

SCIENCES SUP

01

0

5

9

8

32

Cours et exercices corrigés

Licence 3 • Master • CAPES • Agrégation

THÉORIE DES NOMBRES

2^e édition

Daniel Duverney

DUNOD

Table des matières

Avant-propos	vii
Structure du livre	ix
CHAPITRE 1 • Irrationalité et approximation diophantienne	1
1.1 Irrationalité de \sqrt{d}	1
1.2 Irrationalité de e	1
1.3 Irrationalité de π	2
1.4 Irrationalité des valeurs de la fonction de Tschakaloff	3
1.5 Approximation diophantienne	4
1.6 Remarques méthodologiques	6
Exercices	7
CHAPITRE 2 • Développement des nombres réels en séries et produits infinis	9
2.1 Développement p -adique d'un nombre réel	9
2.2 Développement d'un nombre réel en série de Engel	12
2.3 Produit infini de Cantor	13
Exercices	15
CHAPITRE 3 • Fractions continues	17
3.1 Introduction	17
3.2 Un critère de convergence	20
3.3 L'art et la manière de diviser par zéro	22
3.4 Développement en fraction continue dans Σ	24
3.5 Un quotient de fonctions de Bessel	25
3.6 Fractions continues et irrationalité	27
Exercices	30
CHAPITRE 4 • Fractions continues régulières	33
4.1 Développement d'un nombre réel positif en fraction continue régulière	33
4.2 Développement de e en fraction continue régulière	36

4.3	L'équation diophantienne $ax + by = c$	37
4.4	Fractions continues régulières et approximation diophantienne	38
4.5	Nombres irrationnels quadratiques et fractions continues	40
4.6	L'équation de Pell	42
	Exercices	44
CHAPITRE 5 • Corps de nombres quadratiques et équations diophantiennes		47
5.1	Corps de nombres quadratiques	47
5.2	Anneau des entiers d'un corps de nombres quadratiques	48
5.3	Unités de l'anneau des entiers d'un corps de nombres quadratiques	49
5.4	Décomposition en produit de facteurs premiers dans \mathbb{Z}	51
5.5	Éléments premiers et éléments irréductibles	53
5.6	Anneaux euclidiens	55
5.7	Équations diophantiennes	56
	Exercices	58
CHAPITRE 6 • Carrés et sommes de carrés		61
6.1	Sommes de deux carrés	61
6.2	Structures algébriques finies	62
6.3	Le symbole de Legendre	64
6.4	Calcul dans \mathbb{F}_p^*	68
6.5	Formes quadratiques binaires à coefficients entiers	68
6.6	Sommes de quatre carrés	73
	Exercices	75
CHAPITRE 7 • Fonctions arithmétiques		78
7.1	Fonction génératrice ordinaire	78
7.2	Séries de Lambert	80
7.3	La formule du triple produit de Jacobi	82
7.4	Sommes de deux carrés	84
7.5	Théorème de Jacobi sur les sommes de quatre carrés	86
7.6	L'indicateur d'Euler $\varphi(n)$	86
7.7	Valeur moyenne de $r_2(n)$	88
7.8	Distribution des nombres premiers : la fonction $\pi(n)$	89
	Exercices	93

CHAPITRE 8 • Approximants de Padé	98
8.1 Généralités	98
8.2 Fonction hypergéométrique de Gauss et approximants de Padé du binôme $f(x) = (1 - x)^\alpha$	99
8.3 Fonction hypergéométrique confluyente et approximants de Padé de l'exponentielle	102
8.4 Applications arithmétiques	103
Exercices	106
CHAPITRE 9 • Nombres algébriques et mesures d'irrationalité	110
9.1 Nombres algébriques	110
9.2 Entiers algébriques	111
9.3 Nombres transcendants et théorème de Liouville	114
9.4 Mesures d'irrationalité	115
9.5 Équations diophantiennes et mesures d'irrationalité	118
9.6 Théorèmes de Thue et de Roth	120
Exercices	122
CHAPITRE 10 • Corps de nombres algébriques	126
10.1 Corps de nombres algébriques	126
10.2 Conjugués, normes et traces	128
10.3 Anneau des entiers d'un corps de nombres	130
10.4 Unités	131
10.5 Discriminants et bases entières	133
10.6 L'équation de Fermat $x^5 + y^5 = z^5$	136
Exercices	138
CHAPITRE 11 • Idéaux	141
11.1 Idéaux d'un corps de nombres	141
11.2 Arithmétique des idéaux entiers	143
11.3 Norme d'un idéal	144
11.4 Décomposition de $\langle p \rangle$, p premier, en produit d'idéaux premiers	146
11.5 Nombre de classes d'idéaux	148
11.6 Application à l'équation de Mordell $y^2 = x^3 + k$	151
Exercices	152

CHAPITRE 12 • Introduction aux méthodes de transcendance	155
12.1 Fonctions algébriques et fonctions transcendentes	155
12.2 Maison d'un nombre algébrique	157
12.3 La méthode de transcendance de Mahler	158
12.4 Remarques méthodologiques ; lemme de Siegel	160
12.5 Le théorème de Hermite-Lindemann	161
12.6 Le théorème de Gelfond-Schneider	163
12.7 La méthode de Siegel-Shidlovski	166
Exercices	167
Solutions des exercices du chapitre 1	170
Solutions des exercices du chapitre 2	175
Solutions des exercices du chapitre 3	180
Solutions des exercices du chapitre 4	186
Solutions des exercices du chapitre 5	194
Solutions des exercices du chapitre 6	202
Solutions des exercices du chapitre 7	208
Solutions des exercices du chapitre 8	217
Solutions des exercices du chapitre 9	228
Solutions des exercices du chapitre 10	237
Solutions des exercices du chapitre 11	243
Solutions des exercices du chapitre 12	250
Références bibliographiques	260
Index	261