

100%
LICENCE

2^e année

ELIE AZOULAY - JEAN AVIGNANT - GUY AULIAC

LES MATHÉMATIQUES EN LICENCE *Tome 3*

Cours et exercices corrigés

3^e édition

50% COURS
+ 50% EXOS
= 100%
EFFICACE

EdiScience

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1 Applications de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^p$

A.	Topologie des espaces vectoriels normés.....	1
1.1	Vocabulaire.....	1
1.2	Suite de $\mathbb{R}^p$	5
1.3	Parties ouvertes, parties fermées.....	8
1.4	Partie compactes de $\mathbb{R}^p$	10
1.5	Utilisation des suites en topologie.....	11
B.	Limite. Continuité.....	12
1.1	Limite en un point.....	12
1.2	Applications coordonnées. Applications partielles.....	13
1.3	Continuité.....	15
1.4	Propriétés topologiques des applications continues.....	17
B.	Fonctions différentiables.....	19
1.1	Dérivées partielles.....	19
1.2	Fonctions différentiables.....	23
1.3	Cas particuliers et matrice jacobienne.....	25
1.4	Composition.....	30
1.5	Formules de Taylor.....	33
1.6	Extremums.....	36
	Résumé.....	39
	Exercices.....	43
	Corrigés.....	49

CHAPITRE 2 Intégrales généralisées

A.	Introduction et définition.....	67
2.1	Position du problème.....	67
2.2	Définitions.....	67
2.3	Cas où l'étude est élémentaire.....	68
2.4	Théorème préliminaire.....	69
B.	Intégrales du type $\int_a^b f(x)dx$, $f(x) \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow b^-$	70
2.1	Étude de la convergence par comparaison.....	70
2.2	Étude de la convergence par équivalence.....	71
2.3	Étude de l'intégrale $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$, α réel donné.....	72
2.4	Règle de l'ordre. Règle de Riemann.....	72

C.	Intégrales du type $\int_a^{+\infty} f(x)dx$	74
2.1	Étude par comparaison	74
2.2	Étude par équivalence	74
2.3	Étude de l'intégrale $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, $a > 0$, α réel donné	75
2.4	Règle de l'ordre. Règle de Riemann	75
2.5	Intégrales plusieurs fois impropres	76
D.	Intégrales absolument convergentes	77
	Résumé	79
	Exercices	80
	Corrigés	85

CHAPITRE 3

Intégrales multiples

		105
3.1	Intégrale double	105
3.2	Interprétation géométrique	108
3.3	Propriétés de l'intégrale double	109
3.4	Changement de variable dans une intégrale double	112
3.5	Notion d'intégrale triple	115
3.6	Changement de variable dans une intégrale triple	117
	Résumé	120
	Exercices	121
	Corrigés	126

CHAPITRE 4

Intégrales curvilignes. Intégrales de surface

Formules intégrales d'analyse vectorielle

		141
4.1	Formes différentielles	141
4.2	Intégrale curviligne	144
4.3	Intégration des formes exactes	146
4.4	Travail d'un vecteur. Notion de gradient	148
4.5	Opérateurs classiques	150
4.6	Opérateur $\vec{\nabla}$	152
4.7	Surface de l'espace	153
4.8	Intégrale de surface	158
4.9	Formule de Green-Riemann	159
4.10	Formule d'Ostrogradski	161
4.11	Formules intégrales d'analyse vectorielle	163
	Résumé	164
	Exercices	168
	Corrigés	173

CHAPITRE 5

Séries numériques

195

A.	Généralités.....	195
5.1	Définitions.....	195
5.2	Condition nécessaire de convergence d'une série.....	196
5.3	Critère de Cauchy.....	197
5.4	Opérations linéaires sur les séries.....	197
5.5	Importance des séries. Relations entre suites et séries.....	198
B.	Étude des séries à termes positifs (ou séries positives).....	199
5.1	Propriétés d'associativité et de commutativité.....	199
5.2	Séries extraites d'une série positive convergente.....	200
5.3	Théorème de comparaison de deux séries positives.....	200
5.4	Règle de Cauchy.....	201
5.5	Règle de d'Alembert.....	202
5.6	Comparaison avec intégrale.....	205
5.7	Séries de Riemann. Règle de l'ordre.....	207
5.8	Règle « $n^\alpha u_n$ ».....	208
5.9	Séries de Bertrand.....	208
5.10	Règle de Duhamel.....	209
5.11	Constante d'Euler.....	210
5.12	Formule de Stirling.....	211
C.	Séries à termes réels de signes quelconques.....	213
5.1	Convergence absolue. Semi-convergence.....	213
5.2	Séries alternées.....	213
5.3	Propriétés des séries absolument convergentes.....	215
5.4	Produits de séries.....	217
5.5	Théorème d'Abel.....	218
5.6	Procédé de sommation de Césaro.....	219
D.	Séries complexes.....	220
E.	Calcul approché de la somme d'une série réelle.....	221
	Résumé.....	224
	Exercices.....	228
	Corrigés.....	234

CHAPITRE 6

Suites et séries de fonctions

259

A.	Suites de fonctions.....	259
6.1	Convergence simple, convergence uniforme.....	259
6.2	Critère de convergence uniforme.....	262
6.3	Propriétés des suites de fonctions.....	263

B.	Séries de fonctions	266
6.1	Convergence normale	268
6.2	Propriétés des séries de fonctions	269
	Résumé	270
	Exercices	271
	Corrigés	274

CHAPITRE 7

Séries entières et développement en série 289

A.	Généralités – Étude de la convergence	289
7.1	Définition et exemple	289
7.2	Étude de la convergence par la règle de d'Alembert	290
7.3	Théorème d'Abel. Étude générale de la convergence	293
B.	Opérations sur les séries entières	295
7.1	Opérations linéaires	295
7.2	Produit de deux séries entières	296
7.3	Convergence uniforme d'une série entière sur un disque $ z \leq \rho < R$. Continuité	296
7.4	Intégration. Dérivation	297
C.	Développement d'une fonction f en série entière	300
7.1	Introduction. Exemples	300
7.2	Unicité du développement lorsqu'il existe. Séries de MacLaurin et de Taylor	301
7.3	Méthodes pratiques de développement en série entière. Développements usuels	303
D.	Applications des séries entières	309
7.1	Calculs approché de valeurs numériques de certaines fonctions	310
7.2	Calcul d'intégrales définies ou indéfinies	310
7.3	Résolution de certaines équations différentielles	311
	Résumé	312
	Exercices	314
	Corrigés	318
	Brèves notices sur les mathématiciens	341
	Index	342