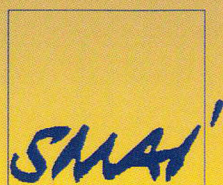


Pierre Del Moral  
Christelle Vergé

# Modèles et méthodes stochastiques

Une introduction avec applications





---

# Table des matières

---

## Partie I Modèles stochastiques

---

|          |                                                      |           |
|----------|------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Chaînes de Markov discrètes</b> . . . . .         | <b>3</b>  |
| 1.1      | Introduction . . . . .                               | 3         |
| 1.2      | Chaînes de Markov discrètes . . . . .                | 4         |
| 1.2.1    | Semigroupes de transition . . . . .                  | 6         |
| 1.2.2    | Processus historique . . . . .                       | 9         |
| 1.2.3    | Interprétation matricielle . . . . .                 | 10        |
| 1.3      | Quelques exemple . . . . .                           | 15        |
| 1.3.1    | Files d'attente . . . . .                            | 15        |
| 1.3.2    | Modèle d'urnes . . . . .                             | 15        |
| 1.3.3    | Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ . . . . .          | 16        |
| 1.3.4    | Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$ . . . . .        | 17        |
| 1.3.5    | Marche aléatoire arrêtée . . . . .                   | 18        |
| 1.3.6    | Processus de branchements . . . . .                  | 19        |
| 1.3.7    | Processus de survie . . . . .                        | 20        |
| 1.3.8    | Modèles d'épidémiologie . . . . .                    | 21        |
| <b>2</b> | <b>Chaînes de Markov abstraites</b> . . . . .        | <b>23</b> |
| 2.1      | Description des modèles . . . . .                    | 23        |
| 2.1.1    | Semigroupe des transitions . . . . .                 | 24        |
| 2.1.2    | Équations de Chapman-Kolmogorov . . . . .            | 26        |
| 2.1.3    | Processus historique . . . . .                       | 27        |
| 2.2      | Quelques illustrations . . . . .                     | 28        |
| 2.2.1    | Processus de Poisson . . . . .                       | 28        |
| 2.2.2    | Chaînes linéaires et gaussiennes . . . . .           | 29        |
| 2.2.3    | Évolutions dans des milieux absorbants . . . . .     | 31        |
| 2.2.4    | Dynamiques de population avec branchements . . . . . | 34        |
| 2.2.5    | Algorithmes de Robbins-Monro . . . . .               | 45        |

|          |                                               |     |
|----------|-----------------------------------------------|-----|
| <b>3</b> | <b>Chaînes de Markov non linéaires</b>        | 51  |
| 3.1      | Introduction                                  | 51  |
| 3.2      | Description des modèles                       | 53  |
| 3.3      | Interprétations particulières en champ moyen  | 53  |
| 3.4      | Champs moyens de type gaussien                | 56  |
| 3.5      | Modèles simplifiés de gaz de McKean           | 58  |
| 3.6      | Flots de mesures de Feynman-Kac               | 59  |
| 3.6.1    | Description des modèles                       | 59  |
| 3.6.2    | Chaînes de Markov non linéaires               | 61  |
| 3.6.3    | Champs moyens de type évolutionnaire          | 63  |
| <b>4</b> | <b>Chaînes de Markov en auto-interaction</b>  | 67  |
| 4.1      | Modèles de renforcement                       | 67  |
| 4.2      | Les pièges du renforcement                    | 70  |
| 4.3      | Les lois d'évolution                          | 72  |
| 4.4      | Les limitations de vitesses                   | 74  |
| 4.4.1    | Les deux cas extrêmes                         | 74  |
| 4.4.2    | Convergence à l'équilibre                     | 75  |
| 4.4.3    | Borne supérieure                              | 75  |
| 4.4.4    | Borne inférieure                              | 76  |
| 4.5      | Une loi des grands nombres ralentie           | 77  |
| 4.6      | Les trois uniques formes de ralentissement    | 79  |
| 4.6.1    | Introduction                                  | 79  |
| 4.6.2    | Les variances d'erreurs                       | 80  |
| 4.6.3    | Estimations des erreurs locales               | 82  |
| 4.7      | Mécanismes de renforcements génétiques        | 86  |
| 4.7.1    | Chaînes en auto interaction évolutionnaires   | 86  |
| 4.7.2    | Un modèle de mutation et sélection renforcées | 87  |
| 4.7.3    | La mesure d'équilibre                         | 89  |
| <b>5</b> | <b>Du temps discret au temps continu</b>      | 91  |
| 5.1      | L'équation de la chaleur                      | 91  |
| 5.1.1    | Les fluctuations browniennes                  | 91  |
| 5.1.2    | La loi des grands nombres                     | 95  |
| 5.1.3    | Marches aléatoires                            | 97  |
| 5.1.4    | L'équation de la chaleur                      | 98  |
| 5.1.5    | Une formulation faible                        | 99  |
| 5.2      | Processus de diffusion                        | 101 |
| 5.2.1    | Schémas de discrétisation                     | 101 |
| 5.2.2    | Une formule de Taylor stochastique            | 102 |
| 5.2.3    | Equations de Kolmogorov et Fokker-Planck      | 104 |
| 5.3      | Exemples de diffusions                        | 107 |
| 5.3.1    | Processus d'Ornstein-Uhlenbeck                | 107 |
| 5.3.2    | Mouvement brownien géométrique                | 107 |
| 5.4      | Processus à sauts marqués                     | 113 |



|       |                                                           |     |
|-------|-----------------------------------------------------------|-----|
| 5.4.1 | Une chaîne de Markov à horloge géométrique . . . . .      | 113 |
| 5.4.2 | Décomposition de Doob-Meyer . . . . .                     | 115 |
| 5.4.3 | Une formule de Taylor stochastique . . . . .              | 117 |
| 5.4.4 | Analyse des temps de sauts . . . . .                      | 119 |
| 5.4.5 | Processus à temps continu . . . . .                       | 121 |
| 5.4.6 | Equation intégral-différentielle de Kolomogorov . . . . . | 122 |
| 5.5   | Exemples de processus à sauts . . . . .                   | 122 |
| 5.5.1 | Système de réactions chimiques . . . . .                  | 123 |
| 5.5.2 | Modèles compartimentaux en épidémiologie . . . . .        | 125 |
| 5.5.3 | Système de communication à un serveur . . . . .           | 126 |
| 5.5.4 | Processus de Poisson . . . . .                            | 126 |
| 5.5.5 | Processus de naissance et mort . . . . .                  | 127 |
| 5.5.6 | Processus spatialement non homogènes . . . . .            | 127 |
| 5.5.7 | Processus d'extinction . . . . .                          | 128 |
| 5.5.8 | Processus de naissances de Yule-Furry . . . . .           | 129 |
| 5.6   | Processus de diffusion et à sauts marqués . . . . .       | 130 |
| 5.6.1 | Description des modèles . . . . .                         | 130 |
| 5.6.2 | Transitions locales . . . . .                             | 132 |
| 5.6.3 | Description des générateurs infinitésimaux . . . . .      | 133 |
| 5.7   | Processus non homogènes . . . . .                         | 135 |
| 5.7.1 | Description du modèle . . . . .                           | 135 |
| 5.7.2 | Processus non linéaires . . . . .                         | 136 |
| 5.7.3 | Interprétations particulières en champ moyen . . . . .    | 141 |

---

## Partie II Méthodes stochastiques

---

|          |                                                             |            |
|----------|-------------------------------------------------------------|------------|
| <b>6</b> | <b>Méthodes de Monte Carlo par chaînes de Markov (MCMC)</b> | <b>147</b> |
| 6.1      | Éléments d'analyse asymptotique . . . . .                   | 147        |
| 6.1.1    | La loi des grands nombres . . . . .                         | 147        |
| 6.1.2    | Le théorème ergodique . . . . .                             | 150        |
| 6.1.3    | Exemple, les fonctions itérées stochastiques . . . . .      | 152        |
| 6.1.4    | Quelques exercices . . . . .                                | 154        |
| 6.2      | Mesures invariantes et algorithmes de simulation . . . . .  | 159        |
| 6.2.1    | Plus court chemin . . . . .                                 | 160        |
| 6.2.2    | Modèle d'Ising . . . . .                                    | 162        |
| 6.3      | Les transitions de Metropolis-Hastings . . . . .            | 164        |
| 6.3.1    | Introduction . . . . .                                      | 164        |
| 6.3.2    | Algorithme de simulation . . . . .                          | 166        |
| 6.4      | Simulation de mesures de Boltzmann-Gibbs . . . . .          | 167        |
| 6.4.1    | Introduction . . . . .                                      | 167        |
| 6.4.2    | Algorithme de Metropolis-Hastings indépendant . . . . .     | 168        |
| 6.4.3    | Modèles à variables latentes . . . . .                      | 168        |
| 6.4.4    | L'algorithme de recuit simulé . . . . .                     | 170        |
| 6.5      | L'échantillonneur de Gibbs . . . . .                        | 172        |



|          |                                                                   |            |
|----------|-------------------------------------------------------------------|------------|
| 6.5.1    | Introduction .....                                                | 172        |
| 6.5.2    | Algorithme de simulation .....                                    | 174        |
| 6.5.3    | Désintégration de mesures restreintes .....                       | 177        |
| 6.5.4    | Mesures de volume sur des espaces produits .....                  | 181        |
| 6.5.5    | Mesures de comptage sur des espaces produits .....                | 187        |
| <b>7</b> | <b>Méthodes d'exploration locale et schémas de température</b> .. | <b>193</b> |
| 7.1      | Explosions combinatoires .....                                    | 193        |
| 7.2      | La notion de voisinage .....                                      | 195        |
| 7.3      | Modèles d'aimantation ferromagnétique .....                       | 198        |
| 7.3.1    | Métriques et systèmes de voisinages .....                         | 198        |
| 7.3.2    | Explorations aléatoires .....                                     | 198        |
| 7.3.3    | Comportement en temps long .....                                  | 199        |
| 7.3.4    | Fonctions d'énergie .....                                         | 200        |
| 7.4      | Explorations aléatoires locales .....                             | 202        |
| 7.4.1    | Systèmes de voisinages .....                                      | 202        |
| 7.4.2    | Marches aléatoires .....                                          | 203        |
| 7.4.3    | Mesures réversibles .....                                         | 204        |
| 7.4.4    | Fonction énergie .....                                            | 205        |
| 7.5      | Espaces de permutations .....                                     | 207        |
| 7.5.1    | Systèmes de voisinages .....                                      | 207        |
| 7.5.2    | Explorations locales .....                                        | 208        |
| 7.5.3    | Reversibilité de l'exploration .....                              | 210        |
| 7.5.4    | Quelques variantes .....                                          | 210        |
| 7.5.5    | Fonctions énergie .....                                           | 211        |
| 7.6      | L'algorithme du recuit simulé .....                               | 212        |
| 7.6.1    | Description de la chaîne de Markov .....                          | 213        |
| 7.6.2    | Recuit homogène .....                                             | 214        |
| 7.6.3    | Concentration .....                                               | 215        |
| 7.6.4    | Réglages de température .....                                     | 217        |
| <b>8</b> | <b>Mesures de Feynman-Kac et méthodes particulières</b> .....     | <b>219</b> |
| 8.1      | Mesures de Feynman-Kac .....                                      | 219        |
| 8.1.1    | Introduction .....                                                | 219        |
| 8.1.2    | Formules intégrales et vraisemblances de chemins .....            | 222        |
| 8.1.3    | Représentations équivalentes, mesures corrigées .....             | 225        |
| 8.1.4    | Une formulation markovienne à rebours .....                       | 227        |
| 8.2      | Modèles matriciels .....                                          | 229        |
| 8.2.1    | Produits de matrices positives .....                              | 229        |
| 8.2.2    | Mesures de Feynman-Kac .....                                      | 230        |
| 8.2.3    | Recherche de trajectoires optimales .....                         | 231        |
| 8.3      | Méthodes de simulation particulières .....                        | 233        |
| 8.3.1    | Dynamiques de population génétiques .....                         | 233        |
| 8.3.2    | Modèles d'arbres généalogiques .....                              | 236        |
| 8.3.3    | Estimation des formules à rebours .....                           | 237        |



|          |                                                   |            |
|----------|---------------------------------------------------|------------|
| 8.3.4    | Estimation des fonctions de partition .....       | 238        |
| 8.4      | Variantes et propriétés .....                     | 240        |
| 8.4.1    | Les modèles d'îlots particuliers .....            | 240        |
| 8.4.2    | Simulation de lois mises à jours .....            | 243        |
| 8.4.3    | Mesures de sensibilité .....                      | 244        |
| 8.5      | Formules de Feynman-Kac non commutatives .....    | 248        |
| 8.5.1    | Mesures vectorielles .....                        | 248        |
| 8.5.2    | Interprétations particulières .....               | 252        |
| 8.5.3    | Processus stochastiques tangents .....            | 253        |
| 8.5.4    | Gradient de semigroupes .....                     | 254        |
| 8.6      | Trois illustrations .....                         | 256        |
| 8.6.1    | Chaînes de Markov restreintes .....               | 256        |
| 8.6.2    | Polymères dirigés .....                           | 257        |
| 8.6.3    | Le modèle d'Edwards .....                         | 259        |
| <b>9</b> | <b>Méthodes MCMC en interaction .....</b>         | <b>263</b> |
| 9.1      | Méthodes et modèles MCMC .....                    | 263        |
| 9.1.1    | Le principe des lois invariantes .....            | 263        |
| 9.1.2    | Les transitions de type d'acceptation-rejet ..... | 264        |
| 9.1.3    | Les transitions de Metropolis-Hastings .....      | 265        |
| 9.1.4    | Les transitions de Gibbs .....                    | 266        |
| 9.2      | Algorithmes en interaction .....                  | 267        |
| 9.2.1    | Modèles de Feynman-Kac .....                      | 267        |
| 9.2.2    | Interprétations particulières .....               | 269        |
| 9.3      | Mesures de Boltzmann-Gibbs .....                  | 271        |
| 9.3.1    | Queues de distributions .....                     | 271        |
| 9.3.2    | Formules de Feynman-Kac-Jarzynski .....           | 274        |
| 9.4      | Intégration de modèles de Feynman-Kac .....       | 278        |
| 9.4.1    | Familles paramétriques de mesures .....           | 278        |
| 9.4.2    | Méthodes d'approximation .....                    | 279        |
| 9.4.3    | Interprétations particulières .....               | 281        |

---

## Partie III Quelques domaines d'applications

---

|           |                                                |            |
|-----------|------------------------------------------------|------------|
| <b>10</b> | <b>Modèles de fractal dans la nature .....</b> | <b>289</b> |
| 10.1      | Introduction .....                             | 289        |
| 10.2      | Répartitions uniformes .....                   | 291        |
| 10.3      | Le discontinuum de Cantor .....                | 292        |
| 10.3.1    | Convergence à l'équilibre .....                | 295        |
| 10.3.2    | Description de la marche aléatoire .....       | 298        |
| 10.3.3    | La distribution invariante .....               | 299        |
| 10.4      | Les contractions affines du plan .....         | 300        |
| 10.4.1    | Introduction .....                             | 300        |
| 10.4.2    | Contractions ensemblistes .....                | 302        |



|           |                                                      |            |
|-----------|------------------------------------------------------|------------|
| 10.4.3    | Formules de caractérisations                         | 303        |
| 10.5      | Quelques exemples                                    | 305        |
| 10.5.1    | Balades uniformes sur un carré                       | 305        |
| 10.5.2    | Le carré de Sierpinski                               | 307        |
| 10.5.3    | Une marche aléatoire vers le carré de Sierpinski     | 310        |
| 10.5.4    | Convergence à l'équilibre                            | 311        |
| 10.6      | Fractales symétriques                                | 313        |
| 10.6.1    | Les symétries d'un polygone                          | 313        |
| 10.6.2    | Marches aléatoires                                   | 315        |
| 10.6.3    | Végétations fractales                                | 317        |
| <b>11</b> | <b>Optimisation et Combinatoire énumérative</b>      | <b>32</b>  |
| 11.1      | Description des modèles                              | 325        |
| 11.2      | Interprétations de Feynman-Kac-Jarzynski             | 326        |
| 11.3      | Algorithmes de simulation particuliers               | 328        |
| 11.4      | Analyse des performances                             | 335        |
| 11.5      | Quelques variantes                                   | 336        |
| 11.6      | Le problème du sac à dos                             | 335        |
| 11.6.1    | Description du problème combinatoire                 | 335        |
| 11.6.2    | Quelques stratégies d'exploration locale             | 337        |
| 11.6.3    | Quelques variantes                                   | 339        |
| 11.7      | Organisation optimale multi-critères                 | 341        |
| 11.8      | Le problème d'affectation quadratique                | 342        |
| 11.9      | Découpage maximal de graphes                         | 344        |
| 11.10     | Travaux pratiques                                    | 345        |
| <b>12</b> | <b>Traitement du signal</b>                          | <b>347</b> |
| 12.1      | Filtre de Kalman-Bucy                                | 347        |
| 12.1.1    | Introduction                                         | 347        |
| 12.1.2    | Description du modèle                                | 348        |
| 12.1.3    | Les équations du filtrage                            | 349        |
| 12.1.4    | Le filtre de Kalman-Bucy                             | 350        |
| 12.1.5    | Une version markovienne à rebours                    | 352        |
| 12.2      | Une introduction au filtrage non linéaire            | 355        |
| 12.2.1    | Formules intégrales de Feynman-Kac                   | 355        |
| 12.2.2    | Les équations du filtrage                            | 358        |
| 12.2.3    | Les filtres particuliers                             | 361        |
| 12.2.4    | Filtrage et lissage en termes d'arbres généalogiques | 364        |
| 12.2.5    | Modèles de filtrage approchés                        | 368        |
| 12.3      | Filtres de Kalman-Bucy en interaction                | 371        |
| 12.3.1    | Description des modèles                              | 371        |
| 12.3.2    | Mesures gaussiennes conditionnelles                  | 373        |
| 12.3.3    | Mesures de Feynman-Kac conditionnelles               | 373        |
| 12.3.4    | Prédicteurs optimaux conditionnels                   | 375        |
| 12.3.5    | Calcul des vraisemblances conditionnelles            | 377        |



|           |                                                        |            |
|-----------|--------------------------------------------------------|------------|
| 12.3.6    | Filtres et prédicteurs optimaux intégrés .....         | 378        |
| 12.3.7    | Série de filtres optimaux en interaction .....         | 382        |
| 12.4      | Filtres de Kalman d'ensemble .....                     | 383        |
| 12.4.1    | Une description champ moyen du filtre de Kalman .....  | 383        |
| 12.4.2    | Un filtre de Kalman particulière .....                 | 386        |
| <b>13</b> | <b>Analyse bayésienne</b> .....                        | <b>387</b> |
| 13.1      | Introduction .....                                     | 387        |
| 13.2      | Chaînes de Markov cachées .....                        | 388        |
| 13.2.1    | Descriptions bayésiennes .....                         | 391        |
| 13.2.2    | Algorithmes de Monte Carlo par chaînes de Markov ...   | 392        |
| 13.2.3    | Un algorithme de Monte Carlo séquentiel .....          | 392        |
| 13.2.4    | Algorithmes de Monte Carlo séquentiels et particuliers | 393        |
| 13.3      | Calcul bayésien approché .....                         | 394        |
| 13.3.1    | Modèles stochastiques approchés .....                  | 394        |
| 13.3.2    | Représentation des lois conditionnelles .....          | 395        |
| 13.4      | Algorithme de gradient stochastique .....              | 397        |
| 13.4.1    | Gradient de fonctions de vraisemblance .....           | 397        |
| 13.4.2    | Algorithmes de gradient stochastiques .....            | 399        |
| 13.5      | Algorithme espérance-maximisation .....                | 400        |
| 13.5.1    | Formules d'entropie relative .....                     | 400        |
| 13.5.2    | Algorithme EM particulière .....                       | 402        |
| 13.6      | Illustration des algorithmes de gradient et EM .....   | 404        |
| 13.6.1    | Description du modèle stochastique .....               | 404        |
| 13.6.2    | Calcul des log-vraisemblances .....                    | 405        |
| 13.6.3    | Formules de dérivation .....                           | 406        |
| 13.6.4    | Algorithme de gradient stochastique .....              | 407        |
| 13.6.5    | Algorithme espérance-maximisation .....                | 408        |
| <b>14</b> | <b>Modèles de poursuite et localisation</b> .....      | <b>409</b> |
| 14.1      | Poursuite de cible et signaux radar .....              | 409        |
| 14.2      | Localisation et signaux radar altimétrique .....       | 410        |
| 14.3      | Localisation de cibles avec obstacles .....            | 413        |
| 14.4      | Le modèle cinétique d'Ackermann .....                  | 414        |
| 14.5      | Navigation et localisation de robots .....             | 416        |
| 14.6      | Poursuite de téléphones mobiles en zone urbaine .....  | 418        |
| 14.7      | Estimation de volatilité boursière .....               | 420        |
| 14.8      | Travaux pratiques .....                                | 422        |
| <b>15</b> | <b>Analyse de risques</b> .....                        | <b>425</b> |
| 15.1      | Introduction .....                                     | 425        |
| 15.2      | Echantillonnage préférentiel .....                     | 427        |
| 15.2.1    | Introduction .....                                     | 427        |
| 15.2.2    | Modèles markoviens .....                               | 430        |
| 15.2.3    | Principes de grandes déviations .....                  | 436        |



## XXIV Table des matières

|                          |                                               |     |
|--------------------------|-----------------------------------------------|-----|
| 15.2.4                   | Modèles de Feynman-Kac .....                  | 438 |
| 15.2.5                   | Algorithmes de simulation particulières ..... | 440 |
| 15.3                     | Modèles d'excursions par niveaux .....        | 443 |
| 15.3.1                   | Introduction .....                            | 443 |
| 15.3.2                   | Modèles d'excursions multi-niveaux .....      | 444 |
| 15.3.3                   | Modèles de Feynman-Kac .....                  | 446 |
| 15.3.4                   | Algorithmes de simulation particulières ..... | 447 |
| 15.4                     | Modèles de propagation d'incertitudes .....   | 448 |
| 15.4.1                   | Introduction .....                            | 448 |
| 15.4.2                   | Modèles de Feynman-Kac .....                  | 450 |
| 15.4.3                   | Algorithmes de simulation particulières ..... | 452 |
| <b>Solutions</b> .....   |                                               | 455 |
| <b>Littérature</b> ..... |                                               | 479 |