

François **Cottet-Emard**

# Probabilités et tests d'hypothèse

**COURS ET  
EXERCICES CORRIGÉS**

**LMD**

Licence de mathématiques  
et de biologie



de boeck

## Table des matières

### Chapitre 1 Dénombrements dans un ensemble fini

<b>1</b>	<b>Ensembles et opérations</b> .....	2
1.1	Inclusion .....	2
1.2	Réunion de deux parties de $E$ .....	2
1.3	Intersection de deux parties de $E$ .....	3
1.4	Parties disjointes .....	4
1.5	Complémentaire d'une partie de $E$ .....	4
1.6	Partition de $E$ .....	5
<b>2</b>	<b>Produit d'ensembles</b> .....	6
<b>3</b>	<b>Cardinal d'un ensemble</b> .....	6
<b>4</b>	<b>Permutations</b> .....	8
4.1	Exemple .....	8
4.2	Définition .....	8
4.3	Nombre de permutations d'un ensemble à $n$ éléments .....	8
4.4	Quelques exemples .....	9
<b>5</b>	<b>Arrangements de <math>n</math> objets <math>p</math> à <math>p</math></b> .....	10
5.1	Exemple .....	10
5.2	Définition .....	10
5.3	Calcul du nombre d'arrangements .....	11

<b>6</b>	<b>Combinaisons de <math>n</math> objets <math>p</math> à <math>p</math></b> .....	12
6.1	Exemple.....	12
6.2	Définition.....	12
6.3	Calcul du nombre de combinaisons.....	12
6.4	Expression de $\binom{n}{p}$ avec les factorielles.....	14
<b>7</b>	<b>Les formules classiques avec les combinaisons</b> .....	14
7.1	Valeurs aux bornes.....	14
7.2	Une forme de symétrie.....	15
7.3	Le triangle de Pascal.....	15
7.4	La formule du binôme de Newton.....	16
7.5	La somme $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n}$ .....	16
7.6	D'autres sommes du même style.....	17
<b>8</b>	<b>Dérangements de <math>n</math> éléments</b> .....	17

## Chapitre 2 Probabilités sur un ensemble fini

<b>1</b>	<b>Univers mathématique fini</b> .....	38
1.1	Description de la situation.....	38
1.2	Poids d'une partie de $E$ .....	38
1.3	Propriétés du poids d'une partie.....	39
1.4	Un peu de sophistication.....	40
<b>2</b>	<b>Le lancer d'un dé : modélisation</b> .....	41
2.1	Un seul lancer du dé.....	42
2.2	Un lancer de deux dés simultanés.....	42
<b>3</b>	<b>Univers associé à une expérience aléatoire</b> .....	43
3.1	Définition d'un univers de probabilité.....	43
3.2	Evènement dans cet univers.....	44
3.3	Probabilité sur $\Omega$ .....	45
3.4	Seconde définition d'une probabilité sur un univers fini $\Omega$ .....	46
<b>4</b>	<b>Premiers exemples de modélisation</b> .....	47
<b>5</b>	<b>Le cas fondamental de l'équiprobabilité</b> .....	52
<b>6</b>	<b>Résolution plus élémentaire des exemples précédents</b> .....	53
<b>7</b>	<b>Probabilités conditionnelles et évènements indépendants</b> .....	57
7.1	Idée courante de la probabilité conditionnelle.....	57
7.2	Définition de la probabilité conditionnelle $P(A/B)$ .....	58

8	Evènements indépendants .....	59
9	Exemple fondamental de modélisation dans le cas de non-équiprobabilité : lancers successifs d'une pièce truquée .....	60

### Chapitre 3 Probabilités conditionnelles

1	Introduction .....	78
2	Définition et calcul de la probabilité conditionnelle $P(A/B)$ .....	79
3	Formule élémentaire de Bayes .....	80
4	Formule élémentaire des probabilités totales .....	81
	4.1 Exemple .....	82
	4.2 Formule des probabilités totales .....	83
	4.3 Application fondamentale .....	83
5	Formule générale des probabilités totales .....	84
6	Représentation avec un graphe .....	86
7	Probabilité conditionnelle sachant plusieurs évènements .....	87

### Chapitre 4 Événements indépendants - Répétitions indépendantes d'une expérience

1	Deux évènements indépendants. Intuition courante et caractérisation mathématique .....	106
	1.1 Intuition courante .....	106
	1.2 Caractérisation mathématique .....	106
	1.3 Indépendance et évènements contraires .....	107
2	Indépendance de $N \geq 3$ évènements .....	108
	2.1 Indépendance de trois évènements .....	108
	2.2 Un nombre quelconque d'évènements .....	108
	2.3 Dans la pratique .....	109
3	Répétition $n$ fois de suite et de façons indépendantes d'une même expérience .....	109
	3.1 Le cadre et le but .....	109
	3.2 Probabilité d'avoir $k$ succès parmi les $n$ expériences .....	110
	3.3 Exemples .....	111
4	Temps d'attente du premier succès .....	112
	4.1 Le cadre .....	112
	4.2 Calcul de la probabilité du temps d'attente .....	113
	4.3 Le temps d'attente peut-il être infini ? .....	113
	4.4 Exemples .....	114

<b>5</b>	<b>Probabilité produit. Univers associé à des évènements indépendants</b> .....	114
5.1	L'univers $\Omega^2$ .....	115
5.2	L'univers $\Omega^p$ .....	116

## Chapitre 5 Univers infinis - Le cas dénombrable

<b>1</b>	<b>Ensemble dénombrable. Notion de série</b> .....	124
1.1	Ensemble dénombrable .....	124
1.2	Notion de série .....	125
1.3	La série géométrique .....	125
1.4	La série exponentielle .....	126
1.5	Série absolument convergente .....	126
1.6	Importance de l'ordre des termes .....	127
<b>2</b>	<b>Univers dénombrable</b> .....	128
<b>3</b>	<b>L'univers associé au temps d'attente du premier succès</b> .....	130
<b>4</b>	<b>Les enfants d'une famille</b> .....	131
<b>5</b>	<b>Une première idée du cas non dénombrable. Notion de tribu</b> .....	132

## Chapitre 6 Variables aléatoires discrètes

<b>1</b>	<b>Comment ça se passe en pratique</b> .....	136
1.1	Exemple 1 .....	136
1.2	Exemple 2 .....	137
1.3	En pratique .....	137
<b>2</b>	<b>Cas d'un univers fini. Définition d'une variable aléatoire. Loi d'une variable aléatoire</b> .....	138
2.1	Variable aléatoire sur $\Omega$ .....	138
2.2	Loi de probabilité de $X$ .....	139
2.3	Histogramme en bâton d'une variable aléatoire .....	142
<b>3</b>	<b>Cas d'un univers dénombrable</b> .....	143
3.1	Variable aléatoire sur $\Omega$ .....	144
3.2	Loi de la variable aléatoire $X$ .....	144
<b>4</b>	<b>Les variables aléatoires incontournables</b> .....	146
4.1	Variable aléatoire suivant une loi uniforme .....	146
4.2	Variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p$ .....	146
4.3	Variable aléatoire suivant une loi binomiale $B(n, p)$ .....	146
4.4	Variable aléatoire suivant une loi hypergéométrique .....	149
4.5	Variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p$ .....	150
4.6	Variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda$ .....	150

<b>5</b>	<b>Fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète</b> .....	151
<b>6</b>	<b>Somme de variables aléatoires</b> .....	155
<b>7</b>	<b>Variables aléatoires indépendantes</b> .....	155
7.1	Deux variables aléatoires indépendantes .....	155
7.2	Indépendance de $n$ variables aléatoires .....	157
<b>8</b>	<b>Deux exemples fondamentaux de sommes de variables aléatoires indépendantes</b> .....	158
8.1	Somme de $n$ variables aléatoires indépendantes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre $p$ .....	158
8.2	Somme de deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson .....	159
<b>9</b>	<b>Utilisation des logiciels commerciaux</b> .....	160
9.1	Loi binomiale $B(n, p)$ .....	161
9.2	Loi de Poisson $P(\lambda)$ .....	161
9.3	Loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N, M, n)$ .....	162

## Chapitre 7 Espérance et variance d'une variable aléatoire discrète

<b>1</b>	<b>Espérance d'une variable aléatoire prenant un nombre fini de valeurs</b> .....	164
1.1	Définition de l'espérance .....	164
1.2	Espérance d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme .....	166
1.3	Espérance d'une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli ...	166
1.4	Espérance d'une variable aléatoire suivant la loi binomiale $B(n, p)$	166
1.5	Remarque : théorème de transfert .....	167
<b>2</b>	<b>Propriétés de l'espérance</b> .....	167
<b>3</b>	<b>Espérance d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale ou une loi hypergéométrique</b> .....	168
3.1	Espérance d'une variable aléatoire suivant la loi binomiale $B(n, p)$	168
3.2	Espérance d'une variable aléatoire suivant la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N, M, n)$ .....	169
<b>4</b>	<b>Espérance d'une variable aléatoire prenant une infinité de valeurs</b> .....	169
<b>5</b>	<b>Quelques formules mathématiques utiles</b> .....	171
<b>6</b>	<b>Espérance d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique ou une loi de Poisson</b> .....	172
6.1	Loi géométrique de paramètre $p$ .....	172
6.2	Loi de Poisson de paramètre $\lambda$ .....	172

<b>7</b>	<b>Espérance du produit de deux variables aléatoires indépendantes</b> .....	173
<b>8</b>	<b>Variance et écart-type d'une variable aléatoire</b> .....	174
8.1	Définition de la variance .....	175
8.2	Autre écriture de la variance .....	175
<b>9</b>	<b>Variances des grandes lois classiques</b> .....	176
9.1	Loi uniforme .....	176
9.2	Loi de Bernoulli .....	177
9.3	Loi binomiale $B(n, p)$ .....	177
9.4	Loi géométrique .....	177
9.5	Loi de Poisson .....	178
<b>10</b>	<b>Variance d'une somme de variables aléatoires indépendantes</b> .....	178
10.1	Expression de la variance d'une somme $X + Y$ quelconque .....	179
10.2	Variance de la somme de deux variables aléatoires indépendantes .....	179
10.3	Variance de la somme de $n$ variables aléatoires indépendantes ....	180
10.4	Variance de la loi binomiale .....	180
<b>11</b>	<b>Covariance de deux variables aléatoires</b> .....	181
11.1	Définition .....	181
11.2	Coefficient de corrélation de $X$ et $Y$ .....	181
11.3	Variance de la loi hypergéométrique .....	182
11.4	Un peu d'algèbre .....	183
<b>12</b>	<b>Récapitulatif des grandes lois classiques</b> .....	184
<b>13</b>	<b>Fonction génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans <math>\mathbb{N}</math></b> .....	186
13.1	Définition .....	186
13.2	Les exemples fondamentaux .....	186
13.3	Calcul de l'espérance et de la variance de $X$ .....	187
13.4	Autre expression de la fonction génératrice .....	188
13.5	Fonction génératrice et indépendance .....	188

## Chapitre 8 Majorations et convergences

<b>1</b>	<b>Approximation de la loi hypergéométrique par la loi binomiale</b> .....	226
<b>2</b>	<b>Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson</b> .....	229
<b>3</b>	<b>Autres approximations</b> .....	231
<b>4</b>	<b>Inégalité de Bienaymé-Tchebychev</b> .....	232
4.1	Inégalité de Bienaymé-Tchebychev .....	232
4.2	Exemple fondamental .....	234

<b>5</b>	<b>Bienaymé-Tchebychev, Bernoulli et Binomiale</b> .....	235
<b>6</b>	<b>Loi faible des grands nombres</b> .....	236
6.1	Énoncé de la loi .....	236
6.2	Cas particulier des variables de Bernoulli .....	236
6.3	Généralisation à $p$ caractères .....	237
<b>7</b>	<b>Convergence en probabilité</b> .....	238

## Chapitre 9 La loi normale - Approximation par la loi normale - Lois du $\chi^2$ et de Student

<b>1</b>	<b>Préambule mathématique</b> .....	248
<b>2</b>	<b>Variable aléatoire à valeurs dans <math>\mathbb{R}</math></b> .....	249
<b>3</b>	<b>Variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite</b> $\mathcal{N}(0, 1)$ .....	250
3.1	Définition .....	250
3.2	Table de valeurs numériques .....	251
3.3	Espérance et variance .....	252
<b>4</b>	<b>Variables aléatoires suivant la loi normale d'espérance <math>m</math> et de variance <math>\sigma^2</math></b> .....	253
4.1	Définition .....	253
4.2	Calculs numériques avec $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ .....	254
<b>5</b>	<b>Utilisation des logiciels commerciaux</b> .....	255
<b>6</b>	<b>Combinaison linéaire de variables aléatoires indépendantes suivant des lois normales</b> .....	255
<b>7</b>	<b>Théorème de la limite centrée</b> .....	257
<b>8</b>	<b>Approximation de la loi binomiale par la loi normale</b> .....	258
<b>9</b>	<b>Comment appliquer cette approximation binomiale-normale</b> .....	259
<b>10</b>	<b>Loi du <math>\chi^2</math> à <math>n</math> degrés de liberté</b> .....	261
10.1	La définition qui nous sera utile dans la suite .....	261
10.2	La définition comme loi continue, mais que nous n'utiliserons pas .....	262
10.3	Espérance et variance du $\chi^2(n)$ .....	262
10.4	Un théorème de Cochran .....	263
10.5	Calculs numériques par table et logiciels .....	264
10.6	Asymétrie de la distribution du $\chi^2$ .....	264
10.7	Approximation du $\chi^2(n)$ pour $n$ grand .....	265

<b>11</b>	<b>Loi de Student à <math>n</math> degrés de liberté</b> .....	265
11.1	La définition que nous utiliserons .....	265
11.2	Autre définition que nous n'utiliserons pas .....	266
11.3	Symétrie de la distribution .....	266
11.4	Valeurs numériques et logiciels .....	266
11.5	Approximation de la loi de Student pour $n$ grand .....	267
<b>12</b>	<b>Loi de Fischer-Snedecor <math>\mathcal{F}_{n,m}</math></b> .....	267

## Chapitre 10 Intervalle de fluctuation - Intervalle de confiance d'une proportion

<b>1</b>	<b>Introduction</b> .....	284
<b>2</b>	<b>Seuil de risque et niveau de confiance</b> .....	285
<b>3</b>	<b>Intervalle de fluctuation d'une proportion</b> .....	286
<b>4</b>	<b>Intervalle de confiance d'une proportion</b> .....	289
4.1	Modélisation théorique .....	289
4.2	Obtenir numériquement l'intervalle de confiance de $p$ .....	291
4.3	Commentaire sur la modélisation .....	292
<b>5</b>	<b>Première approche de la notion d'estimateur</b> .....	292

## Chapitre 11 Estimateurs - Espérance ou variance

<b>1</b>	<b>Position du problème</b> .....	302
<b>2</b>	<b>Définition</b> .....	302
<b>3</b>	<b>Estimateur biaisé ou non biaisé</b> .....	303
<b>4</b>	<b>Estimateur consistant</b> .....	304
4.1	Définition .....	304
4.2	Une condition suffisante .....	304
<b>5</b>	<b>Estimateur de l'espérance</b> .....	305
<b>6</b>	<b>Estimateurs de la variance</b> .....	306
6.1	Cas particulier où l'espérance $m$ est connue .....	306
6.2	Cas général où l'espérance $m$ est inconnue .....	308

## Chapitre 12 Intervalle de confiance de l'espérance et de la variance

<b>1</b>	<b>Intervalle de confiance de l'espérance lorsque la variance est connue</b> .....	312
----------	--	-----

<b>2</b>	<b>Intervalle de confiance de l'espérance lorsque la variance est inconnue</b> .....	313
<b>3</b>	<b>Intervalle de confiance de la variance lorsque l'espérance est connue</b> .....	316
<b>4</b>	<b>Intervalle de confiance de la variance lorsque l'espérance est inconnue</b> .....	317

## Chapitre 13 Tests d'hypothèses - Principes généraux

<b>1</b>	<b>Un exemple simple complet</b> .....	328
1.1	Résolution du dilemme "la pièce est-elle correcte ?" .....	328
1.2	Analyse détaillée de la démarche .....	329
<b>2</b>	<b>Exemples de tests d'hypothèse</b> .....	330
<b>3</b>	<b>Hypothèse nulle et hypothèse alternative</b> .....	331
<b>4</b>	<b>Fixer un risque maximal d'erreur de la conclusion</b> .....	332
<b>5</b>	<b>Fixer un paramètre à tester et une variable de test</b> .....	333
<b>6</b>	<b>Fixer la règle de décision. Zone de rejet et zone d'acceptation</b> .....	334
6.1	Le principe .....	334
6.2	Zone de rejet bilatère de $H_0$ .....	335
6.3	Zone de rejet unilatère à gauche de $H_0$ .....	337
6.4	Zone de rejet unilatère à droite de $H_0$ .....	338
<b>7</b>	<b>Les risques de se tromper. La puissance du test</b> .....	340
7.1	Erreur (ou risque) de première espèce d'un test .....	340
7.2	Erreur (ou risque) de deuxième espèce d'un test .....	341
7.3	Comment retenir ces définitions sans se tromper .....	341
7.4	Puissance d'un test .....	342

## Chapitre 14 Tests d'hypothèses - La pratique

<b>1</b>	<b>Tests d'hypothèse sur une proportion</b> .....	344
1.1	Test $p = p_0$ contre $p \neq p_0$ avec la loi binomiale proprement dite ..	344
1.2	Test $p = p_0$ contre $p \neq p_0$ avec l'approximation par la loi normale	346
1.3	Test $p = p_0$ contre $p < p_0$ avec la loi binomiale proprement dite ..	347
1.4	Test $p = p_0$ contre $p < p_0$ avec l'approximation par la loi normale	348
1.5	Test $p = p_0$ contre $p > p_0$ avec la loi binomiale proprement dite ..	349
1.6	Test $p = p_0$ contre $p > p_0$ avec l'approximation par la loi normale	350
1.7	Utilisation de la loi de Poisson .....	352
1.8	Exemple de test $p = p_0$ contre $p = p_1$ et calcul de la puissance....	354

<b>2</b>	<b>Tests d'hypothèse sur une espérance</b> .....	355
2.1	Test $m = m_0$ contre $m \neq m_0$ lorsque la variance est connue .....	356
2.2	Test de $m = m_0$ contre $m \neq m_0$ lorsque la variance est inconnue .	358
2.3	Test $m = m_0$ contre $m < m_0$ lorsque la variance est connue .....	360
2.4	Test de $m = m_0$ contre $m < m_0$ lorsque la variance est inconnue .	361
2.5	Test $m = m_0$ contre $m > m_0$ lorsque la variance est connue .....	363
2.6	Test de $m = m_0$ contre $m > m_0$ lorsque la variance est inconnue .	365
2.7	Le test « $m < m_0$ » contre « $m > m_0$ » .....	367
2.8	Comparaison des espérances de deux échantillons indépendants de même variance connue ou inconnue. Principe général.....	367
2.9	Comparaison des espérances de deux échantillons indépendants de même variance connue .....	368
2.10	Comparaison des espérances de deux échantillons indépendants de même variance inconnue .....	371
<b>3</b>	<b>Tests d'hypothèse sur une variance</b> .....	375
3.1	Test $\sigma = \sigma_0$ contre $\sigma \neq \sigma_0$ .....	375
3.2	Test $\sigma = \sigma_0$ contre $\sigma < \sigma_0$ .....	378
3.3	Test $\sigma = \sigma_0$ contre $\sigma > \sigma_0$ .....	381
3.4	Test $\sigma \leq \sigma_0$ contre $\sigma > \sigma_0$ .....	383
<b>4</b>	<b>Comparaison de deux variances - Test de Fisher</b> .....	384
4.1	Le cadre .....	384
4.2	Le test $H_0 : \sigma_x = \sigma_y$ contre $H_1 : \sigma_x > \sigma_y$ .....	385
4.3	Le test $H_0 : \sigma_x = \sigma_y$ contre $H_1 : \sigma_x \neq \sigma_y$ .....	386
<b>5</b>	<b>Test d'hypothèse ou intervalle de confiance</b> .....	388
5.1	Cas de l'espérance .....	388
5.2	Cas de la variance .....	389

## Chapitre 15 Variables aléatoires continues - Densité de probabilité

<b>1</b>	<b>Univers infini quelconque</b> .....	424
<b>2</b>	<b>Probabilité sur <math>\mathbb{R}</math> ayant une densité</b> .....	425
<b>3</b>	<b>Variable aléatoire à densité</b> .....	426
3.1	Définition .....	426
3.2	Fonction de répartition d'une variable aléatoire continue .....	427
3.3	Espérance .....	428
3.4	Variance .....	428
3.5	Inégalité de Bienaymé-Tchebychev .....	429

<b>4</b>	<b>Comment montrer qu'une variable aléatoire a une densité, et la calculer</b> .....	429
<b>5</b>	<b>Variable aléatoire suivant une loi normale <math>\mathcal{N}(m, \sigma^2)</math></b> .....	431
5.1	Loi normale centrée réduite .....	431
5.2	Espérance et variance .....	432
5.3	Variabes aléatoires suivant la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ d'espérance $m$ et de variance $\sigma^2$ .....	432
<b>6</b>	<b>Variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre <math>\lambda</math></b> .....	433
6.1	Définition mathématique et paramètres .....	433
6.2	Variable aléatoire sans mémoire .....	434
<b>7</b>	<b>Variable aléatoire suivant la loi uniforme sur un intervalle <math>[a, b]</math></b> .....	435
<b>8</b>	<b>Loi du <math>\chi^2</math> à <math>n</math> degrés de liberté</b> .....	437
8.1	La définition qui nous sera la plus utile dans la suite .....	437
8.2	La densité de la loi du $\chi^2(n)$ .....	438
8.3	Espérance et variance du $\chi^2(n)$ .....	438
<b>9</b>	<b>Loi de Student à <math>n</math> degrés de liberté</b> .....	439
9.1	La définition que nous utiliserons .....	439
9.2	La densité de la loi de Student .....	439
<b>10</b>	<b>Loi de Fischer-Snedecor <math>\mathcal{F}_{n,m}</math></b> .....	440
<b>11</b>	<b>Variabes aléatoires indépendantes</b> .....	441
11.1	Définition et propriétés immédiates .....	441
11.2	Densité de la somme $X + Y$ de deux variables indépendantes .....	442
11.3	Deux exemples typiques .....	443
<b>12</b>	<b>Loi faible des grands nombres et théorème central limite</b> .....	443

## Chapitre 16 Couples de variables aléatoires discrètes ou continues

<b>1</b>	<b>Couple de variables aléatoires sur un univers fini</b> .....	468
<b>2</b>	<b>Le cas d'un univers dénombrable</b> .....	470
<b>3</b>	<b>Couple de variables aléatoires à densité</b> .....	472
<b>4</b>	<b>Fonction de répartition. Calcul de la densité</b> .....	475
4.1	Définition .....	475
4.2	Calcul de la densité à partir de la fonction de répartition .....	476

<b>5</b>	<b>Lois marginales d'un couple de variables aléatoires</b> .....	478
5.1	L'idée de base .....	478
5.2	Le cas discret .....	479
5.3	Le cas des variables aléatoires à densité .....	481
5.4	Remarque fondamentale de non-unicité .....	483
<b>6</b>	<b>Lois conditionnelles dans un couple de variables aléatoires</b> .....	484
<b>7</b>	<b>Couple de variables aléatoires indépendantes</b> .....	486
7.1	Variables discrètes .....	486
7.2	Cas des variables continues à densité .....	488
<b>8</b>	<b>Récapitulatif</b> .....	490
<b>9</b>	<b>Densité de la somme de deux variables aléatoires indépendantes continues</b> .....	491
<b>10</b>	<b>Somme de deux variables aléatoires discrètes</b> .....	493
<b>11</b>	<b>Le théorème de transfert pour les variables discrètes</b> .....	494
11.1	Théorème pour une variable discrète .....	495
11.2	Théorème pour un couple de variables discrètes .....	495
<b>12</b>	<b>Le théorème de transfert et sa grande application pour les variables à densité</b> .....	496
12.1	Enoncé du théorème de transfert dans $\mathbb{R}$ .....	497
12.2	Utilisation de ce théorème pour calculer la densité de $h(X)$ .....	497
12.3	Théorème de transfert pour un couple de variables à densité .....	498
12.4	Calcul de la densité de $Z = h(X, Y)$ connaissant la loi du couple $(X, Y)$ .....	499
<b>13</b>	<b>Espérance du produit de deux variables aléatoires indépendantes</b> .....	501
<b>14</b>	<b>Retour sur la covariance de deux variables quelconques</b> .....	502

## Chapitre 17 Chaînes de Markov élémentaires - Le cas irréductible en détail

<b>1</b>	<b>Un premier exemple qui converge</b> .....	538
<b>2</b>	<b>Un deuxième exemple qui ne converge pas</b> .....	541
<b>3</b>	<b>Définition d'une chaîne de Markov</b> .....	541
<b>4</b>	<b>Graphe associé à une chaîne de Markov</b> .....	543
<b>5</b>	<b>La matrice de transition de la chaîne</b> .....	545
<b>6</b>	<b>Utilisation de la matrice de transition <math>P</math> pour passer du temps <math>n</math> au temps <math>n + 1</math></b> .....	547
6.1	Ecriture avec des vecteurs lignes .....	547
6.2	Ecriture avec des vecteurs colonnes .....	548

<b>7</b>	<b>Transition de l'état <math>n</math> à l'état <math>n + m</math>. La matrice <math>P^m</math></b> .....	549
<b>8</b>	<b>A propos des matrices stochastiques. Une remarque obscure pour le moment</b> .....	550
	8.1 Définition .....	550
	8.2 Une remarque obscure pour le moment .....	551
<b>9</b>	<b>Chaîne de Markov irréductible</b> .....	552
<b>10</b>	<b>Chaîne de Markov régulière</b> .....	553
<b>11</b>	<b>Loi invariante d'une chaîne irréductible</b> .....	554
<b>12</b>	<b>Convergence d'une chaîne irréductible</b> .....	556
	12.1 Quelle est la limite éventuelle? .....	557
	12.2 En terme de matrices .....	557
<b>13</b>	<b>Les conditions nécessaires et suffisantes de convergence d'une chaîne irréductible</b> .....	558
	13.1 Énoncés et exemples .....	558
	13.2 Indications de démonstration .....	560
<b>14</b>	<b>Calcul explicite de l'état au temps général <math>n</math></b> .....	561
<b>15</b>	<b>Chaînes de Markov irréductibles périodiques</b> .....	562
	15.1 Définition .....	563
	15.2 Exemples .....	564
	15.3 Plus généralement .....	568
<b>16</b>	<b>Chaînes de Markov réductibles</b> .....	569