

Bien débiter en mathématiques

L1, L2, L3

Classes préparatoires

# Réduction des endomorphismes

---

*Exercices corrigés avec rappels de cours*

Mohamed Boucetta  
Jean-Marie Morvan

*Avec la participation de*  
Rémi Morvan

**Cepaduès**  
- éditions -

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Prérequis</b>	<b>5</b>
1.1	Rappels sur les endomorphismes . . . . .	5
1.2	Rappels sur les polynômes . . . . .	6
1.2.1	Racines d'un polynôme . . . . .	6
1.2.2	Polynômes scindés . . . . .	7
1.2.3	Polynômes de matrices . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Déterminants</b>	<b>9</b>
2.1	Rappels de cours . . . . .	9
2.1.1	La définition du déterminant d'une matrice par récurrence . . . . .	9
2.1.2	La définition classique du déterminant d'une matrice carrée d'ordre $n$ . . . . .	11
2.1.3	Déterminant de $n$ vecteurs . . . . .	12
2.1.4	Quelques règles de calcul . . . . .	13
2.1.5	Quelques simplifications possibles . . . . .	14
2.1.6	Le cas de matrices triangulaires . . . . .	16
2.1.7	Déterminant d'un endomorphisme . . . . .	16
2.1.8	Calcul de l'inverse d'une matrice . . . . .	17
2.1.9	Calcul du rang d'une matrice . . . . .	17
2.2	Exercices . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Systèmes linéaires</b>	<b>35</b>
3.1	Rappels de cours . . . . .	35
3.1.1	Définitions . . . . .	35
3.1.2	Système de Cramer et formule de Cramer . . . . .	38
3.1.3	Systèmes homogènes . . . . .	38
3.1.4	Le cas général . . . . .	40
3.1.5	Interprétation géométrique . . . . .	42
3.2	Exercices . . . . .	43
<b>4</b>	<b>Diagonalisation des endomorphismes</b>	<b>57</b>
4.1	Rappels de cours . . . . .	57

4.1.1	Vecteurs propres, valeurs propres . . . . .	58
4.1.2	Polynôme caractéristique . . . . .	59
4.1.3	Le cas des matrices symétriques réelles . . . . .	62
4.1.4	Deux remarques pour conclure . . . . .	63
4.2	Exercices . . . . .	64
<b>5</b>	<b>Polynômes annulateurs</b>	<b>89</b>
5.1	Rappels de cours . . . . .	89
5.1.1	Définition . . . . .	89
5.1.2	Le théorème d'Hamilton-Cayley . . . . .	90
5.1.3	Une condition de diagonalisation . . . . .	91
5.1.4	Le théorème des noyaux . . . . .	91
5.2	Exercices . . . . .	93
<b>6</b>	<b>Trigonalisation</b>	<b>111</b>
6.1	Rappels de cours . . . . .	111
6.2	Exercices . . . . .	114
<b>7</b>	<b>Réduction de Jordan</b>	<b>133</b>
7.1	Rappels de cours . . . . .	133
7.1.1	Polynôme minimal . . . . .	133
7.1.2	La réduction de Jordan . . . . .	134
7.2	Exercices . . . . .	137