable sur A au sens de la définition précédent. Commençons par montrer que si $g : X \to [0, +\infty]$ est mesurable, alors $\int_A g|_A d\mu_A = \int_A \chi_{B\cap A} d\mu_A = \mu_A(B\cap A) = \mu(B\cap A) = \int_X \chi_{B\cap A} d\mu = \int_X \chi_B\chi_A d\mu$.

Par linéarité de l'intégrale, c'est encore vrai si g est une fonction étagée mesurable es positive. Si g est mesurable à valeurs dans $[0, +\infty]$, on écrit $g = \lim_{n\to+\infty}\varphi_n$ avec $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions étagées mesurables et positives, de sorte que, grâce au théorème de convergence monotone.

$$\begin{aligned}\int_A g|_A d\mu_A &= \int_A (\lim_{n\to+\infty}\varphi_n)|_A d\mu_A = \int_A \lim_{n\to+\infty}((\varphi_n)|_A)d\mu_A \\ &= \lim_{n\to+\infty}\int_A (\varphi_n)|_A d\mu_A \\ &= \lim_{n\to+\infty}\int_X \varphi_n\chi_A d\mu \\ &= \int_X (\lim_{n\to+\infty}\varphi_n)\chi_A d\mu \\ &= \int_X g\chi_A d\mu.\end{aligned}$$

Si maintenant $g : X \to \mathbb{C}$ est mesurable, alors on a, d'après ce qui précède, $\int_A (|g|)\,|_A d\mu_A = \int_X |g|\,\chi_A d\mu$, ce qui montre que $(|g|)\,|_A$ est μ_A-intégrable si et seulement si $|g|\,\chi_A$ est μ-intégrable (c'est-à-dire si g est intégrable sur A. L'égalité $\int_A (g|_A)\, d\mu_A = \int_X g\chi_A d\mu$ se déduit alors de ce qui précède et de la linéarité de l'intégrale appliquée à la décomposition $g = \left((\operatorname{Re} g)_+ - (\operatorname{Re} g)_- + i\,(\operatorname{Im} f)_+ - (\operatorname{Im} f)_-\right)$. ■

2.2 Intégration des fonctions définies sur un espace produit

Dans cette section, nous envisageons la question de l'intégration des fonctions mesurables $f : X \times Y \to \mathbb{C}$ définies sur un espace mesurable produit $(X \times Y, M \otimes N)$. Jusqu'à présent, les espaces produit étaient uniquement apparus comme espaces d'arrivée d'applications mesurables. Ici, nous allons avoir besoin d'une mesure sur la tribu produit $M \otimes N$. Si (X, M) et (Y, N) sont munis de mesures μ et v, il existe une mesure naturelle sur $M \otimes N$, appelée la mesure produit et notée $\mu \otimes v$. La construction de cette mesure repose sur le théorème de prolongement des premesures sur une algèbre et débouche sur un résultat fondamental qui sera d'usage constant dans la suite : le théorème de Fubini.

Soit (X, M, μ) et (Y, N, v) deux espace mesurés. Le but de cette section est de donner la construction et les principales propriétés d'une mesure sur l'espace mesurable produit $(X \times Y, M \otimes N)$ appelée mesure produit des mesures μ et v, rappelons que la tribu produit $M \otimes N$ est la tribu engendrée par les pavés mesurables $A \times B$ où $A \in M$ et $B \in N$, et que l'ensemble des réunions finies disjointes de tels pavés est une algèbre, que nous noterons A. La mesure produit $\mu \otimes v : M \otimes N \to [0, +\infty]$ doit en particulier affecter une mesure aux pavés $A \times B$ et il est naturelle de demander

$$(\mu \otimes v)\,(A \times B) = \mu\,(A)\, v\,(B)$$

Relation qui généralise le fait que l'aire d'un rectangle $[a, b] \times [c, d]$ de $\mathbb{R}^2$ est le produit $(b - a)\,(d - c)$ des longueurs des cotés. Nous allons maintenant montrer qu'il existe une mesure sur $M \otimes N$. Nous verrons que, lorsque (X, M, μ) et (Y, N, v) sont σ-finis, une telle mesure est en outre unique.

Lemme 2.24 *Soit $A \times B$ un pavé mesurable. Si $(A_j \times B_j)_{j \in J}$ est une famille disjointe finie ou dénombrable de pavés mesurables vérifiant $\cup_{j \in J} (A_j \times B_j) = A \times B$, alors on a :*

$$\mu\,(A)\, v\,(B) = \sum_{j \in J} \mu\,(A_j)\, v\,(B_j)\,.$$

Preuve. Pour tout $x \in X$ et tout $y \in Y$, on a :

$$\chi_A(x)\chi_B(y) = \chi_{A\times B}(x,y) = \sum_{j\in J}\chi_{A_j\times B_j}(\chi,y) = \sum_{j\in J}\chi_{A_j}(x)\chi_{B_j}(y).$$

En intégrant par rapport à x, on obtiens, pour tout $y \in Y$,

$$\begin{aligned}
\mu(A)\chi_B(y) &= \int_X \chi_A(x)\chi_B(y)\,d\mu(x) = \int_X\left(\sum_{j\in J}\chi_{A_j}(x)\chi_{B_j}(y)\right)d\mu(x)\\
&= \sum_{j\in J}\left(\int_X \chi_{A_j}(x)\,d\mu(x)\right)\chi_{B_j}(y)\\
&= \sum_{j\in J}\mu(A_j)\chi_{B_j}(y).
\end{aligned}$$

De même, en intégrant par rapport à y, on obtient :

$$\mu(A)v(B) = \sum_{j\in J}\mu(A_j)\int_Y \chi_{B_j}(y)\,dv(y) = \sum_{j\in J}\mu(A_j)v(B_j).$$

■

Remarque 2.25 *Dans la démonstration ci-dessus, le prolongement λ de π est déterminé de manuaire unique : λ est la restriction à $\sigma(A) = M\otimes N$ de la mesure extérieure sur $X\times Y$ associée à la premesure $\pi : A \to [0,+\infty]$. On pourrait donc légitimement appeler ce λ la mesure produit et y le noter $\mu\otimes v$ même si on ne suppose pas μ et v σ-finies.*

Définition 2.26 *(Applications partielles en un point). Soit f une application définie sur un espace produit $X\times Y$. Pour tout $x\in X$ et tout $y\in Y$, on note f_x et f_y les applications sur Y et X respectivement définies par :*

$$f_x : y\in Y \to f(x,y)\,et f_y : x\in X \to f(x,y).$$

f_x et f_y sont les applications partielles de f au point $(x,y)\in X\times Y$.

Proposition 2.27 *Soit (X,M) et (Y,N) deux espaces mesurables, $x\in X$ et $y\in Y$. Alors,*

1. si $E\in M\otimes N$, $E_x\in N$ pour tout $x\in X$ et $E_y\in M$ pour tout $y\in Y$: les tranches d'une partie mesurable sont mesurables ;

2. si (Z, P) est une espace mesurable et $f : X \to Z$ sont respectivement N-mesurable et M-mesurable : les applications partielles d'une application mesurable sont des applications mesurables.

Preuve. 1. Soit R l'ensemble des parties E de $X \times Y$ telles que $E_X \in N$ pour

tout $x \in X$ et $E_y \in M$ pour tout $y \in Y$. Nous allons montrer que R est une tribu qui contient l'ensemble des pavés mesurables $A \times B$, $A \in M$, $B \in N$, en conséquence de quoi R contiendra la tribu engendrée par ces pavés, qui est la tribu $M \otimes N$. Puisque $(A \times B)_x = B$ si $x \in A$ et $\varnothing$ sinon, on a bien $(A \times B)_x \in N$ pour tout $x \in X$ lorsque $A \in M$ et $B \in N$. De même, $(A \times B)_y \in M$ pour tout $y \in Y$. De plus, $\left(\cup_{n=1}^{+\infty} E_n\right)_x = \cup_{n=1}^{+\infty} (E_n)_x$ et $(E^c)_x = (E_x)^c$, et de même pour les tranches horizontales, de sorte que R est bien stable par réunion dénombrable et par passage au complémentaire, et est donc bien une tribu.

2. Soit $F \in p$ et soit $x \in X$. On a $(f_x)^{-1}(f) = (f^{-1}(f))_x$. Or $f^{-1}(f) \in M \otimes N$ car f est $(M \otimes N)-$mesurable. Donc, d'après (1), $(f_x)^{-1}(f) \in N$ et f_x est donc $N-$mesurable. De même, f_y est $M-$mesurable pour tout $y \in Y$. ■

Chapitre 3

Riemann contre Lebesgue

Dans ces quelques lignes, j'essaie de dire ce qui fait la différence, au fond, entre Riemann et Lebesgue, et pourquoi Lebesgue c'est mieux que Riemann. Pour simplifier, plaçons-nous dans un cas simple, celui d'une fonction $f : [a, b] \to [A, B]$, définie sur un intervalle compact et bornée sur cet intervalle. On supposera même $f \geq 0$ pour pouvoir s'appuyer sur la notion intuitive d'aire. L'idée de base de l'intégrale c'est celle que l'on apprend en terminale : l'intégrale c'est l'aire sous la courbe représentative de f, mais il s'agit de la calculer, voire pour des fonctions qui peuvent être compliquées, de la définir. Dans les deux cas on va utiliser deux ingrédients Riemann contre Lebesgue

Dans ces quelques lignes, j'essaie de dire ce qui fait la différence, au fond, entre Riemann et Lebesgue, et pourquoi Lebesgue c'est mieux que Riemann.

Pour simplifier, plaçons-nous dans un cas simple, celui d'une fonction $f : [a, b] \to [A, B]$, définie sur un intervalle compact et bornée sur cet intervalle. On supposera même $f \geq 0$ pour pouvoir s'appuyer sur la notion intuitive d'aire. L'idée de base de l'intégrale c'est celle que l'on apprend en terminale : l'intégrale c'est l'aire sous la courbe représentative de f, mais il s'agit de la calculer, voire pour des fonctions qui peuvent être compliquées, de la définir.

Dans les deux cas on va utiliser deux ingrédients :

• L'aire du rectangle : si on a une partie $A \times B$ de $\mathbb{R}^2$, son aire c'est $l(A) \times l(B)$, où l désigne la longueur. C'est la formule longueur $\times$ largeur de l'école primaire. Encore faut-il savoir ce qu'on entend par longueur si A et B sont des parties de $\mathbb{R}$ un peu compliquées (on pense aux ensembles de Cantor, par exemple).

• La croissance de l'aire : si on a $E \subset F$, l'aire de E est plus petite que celle de F. Euclide disait ça sous la forme “le tout est plus grand que la partie”.

3.1 Riemann

La voie Riemann consiste à prendre sur l'axe des x des parties simples, pour lesquelles le calcul de la longueur ne pose pas de problème : les intervalles. Cela signifie qu'on découpe $[a,b]$ avec une subdivision $S : a = s_0 < s_1 < ... < s_n = b$ et que l'on encadre f sur les intervalles de la subdivision (comme f est bornée il n'y a pas de problème) par ses bornes m_i et M_i. On obtient alors les sommes de Darboux : $\sigma(S,f) = \sum_{i=0}^{n-1} (s_{i+1} - s_i)\, m_i$ et $\sum_{i=0}^{n-1}(S,f) = (s_{i+1} - s_i)\, M_i$, qui correspondent aux sommes des aires des rectangles (des vrais, ici) et qui encadrent l'aire sous la courbe f. L'intégrale est alors la limite commune de ces sommes, si toutefois elle veut bien exister, ou plutôt la borne supérieure des σ et inférieure des $\sum$, pour autant qu'elles coïncident. On dit qu'on calcule l'intégrale en piles. On peut encore dire cela en termes de fonctions en escalier : la fonction f est encadrée par les fonctions $\mathcal{E}sc\,(S, m_i)$ et $\mathcal{E}sc\,(S, M_i)$ et l'intégrale est encadrée par les intégrales de fonctions en escalier.

L'avantage de Riemann c'est qu'il n'y a pas besoin d'être bien savant pour mesurer des longueurs sur $\mathbb{R}$: les intervalles suffisent. L'inconvénient de Riemann c'est qu'on n'a pas assez de fonctions intégrables pour avoir les bons théorèmes de convergence.

3.2 Lebesgue

La voie Lebesgue consiste à faire la même chose que Riemann, mais sur l'axe des y au lieu de l'axe des x, c'est-à-dire à encadrer f à partir des valeurs de $y = f(x)$ et non pas des valeurs de x. Pour cela, on partage l'image $[A,B]$ de f en n parties en utilisant des points $t_0 = A < t_1 < t_2 < ... < t_n = B$. On considère alors, pour $i = 0, ..., n-1$, les ensembles $E_i = f^{-1}\left([t_i, t_{i+1}[\right) = \{x \in [a,b] \,/ t_i \leq f(x) < t_{i+1}\}$.

Attention, les ensembles Ei peuvent être très compliqués (penser au cas où f est la fonction caractéristique d'un Cantor) mais, s'ils ont une mesure $\lambda(E_i)$, on peut encadrer $\int_a^b f$ entre les $\int_{i=0}^{n-1} t_i \lambda(E_i)$ et $\int_{i=0}^{n-1} t_{i+1} \lambda(E_i)$. C'est encore l'aire du "rectangle" (mais avec un rectangle de base compliquée) ou, plus savamment, c'est Bienaymé-Tchebychev. On montre, voir 2 ci-dessous, que l'intégrale de f est la borne supérieure (resp. inférieure) des petites (resp. grandes) sommes. On dit qu'on calcule l'intégrale en tranches.

Là encore, on peut dire cela en termes d'encadrement par des fonctions plus simples, mais, comme les bases des rectangles ne sont plus des intervalles, il ne s'agit plus de fonctions en escalier. Précisément, on définit :

Définition 3.1 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On dit que f est une fonction étagée si elle vérifie l'une des conditions suivantes :*

1) f est mesurable et ne prend qu'un nombre fini de valeurs, *2) f est de la forme $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi A_i$ avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$ et les A_i mesurables,*

3) f est de la forme $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi A_i$ avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$ et les Ai mesurables disjoints.

L'intégrale de f est alors définie par la formule $\int_{\mathbb{R}} f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda(A_i)$ (toujours l'aire du"rectangle").

Ce que dit la voie Lebesgue, c'est que l'intégrale de f est obtenue comme borne supérieure (resp. inférieure) des intégrales des fonctions étagées plus petites (resp. plus grandes) qu'elle. C'est justifié par le théorème suivant :

Théorème 3.2 *Soit f une fonction Lebesgue-intégrable positive. L'intégrale de f est la borne supérieure des intégrales des fonctions étagées g qui sont inférieures ou égales à f. Si f est bornée on a la même propriété avec la borne inférieure des fonctions étagées $\geq f$.*

Preuve. *Notons que le fait que f soit positive assure qu'il existe des fonctions étagées plus petite (par exemple la fonction nulle). Il est clair qu'on a $\int g \leq \int f$ donc $\sup \int g \leq \int f$. Réciproquement, supposons que le $\sup$ s des intégrales des fonctions étagées $h \leq f$ soit strictement plus petit que f. Pour $n \in N$, il existe une fonction étagée h_n avec $s - \frac{1}{n} \leq \int h_n \leq s$. Quitte à remplacer h_n par $g_n = Max(h_1, ..., h_n)$ on peut supposer la suite (h_n) croissante. Le théorème de Beppo-Levi montre que cette suite converge vers une fonction $g \leq f$ au sens de la convergence simple presque partout et au sens de L^1 et qu'on a $g = \lim h_n = s < \int f$. Comme on a $\int (f - g) > 0$, il y a un ensemble A de mesure positive sur lequel on a $f - g \geq \eta > 0$(considérer les ensembles sur lesquels on a $f - g \geq \frac{1}{n}$). On considère les fonctions $h_n + \eta \chi A$. Ce sont des fonctions étagées, plus petites que f et le $\sup$ de leurs intégrales est $s + \eta \chi(A) > s$: c'est absurde.* ■

Remarque 3.3 *1) Si f est bornée l'assertion sur l'inf se montre de la même façon. Attention, si f n'est pas bornée, il n'y a aucune fonction étagée qui majore f et la propriété avec l'inf des étagées est fausse (exemple $1/\sqrt{2}$ sur $]0, 1]$).*

2) On rencontre là une autre différence entre Riemann et Lebesgue. Dans la théorie de Riemann, les intégrales, qui sont des réels, sont vus comme des limites de suites adjacentes, dans la théorie de Lebesgue, on se contente de les voir comme des bornes supérieures (sans les encadrer au-dessus). C'est, à mon avis, une différence conceptuelle essentielle.

3.3 Riemann et Lebesgue copains

Il y a au moins un cas où les deux approches sont les mêmes : pour les fonctions monotones. En effet, si f est, disons, croissante, les sommes de Lebesgue et de Riemann coïncident car on a $E_i = [s_i, s_{i+1}[$.

3.4 Pourquoi que c'est mieux Lebesgue

Si on a une vision utilitaire des choses, on peut dire que Lebesgue c'est mieux parce que les théorèmes qu'on y obtient sont plus efficaces. Il suffit de penser aux théorèmes de convergence monotone et dominée ou aux intégrales dépendant d'un paramètre pour en être convaincu. C'est sûr. Mais ce qu'on peut se demander c'est, pourquoi peut-on obtenir ces théorèmes avec la méthode de Lebesgue (le découpage en tranches) et pas avec celle de Riemann (le découpage en piles) ? La question n'est pas évidente et ce qu'on a fait au chapitre 1 du polycopié ne permet pas d'y répondre, car l'entrée par l'analyse fonctionnelle masque la définition “en tranches”. Nous verrons mieux ce qui est utilisé au chapitre 2, notamment pour la preuve du théorème de convergence monotone. En fait, le point technique qui semble crucial est le suivant : si on a une fonction f intégrable (éventuellement méchante) et une fonction u étagée, on a besoin, dans le théorème de convergence monotone comme on le fera au chapitre 2, de considérer la fonction v qui vaut $u(x)$ si $u(x) \leq f(x)$ et 0 sinon. Il est clair que v est encore étagée (elle ne prend toujours qu'un nombre fini de valeurs). En revanche, si l'on faisait ça avec une fonction u en escalier, voire une constante, v ne serait plus en escalier, même si f est Riemann-intégrable. En effet, l'ensemble des points où $f \geq u$ peut-être une cochonnerie sans nom et pas du tout un intervalle ou une réunion finie d'intervalles (ce qui serait nécessaire pour avoir une fonction en escalier). Exemple : $f = \chi_K$ où K est le Cantor triadique et $u = 1/2$.

Bibliographie

[1] G. Debeaumarché, F. Dorra, M. Hochart ; Mathématiques MPSI-PCSI ; Imprimé en France "La source d'Or" juin 2009.

[2] J. P. Marco ; Mathématiques Analyse ; Imprimé en France "La source d'Or" juin 2009.

[3] H. Boumza, B. Gollas, S. Callas, M. Dellinger, Z. Fayet ; Mathématiques Algèbre ; Imprimé en France "La source d'Or" juin 2009.

[4] M. Krasnov, A. Kisselev, G. Makarenko, E. Chikine ; Mathématiques supérieures pour ingénieurs et polytéchniciens ; 1989.

[5] E. Azoulay, J. Avignant, G. Auliac ; Les Mathématiques En Licence ; Dunod, Paris, 2007.