

Léonard Todjihounde

Topologie élémentaire

pour la licence de
mathématiques

2^e édition

Cépaduès
ÉDITIONS

Table des matières

Avant-Propos	7
1 ESPACES MÉTRIQUES ET TOPOLOGIQUES	9
Espaces métriques	9
Notion de distance	9
Boules ouvertes, boules fermées, sphères	10
Parties et applications bornées, diamètre	12
Sous-espaces métriques	14
Espaces topologiques	14
Généralités	15
Topologie des espaces métriques	16
Topologie engendrée	18
Base d'ouverts d'une topologie	19
Voisinages, parties fermées	20
Sous-espace topologiques	23
Adhérence, intérieur, frontière	26
Suites dans un espace métrique	32
Valeurs d'adhérences et suites convergentes	32
Suites de Cauchy	35
Espaces métriques complets	36
Applications continues	40
Quelques propriétés générales	45

Continuité uniforme	48
Homéomorphismes	48
Applications lipschitziennes	49
Distances équivalentes	52
Topologie produit	53
Topologie quotient	56
Série d'exercices sur le chapitre 1	59
2 ESPACES COMPACTS	65
Espaces topologiques compacts	65
Généralités	65
Parties compactes	67
Compacité et continuité	70
Produit d'espaces compacts	72
Espaces métriques compacts	73
Précompacité	73
Parties compactes de \mathbb{R}^n	80
Compacité et continuité uniforme	81
Série d'exercices sur le chapitre 2	82
3 ESPACES CONNEXES	87
Espaces topologiques connexes	87
Généralités	87
Parties connexes	89
Propriétés de stabilité	90
Connexité et continuité	91
Produit d'espaces connexes	91
Composantes connexes	93
Espaces métriques connexes	94
Espaces métriques bien enchaînés	94
Parties connexes de \mathbb{R}	96

Applications de la connexité	97
Connexité par arcs	99
Série d'exercices sur le chapitre 3	101
4 ESPACES VECTORIELS NORMÉS	107
Norme sur un espace vectoriel	107
Généralités	107
Espaces de Banach	111
Exemples d'espaces de Banach	114
Applications linéaires continues	116
Convergence dans $\mathcal{L}(E, F)$	119
Composition d'applications linéaires continues	120
Isomorphismes d'espaces vectoriels normés	122
Normes équivalentes	126
Espaces vectoriels normés de dimension finie	127
Série d'exercices sur le chapitre 4	131
5 ESPACES DE HILBERT	139
Espaces préhilbertiens	139
Formes hilbertiennes	139
Projection orthogonale	145
Projection sur un convexe complet	146
Projection sur un sous-espace complet	150
Dual topologique d'un espace de Hilbert	152
Bases Hilbertiennes	154
Méthode d'orthonormalisation de Gram-Schmidt	159
Polynômes orthogonaux	160
Série d'exercices sur le chapitre 5	165
6 ESPACES TOPOLOGIQUES PARTICULIERS	173
Groupes topologiques	173

Généralités	173
Tores et espaces projectifs	182
Série d'exercices sur le chapitre 6	188
Bibliographie	191
Index	193