

Cap
Prépa

1^{re} année

Sous la direction de
Gérard Debeaumarché
Francis Dorra
Max Hochart

Serge Dupont
Franck Gautier
Laurent Germa
François Héroult
Guillaume Hervé
Michel Lepez
Marc Péronnet
Gilles Sciuto

Mathématiques

MPSI-PCSI

**Cours complet avec tests,
exercices et problèmes corrigés**



DVD-ROM
inclus

- de nombreux exemples de calcul formel réalisés avec Maple et *Mathematica* ;
- une version d'évaluation de Maple 13 et *Mathematica*® 7 ;
- une promotion spéciale étudiant pour ces deux logiciels.

Classes préparatoires MPSI-PCSI

PEARSON
Education

Table des matières

Remerciements	xxiv
Partie 1 – Première période	1
1 Notions préliminaires	3
I Bases du langage et du raisonnement mathématiques	4
I.1 Les énoncés et leurs valeurs de vérité	4
I.2 Les modes de raisonnement	8
II Ensembles et applications	10
II.1 Notions de base sur les ensembles	10
II.2 Applications	12
II.3 Lois de composition	18
II.4 Relations d'ordre	20
III Entiers et itérations	21
III.1 Les entiers naturels	21
III.2 Le raisonnement par récurrence	22
III.3 Itérations	24
IV Ensembles finis et dénombrements	29
IV.1 Ensembles finis	29
IV.2 Parties finies de \mathbb{N}	29
IV.3 Opérations sur les ensembles finis	30
IV.4 Applications entre ensembles finis	31
IV.5 Analyse combinatoire	33
V Introduction à l'algorithmique	37
V.1 Éléments de base	37
V.2 Les structures de contrôle	38
V.3 Les fonctions	40
VI Préparation à l'interrogation orale	44
VII Exercices	44
VIII Problème	45
Représentations de Fibonacci des entiers naturels	45

2	Nombres complexes	47
I	Le corps \mathbb{C} des nombres complexes	47
I.1	Construction du corps des nombres complexes	47
I.2	Le module d'un nombre complexe	50
I.3	Des formules sommatoires	51
I.4	Interprétation géométrique des nombres complexes	52
II	Le groupe \mathcal{U} des complexes de module 1	54
II.1	Définition, structure de \mathcal{U}	54
II.2	Paramétrisation de \mathcal{U} , formules d'Euler	54
II.3	Applications à la trigonométrie	56
II.4	Forme trigonométrique, argument d'un nombre complexe non nul	60
III	Exponentielle complexe	61
IV	Équations dans \mathbb{C}	62
IV.1	Racines carrées d'un nombre complexe	62
IV.2	Équations du second degré à coefficients complexes	64
IV.3	Racines n^{es} de l'unité	65
IV.4	L'équation $z^n = a$	67
V	Nombres complexes et géométrie plane	68
V.1	Les transformations $z \mapsto az$, $a \neq 0$	69
V.2	Les transformations $z \mapsto az + b$, $a \neq 0$	71
VI	L'essentiel du cours	73
VII	Préparation à l'interrogation orale	74
VIII	Exercices	74
IX	Problème	76
	Quelques propriétés géométriques du triangle	76
3	Fonctions usuelles	79
I	Fonctions de la variable réelle	79
I.1	Parité et périodicité	79
I.2	Notions liées à l'ordre	80
I.3	Fonctions lipschitziennes	81
I.4	Rappels sur la continuité	82
I.5	Rappels sur la dérivabilité	83
II	Logarithmes, exponentielles, puissances	86
II.1	Logarithmes, exponentielles	86
II.2	Puissances	90
II.3	Croissances comparées	91
II.4	Fonctions du type u^v	92
III	Fonctions circulaires	93
III.1	Cosinus, sinus, tangente	93

III.2	Arcsinus, Arccosinus, Arctangente	94
IV	Fonctions hyperboliques	98
IV.1	Cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique, tangente hyperbolique	98
IV.2	Argument cosinus hyperbolique, argument sinus hyperbolique, argument tangente hyperbolique	101
V	Fonctions à valeurs complexes	104
VI	L'essentiel du cours	106
VII	Préparation à l'interrogation orale	109
VIII	Exercices	109
4	Équations différentielles linéaires	111
I	Généralités	111
I.1	Équations différentielles	111
I.2	Rappels sur la notion de primitive	113
I.3	Intégration des exponentielles-polynômes	115
II	Caractérisation de la fonction $t \mapsto e^{at}$ ($a \in \mathbb{C}$)	116
II.1	Caractérisation par l'équation différentielle $y' = ay$	116
II.2	Caractérisation par l'équation fonctionnelle $f(t+u) = f(t)f(u)$	116
III	Équations différentielles linéaires d'ordre 1	117
III.1	Intégration de l'équation sans second membre	118
III.2	Principe de superposition	119
III.3	Résolution de l'équation avec second membre	119
III.4	Exemples d'équations où la fonction α s'annule : problème du recollement	125
III.5	Méthode d'Euler	125
IV	Équations linéaires du second ordre à coefficients constants	128
IV.1	Structure de l'ensemble des solutions	128
IV.2	Intégration de l'équation sans second membre	128
IV.3	Résolution de l'équation avec second membre	131
IV.4	Existence et unicité de la solution satisfaisant à une condition initiale donnée	135
V	Exemple de système physique régi par une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficient constant	136
VI	L'essentiel du cours	139
VII	Préparation à l'interrogation orale	141
VIII	Exercices	141
IX	Problème	142
	Équations d'Euler	142
5	Géométrie plane	143
I	La structure des vecteurs du plan	144
I.1	La structure d'espace vectoriel	144

I.2	La structure euclidienne de E	146
II	Modes de repérage dans le plan	147
II.1	Repères de \mathcal{P}	147
II.2	Coordonnées cartésiennes	147
II.3	Coordonnées polaires	148
III	Produit scalaire et déterminant	149
III.1	Le produit scalaire	149
III.2	Le déterminant	151
IV	La droite dans le plan	154
IV.1	Définitions et équations paramétriques	154
IV.2	Équations cartésiennes et polaires	155
IV.3	Problèmes d'angles et de distances	159
V	Le cercle	161
V.1	Définitions et équations	161
V.2	Positions relatives de cercles et de droites	162
V.3	Problèmes d'angles et de distances	164
VI	L'essentiel du cours	167
VII	Préparation à l'interrogation orale	169
VIII	Exercices	169
IX	Problème	170
	Étude d'un billard circulaire	170

6 Géométrie dans l'espace 173

I	L'espace euclidien de dimension trois	173
I.1	L'espace des vecteurs de \mathcal{E}	173
I.2	La structure euclidienne de E	173
I.3	Modes de repérage dans l'espace	174
II	Produit scalaire, produit vectoriel et déterminant	176
II.1	Produit scalaire	176
II.2	Le produit vectoriel	178
II.3	Le déterminant	181
III	Le plan et la droite dans l'espace	185
III.1	Équations des plans	185
III.2	Équations des droites	188
III.3	Problèmes d'angles et de distances	189
III.4	Intersection de trois plans et systèmes d'équations	193
IV	La sphère et le cercle	198
IV.1	La sphère	198
IV.2	Le cercle	199
V	L'essentiel du cours	201

VI	Préparation à l'interrogation orale	203
VII	Exercices	203
VIII	Problème	204
	Droite, cercle et sphère d'Euler	204
7	Arcs paramétrés	207
I	Arcs paramétrés	208
	I.1 Arcs paramétrés	208
	I.2 Points réguliers et stationnaires	209
	I.3 Asymptotes	211
II	Arcs paramétrés cartésiens	212
	II.1 Plan d'étude	212
	II.2 Premier exemple	213
	II.3 Deuxième exemple	216
III	Arcs paramétrés polaires	217
	III.1 Le théorème du relèvement	218
	III.2 Plan d'étude d'une courbe donnée par une équation polaire	220
	III.3 Premier exemple : étude de $\rho = 1 + \cos \theta$	221
	III.4 Deuxième exemple : étude de $\rho = \sin(2\theta/3)$	222
	III.5 Troisième exemple : étude de $\rho = 1 + \frac{1}{\theta-2}$	223
IV	L'essentiel du cours	225
V	Préparation à l'interrogation orale	226
VI	Exercices	226
8	Coniques	229
I	Définition monofocale d'une conique	229
	I.1 Définitions	229
	I.2 Cas du foyer à l'origine ($F = 0$) : équation polaire de la conique	230
	I.3 Repères adaptés et équations cartésiennes réduites	231
II	Parabole ($e = 1$)	231
	II.1 Repère adapté	231
	II.2 Équation cartésienne (réduite) d'une parabole	232
	II.3 Équations paramétriques d'une parabole	232
III	Ellipse ($e < 1$)	233
	III.1 Repère adapté et équation cartésienne réduite	233
	III.2 Équations paramétriques d'une ellipse	235
	III.3 Image d'un cercle par une affinité	235
	III.4 Définition bifocale d'une ellipse	236
IV	Hyperbole ($e > 1$)	237

IV.1	Repère adapté et équation cartésienne réduite	237
IV.2	Équations paramétriques d'une hyperbole	238
IV.3	Asymptotes d'une hyperbole	239
IV.4	Définition bifocale d'une hyperbole	240
V	Courbes du second degré	241
V.1	Le théorème de classification des courbes du second degré	241
V.2	Démonstration du théorème de classification	241
V.3	Exploitation pratique : des exemples	243
V.4	Tangentes à une conique	245
VI	L'essentiel du cours	247
VII	Préparation à l'interrogation orale	249
VIII	Exercices	249

Partie 2 – Analyse **253**

9 Suites de nombres **255**

I	Le corps des nombres réels	256
I.1	Insuffisance du corps des nombres rationnels	256
I.2	Borne supérieure, borne inférieure	256
I.3	Valeur absolue	258
I.4	La droite réelle achevée $\overline{\mathbb{R}}$; intervalles	260
I.5	Convexité	261
I.6	Approximations des nombres réels	262
II	Le vocabulaire des suites réelles	265
II.1	Suites définies par récurrence	265
II.2	Opérations sur les suites	267
II.3	Suites extraites	267
II.4	Suites et relation d'ordre sur \mathbb{R}	268
III	Limite d'une suite	269
III.1	Suites convergentes	269
III.2	Suites tendant vers l'infini	273
III.3	Résultats sur les suites admettant une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$	274
IV	Opérations et limites de suites	276
IV.1	Limite, somme et produit	276
IV.2	Limite et inverse	277
IV.3	Résumé : opérations et limites	278
IV.4	Limite et relation d'ordre	279
V	Relations de comparaison	280
V.1	Suites dominées; suites négligeables	280
V.2	Suites équivalentes	282

V.3	Développements asymptotiques	285
VI	Théorèmes d'existence de limite	286
VI.1	Suites monotones	286
VI.2	Segments emboîtés, suites adjacentes	287
VI.3	Suites dichotomiques d'intervalles	289
VII	Suites de nombres complexes	290
VIII	L'essentiel du cours	293
IX	Préparation à l'interrogation orale	295
X	Exercices	295
XI	Problème	297
	Irrationalité de π	297

10 Limite, continuité 301

I	Fonction de la variable réelle	301
I.1	Borne inférieure et supérieure d'une fonction	301
I.2	Propriétés vraies au voisinage d'un point	302
I.3	Équation fonctionnelle	303
II	Limites	304
II.1	Limite en un point réel	304
II.2	Limite à gauche, à droite, par valeurs différentes	305
II.3	Limite en $\pm\infty$	306
II.4	Critère séquentiel pour les limites	306
II.5	Théorèmes opératoires	307
III	Résultats et notions spécifiques aux fonctions réelles	309
III.1	Divergence vers $\pm\infty$ en un point réel	309
III.2	Divergence vers $\pm\infty$ en $\pm\infty$	309
III.3	Formes indéterminées	310
III.4	Prolongement des inégalités	311
III.5	Théorème d'encadrement	312
III.6	Limites et fonctions monotones	312
IV	Relations de comparaison	313
IV.1	Relation de domination	313
IV.2	Relation de négligeabilité	314
IV.3	Relation d'équivalence	316
IV.4	Équivalents usuels	319
IV.5	Limites et équivalents	321
V	Continuité en un point	322
V.1	Définition	322
V.2	Théorèmes opératoires	322
V.3	Continuité à gauche et à droite	323
V.4	Critère séquentiel de continuité	324

V.5	Prolongement, recollement	324
VI	Continuité sur une partie	325
VI.1	Définition	325
VI.2	Théorèmes opératoires	325
VI.3	Morphismes continus	326
VII	Fonctions uniformément continues (MPSI)	328
VIII	Continuité sur un intervalle	329
VIII.1	Théorème des valeurs intermédiaires	329
VIII.2	Bijection continue	332
VIII.3	Continuité sur un segment	333
IX	L'essentiel du cours	334
X	Préparation à l'interrogation orale	336
XI	Exercices	336
XII	Problème	337
	Fonctions dilatantes	337

11 Dérivabilité 339

I	Dérivabilité en un point	340
I.1	Définition	340
I.2	Tangente	341
I.3	Théorèmes opératoires	341
I.4	Dérivabilité à gauche et à droite	343
II	Dérivabilité sur un intervalle	344
II.1	Définition	344
II.2	Théorèmes opératoires	345
III	Fonctions n fois dérivables	346
III.1	Fonctions de classe \mathcal{C}^1	346
III.2	Dérivées successives, fonctions de classe \mathcal{C}^n	347
III.3	Théorèmes opératoires pour les fonctions de classe \mathcal{C}^n	348
III.4	Difféomorphismes de classe \mathcal{C}^n	349
IV	Éléments de calcul différentiel	349
IV.1	Extremums	349
IV.2	Théorème de Rolle	350
IV.3	Théorème des accroissements finis	352
IV.4	Variation, extremums et dérivabilité	353
IV.5	Limite de la dérivée	355
IV.6	Inégalité des accroissements finis	356
IV.7	Fonctions convexes et concaves	358
V	Suites récurrentes	362
V.1	Définition	362
V.2	Point fixe	363

V.3	Suites associées à une fonction croissante	363
V.4	Suites associées à une fonction décroissante	365
V.5	Suites associées à une fonction contractante, méthode itérative	366
V.6	Étude pratique d'une suite récurrente	368
V.7	Méthode de Newton	370
VI	L'essentiel du cours	374
VII	Préparation à l'interrogation orale	376
VIII	Exercices	376
IX	Problème	377
	Fonctions absolument et complètement monotones – d'après CENTRALE MP 98	377

12 Intégration **379**

I	Intégration des fonctions en escalier	381
I.1	Les fonctions en escalier	381
I.2	Intégration des fonctions en escalier	382
II	Fonctions continues par morceaux	384
II.1	Définition et propriétés algébriques	384
II.2	Approximation des fonctions continues par morceaux	385
III	Intégration des fonctions continues par morceaux	387
III.1	Définition de l'intégrale	387
III.2	Propriétés de l'intégrale	388
IV	Approximations	395
IV.1	Sommes de Riemann	395
IV.2	La méthode des trapèzes	397
V	Fonctions à valeurs complexes	401
V.1	Propriétés	401
V.2	Majorations	401
VI	L'essentiel du cours	402
VII	Préparation à l'interrogation orale	404
VIII	Exercices	404
IX	Problème	405
	L'intégrale de Stieltjes	406

13 Intégrales et primitives **409**

I	Intégration et dérivation	411
I.1	Primitives d'une fonction sur un intervalle	411
I.2	Intégration par parties	414
I.3	Changements de variable	416
II	Recherche de primitives	419
II.1	L'intégration par parties	419
II.2	Le changement de variable	421

II.3	Les primitives usuelles	422
II.4	Produits de polynômes et d'exponentielles	424
II.5	Fractions rationnelles	424
II.6	Fonctions trigonométriques	426
II.7	Fonctions contenant un radical	430
II.8	Outils de calcul formel	432
III	L'essentiel du cours	434
IV	Préparation à l'interrogation orale	435
V	Exercices	435
VI	Problème	436
	Étude de la fonction dilog	437
14 Formules de Taylor et développements limités		439
I	Formules de Taylor	439
I.1	Formule de Taylor avec reste intégral	439
I.2	Inégalité de Taylor-Lagrange	442
I.3	Formule de Taylor-Young	443
II	Développement limité au voisinage de 0	444
II.1	Développements limités en 0 des fonctions élémentaires	448
II.2	Dérivation et primitivation d'un développement limité en 0	449
II.3	Opérations sur les développements limités	450
III	Exemples simples de développements asymptotiques	453
IV	Applications des développements limités	454
IV.1	Calcul de limites et d'équivalents	454
IV.2	Étude locale d'une courbe	455
IV.3	Étude des branches infinies	455
IV.4	Étude des points singuliers (ou stationnaires) des courbes paramétrées planes	456
IV.5	Recollement des solutions d'une équation différentielle	456
V	L'essentiel du cours	458
VI	Préparation à l'interrogation orale	460
VII	Exercices	460
VIII	Problèmes	461
	Cas d'égalité dans l'inégalité de Taylor-Lagrange	461
	Inégalité de Kolmogorov	462
15 Propriétés métriques des arcs paramétrés		463
I	Longueur d'une courbe	463
I.1	Changement de paramètre	463
I.2	Longueur d'arc	465
I.3	Abscisse curviligne	466

II	Courbure	468
III	L'essentiel du cours	473
IV	Préparation à l'interrogation orale	474
V	Exercices	474
VI	Problèmes	475
	Le théorème des quatre sommets	475
	La courbe de Peano	476

Partie 3 – Fonctions de deux variables **479**

16 Fonctions de deux variables **481**

I	Continuité des fonctions de deux variables	482
I.1	Ouverts du plan	482
I.2	Limites de fonctions réelles de deux variables	483
I.3	Fonctions de variable vectorielle à valeurs vectorielles	486
II	Différentiabilité des fonctions de deux variables	488
II.1	Dérivées partielles	488
II.2	L'application linéaire tangente	490
II.3	Fonctions de classe C^1 à valeurs vectorielles	493
II.4	Dérivées partielles d'ordre supérieur	497
III	Applications	499
III.1	Extremums	499
III.2	Changements de variables	501
III.3	Équations aux dérivées partielles	506
III.4	Le théorème des fonctions implicites	508
IV	L'essentiel du cours	512
V	Préparation à l'interrogation orale	513
VI	Exercices	513
VII	Problème	514
	Une équation aux dérivées partielles	514

17 Intégrales doubles et champs de vecteurs **517**

I	Intégrale double sur un pavé	518
I.1	Fonctions en escalier	518
I.2	Approximations des fonctions par des fonctions en escalier	519
I.3	Intégrale double sur un pavé	521
I.4	Le théorème de Fubini	523
II	Intégrale double sur un domaine quelconque	525
II.1	Fonctions intégrables	525
II.2	Intégrale double sur un domaine élémentaire	527
II.3	Propriétés des intégrales doubles	530

II.4	Changements de variables	530
III	Champs de vecteurs	532
III.1	Champs de vecteurs	532
III.2	Intégrales curvilignes	534
III.3	La formule de Green-Riemann	537
III.4	Opérateurs différentiels	540
IV	L'essentiel du cours	543
V	Préparation à l'interrogation orale	544
VI	Exercices	544
VII	Problème	546
	Fonctions harmoniques	546

Partie 4 – Structures algébriques **549**

18 Groupes **551**

I	Groupes	552
I.1	Groupes	552
I.2	Sous-groupes	555
I.3	Morphismes de groupes	556
I.4	Sous-groupes de \mathbb{Z} et de \mathbb{R}	559
II	Le groupe symétrique	561
II.1	Le groupe symétrique S_n	561
II.2	Décomposition en produits de cycles	564
II.3	Signature	566
III	L'essentiel du cours	569
IV	Préparation à l'interrogation orale	570
V	Exercices	570
VI	Problème d'informatique	572
	Le groupe symétrique	572

19 Anneau et arithmétique **573**

I	Structure d'anneau	573
I.1	Définitions et exemples	573
I.2	Sous-anneau	574
I.3	Calcul dans un anneau	575
I.4	Unités d'un anneau. Corps	577
I.5	Morphisme d'anneaux	578
II	Arithmétique dans \mathbb{Z}	579
II.1	Division	579
II.2	Exponentiation rapide	581

II.3	Diviseurs communs et pgcd	583
II.4	Nombres premiers entre eux	585
II.5	Nombres premiers et théorème fondamental de l'arithmétique	587
II.6	Multiples communs et ppcm	590
III	Compléments sur les congruences	591
IV	L'essentiel du cours	594
V	Préparation à l'interrogation orale	596
VI	Exercices	596

20 Polynômes **599**

I	L'algèbre $\mathbb{K}[X]$	600
I.1	Définition d'un polynôme à coefficients dans \mathbb{K}	600
I.2	Degré	603
I.3	Substitution, composition et fonctions polynômes	605
I.4	Dérivation, Formule de Taylor	608
II	L'anneau euclidien $K[X]$	610
II.1	Divisibilité	610
II.2	Division euclidienne	612
III	Racines d'un polynôme	613
III.1	Racines simples. Polynôme nul. Applications	613
III.2	Multiplicité d'une racine	615
III.3	Relations coefficients-racines	617
IV	Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$ (MPSI)	618
IV.1	pgcd de deux polynômes	618
IV.2	Coefficients de Bézout d'un couple de polynômes	620
IV.3	ppcm de deux polynômes	621
IV.4	Polynômes premiers entre eux, théorème de Bézout et conséquences	622
V	Décomposition primaire dans $\mathbb{K}[X]$	624
V.1	Polynômes irréductibles et polynômes scindés	624
V.2	Décomposition primaire dans $\mathbb{C}[X]$	626
V.3	Décomposition primaire dans $\mathbb{R}[X]$	627
V.4	Polynômes de Lagrange	628
VI	Fractions rationnelles	629
VI.1	Définition de $\mathbb{K}(X)$	629
VI.2	Application rationnelle, composition et dérivation	630
VI.3	Degré et partie entière	631
VI.4	Pôles et parties polaires	632
VI.5	Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$	635
VI.6	Primitives de fractions rationnelles	637

VII	L'essentiel du cours	639
VIII	Préparation à l'interrogation orale	641
IX	Exercices	641
X	Problème	644
	Théorème de Müntz-Szász	644

Partie 5 – Algèbre linéaire **647**

21 Espaces vectoriels **649**

I	Espaces vectoriels sur un corps \mathbb{K}	649
	I.1 Définition	649
	I.2 Exemples usuels d'espaces vectoriels	649
	I.3 Règles opératoires dans un espace vectoriel	653
	I.4 Combinaisons linéaires	653
II	Sous-espaces vectoriels	656
	II.1 Définition	656
	II.2 Sous-espace vectoriel engendré par une partie	658
	II.3 Somme de sous-espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels supplémentaires	661
III	Sous-espaces affines	663
	III.1 Sous-espace affine	664
	III.2 Barycentre, convexité	665
IV	Applications linéaires	667
	IV.1 Définitions et premières propriétés	667
	IV.2 Image et noyau	668
	IV.3 Équations linéaires	669
	IV.4 Linéarité et opérations	671
	IV.5 Structure de $\mathcal{L}(E, F)$ et de $\mathcal{L}(E)$	672
	IV.6 Des éléments remarquables de $\mathcal{L}(E)$	673
V	L'essentiel du cours	677
VI	Préparation à l'interrogation orale	678
VII	Exercices	678

22 Algèbre linéaire en dimension finie **681**

I	Espaces vectoriels de dimension finie	681
	I.1 Compléments sur les familles libres et génératrices	681
	I.2 Bases, théorème de la dimension	683
	I.3 Dimension de sous-espaces vectoriels, théorème de la base incomplète	688
II	Applications linéaires en dimension finie	692
	II.1 Image d'un système	692

II.2	Rang d'une famille, d'une application linéaire, théorème du rang	695
II.3	Formes linéaires et hyperplans	698
III	L'essentiel du cours	701
IV	Préparation à l'interrogation orale	703
V	Exercices	703
VI	Problème	705
	Étude de l'algèbre $\mathcal{L}(E)$	705
23	Matrices	707
I	Matrices générales	707
I.1	L'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$	707
I.2	Propriétés du produit et de la transposition	710
I.3	Matrices carrées, matrices inversibles	712
I.4	Matrices symétriques et antisymétriques	715
I.5	Matrices diagonales, triangulaires et nilpotentes	716
II	Matrices d'une application linéaire	718
II.1	Matrices d'une famille de vecteurs	718
II.2	Matrices d'une application linéaire	719
II.3	Opérations sur les matrices d'applications linéaires	720
III	Changements de bases et applications	722
III.1	Changements de bases	722
III.2	Application canoniquement associée à une matrice	724
III.3	Critères d'inversibilité d'une matrice carrée	726
III.4	Matrices équivalentes, matrices semblables	727
III.5	Trace	729
IV	Systèmes linéaires, méthodes pratiques et applications	730
IV.1	Opérations sur les lignes et les colonnes d'une matrice	730
IV.2	Méthode de Gauss	732
IV.3	Systèmes linéaires	734
IV.4	Calcul de puissance et d'inverse	736
V	L'essentiel du cours	739
VI	Préparation à l'interrogation orale	742
VII	Exercices	742
VIII	Problème	745
	Le théorème d'Engel et crochet de Lie	745
24	Déterminants	747
I	Déterminants 2×2 et 3×3	748
I.1	Déterminant dans le plan	748
I.2	Déterminant dans l'espace	751
II	Déterminants	755

II.1	Applications multilinéaires alternées	755
II.2	Déterminant d'une famille de vecteurs	759
II.3	Déterminant d'un endomorphisme	761
II.4	Déterminant d'une matrice carrée	763
III	Calcul et applications des déterminants	765
III.1	Opérations élémentaires et calcul du déterminant d'une matrice	765
III.2	Cofacteurs et comatrice	766
III.3	Formules de Cramer	771
III.4	Mineurs et rang	772
IV	L'essentiel du cours	775
V	Préparation à l'interrogation orale	776
VI	Exercices	776
VII	Problème	778
	Le théorème fondamental de l'algèbre	778

Partie 6 – Géométrie affine et euclidienne 781

25 Géométrie euclidienne 783

I	Espaces préhilbertiens réels	783
I.1	Définition et exemples de produit scalaire	783
I.2	Propriétés du produit scalaire	785
I.3	Normes et distance	787
I.4	Vecteurs et sous-espaces orthogonaux	789
I.5	Familles et bases orthogonales	791
II	Espaces vectoriels euclidiens	793
II.1	Formes linéaires et hyperplans	793
II.2	Bases orthonormales	794
II.3	Orthogonalité dans les espaces euclidiens	796
II.4	Projections et symétries orthogonales	797
II.5	Distance d'un vecteur à un sous-espace	800
III	Endomorphismes orthogonaux	801
III.1	Définitions et caractérisations	801
III.2	Matrices orthogonales	804
III.3	Groupe spécial orthogonal	806
IV	Endomorphismes orthogonaux en dimension 2	808
IV.1	Groupe orthogonal en dimension 2	808
IV.2	Isométries directes en dimension 2	809
IV.3	Isométries indirectes en dimension 2	810
V	Endomorphismes orthogonaux en dimension 3	813
V.1	Groupe orthogonal en dimension 3	813

V.2	Isométries directes en dimension 3	814
V.3	Propriétés des réflexions	817
VI	L'essentiel du cours	819
VII	Préparation à l'interrogation orale	822
VIII	Exercices	822
IX	Problèmes	825
	Théorème de Müntz	825
	Matrices magiques	826
26	Géométrie affine euclidienne	829
I	Applications affines	829
I.1	Définition et exemples d'applications affines	829
I.2	Propriétés des applications affines	831
I.3	Isométries affines	832
II	Isométries affines du plan	833
II.1	Propriétés des rotations affines, translations et réflexions affines	834
II.2	Classification des isométries affines du plan	835
III	Similitudes	836
III.1	Généralités	836
III.2	Similitudes du plan	838
IV	Isométries affines de l'espace	840
IV.1	Propriétés des rotations, translations et réflexion affines	840
IV.2	Classification des isométries affines de l'espace	842
V	L'essentiel du cours	844
VI	Préparation à l'interrogation orale	846
VII	Exercices	846
VIII	Problème	847
	Les isométries du cube	847
Partie 7	– Solutions des tests	849
Partie 8	– Solutions des colles	893
Partie 9	– Solutions des exercices	923
Partie 10	– Solutions des problèmes	1009
Index		1069