

100%
LICENCE

1^{re} année

ELIE AZOULAY - JEAN AVIGNANT - GUY AULIAC

**LES MATHÉMATIQUES
EN LICENCE**
Tome 2

Cours et exercices corrigés

**50% COURS
+50% EXOS
=100%
EFFICACE**

3^e édition

EdiScience

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1

Intégration d'une fonction d'une variable

		1
1.1	Intégrale des fonctions en escalier	1
1.2	Intégrale de Riemann	4
1.3	Valeur moyenne d'une fonction intégrable sur un segment $[a, b]$	6
1.4	Propriétés générales de l'intégrale de Riemann	8
1.5	Théorème de la moyenne	11
1.6	Inégalité de Schwarz	12
1.7	Intégrale fonction de sa borne supérieure. Primitive	12
	<i>Résumé</i>	13
	<i>Exercices</i>	14
	<i>Corrigés</i>	16

CHAPITRE 2

Calcul des primitives et des intégrales définies

		23
A.	Principes généraux	23
2.1	Primitives usuelles immédiates	23
2.2	Intégration par décomposition en somme (linéarisation)	25
2.3	Intégration par parties	25
2.4	Changement de variable bijectif dans une intégrale	27
2.5	Second tableau de primitives usuelles	31
B.	Primitives des fractions rationnelles	33
2.1	Pratique de la décomposition en éléments simples	33
2.2	Intégration d'un élément simple de première espèce	35
2.3	Intégration d'un élément simple de seconde espèce	36
2.4	Exemples d'intégration de fractions rationnelles	38
C.	Primitives de fonctions trigonométriques ou hyperboliques	42
2.1	Forme $\int \sin^p x \cos^q x dx$, ou $\int \operatorname{sh}^p x \operatorname{ch}^q x dx$, avec p et q entiers relatifs	42
2.2	Intégrales de Wallis	43
2.3	Cas général	45

D.	Primitives de fonctions algébriques non rationnelles.....	47
E.	Calcul numérique approché d'une intégrale définie.....	51
2.1	Méthode des rectangles	51
2.2	Méthode des trapèzes.....	53
2.3	Méthode de Simpson.....	54
2.4	Méthode de Romberg.....	55
	<i>Résumé</i>	57
	<i>Exercices</i>	60
	<i>Corrigés</i>	65

CHAPITRE 3

Fonctions vectorielles d'une variable réelle**Courbes planes paramétrées**

		85
A.	Rappels de calcul vectoriel	85
B.	Fonctions vectorielles.....	87
3.1	Définitions.....	87
3.2	Continuité. Dérivation	87
3.3	Calcul des dérivées.....	89
3.4	Formule de Taylor-Young	89
C.	Courbes planes paramétrées	90
3.1	Étude locale théorique	90
3.2	Étude des branches infinies	94
3.3	Points doubles. Points multiples	96
3.4	Longueur d'un arc de courbe	96
3.5	Plan d'étude pratique d'une courbe plane paramétrée	99
3.6	Exemples d'études de courbes planes paramétrées	102
	<i>Résumé</i>	106
	<i>Exercices</i>	108
	<i>Corrigés</i>	111

CHAPITRE 4

Courbes planes en coordonnées polaires coniques

		133
4.1	Définitions et généralités	133
4.2	Changement de coordonnées. Repère cartésien associé	134
4.3	Équations de quelques courbes simples	135
4.4	Tangente en un point à une courbe définie par $\rho = f(\theta)$	137

4.5	Points d'inflexion.....	140
4.6	Branches infinies.....	141
4.7	Points doubles. Points multiples.....	143
4.8	Longueur d'un arc de courbe.....	143
4.9	Plan d'étude d'une courbe définie par $\rho = f(\theta)$	144
4.10	Notions sur les coniques.....	145
4.11	Exemple : courbe d'équation $\rho = \frac{\cos \theta \cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{3\theta}{2}}$	151
	<i>Résumé</i>	156
	<i>Exercices</i>	158
	<i>Corrigés</i>	159
CHAPITRE 5		
Équations différentielles		
		167
A.	Généralités.....	167
5.1	Définition. Terminologie usuelle.....	167
5.2	Courbes intégrales d'une équation différentielle.....	169
B.	Équations du premier ordre $F(x, y, y') = 0$	169
5.1	Équations à variables séparées (ou « séparables »).....	169
5.2	Équations incomplètes.....	170
5.3	Équation homogène.....	171
5.4	Équation linéaire.....	173
5.5	Autres types classiques d'équations du premier ordre.....	177
5.6	Applications des équations du premier ordre.....	179
C.	Équations du second ordre $F(x, y, y', y'') = 0$	183
5.1	Équations incomplètes.....	184
5.2	Équation linéaire du second ordre, sans second membre, à coefficients constants.....	185
5.3	Équation linéaire à coefficients constants. Cas général.....	189
5.4	Équation linéaire à coefficients constants, avec second membre « simple ».....	192
5.5	Applications des équations différentielles du second ordre.....	195
	<i>Résumé</i>	199
	<i>Exercices</i>	202
	<i>Corrigés</i>	209

CHAPITRE 6

	Espaces vectoriels. Applications linéaires. Matrices	235
A.	Espaces vectoriels	235
6.1	Introduction	235
6.2	Définition d'un espace vectoriel	235
6.3	Exemples	236
6.4	Propriétés immédiates des opérations dans un espace vectoriel	236
6.5	Familles de vecteurs d'un espace vectoriel. Dépendance, indépendance	237
6.6	Sous-espaces vectoriels	238
6.7	Intersection de deux sous-espaces	239
6.8	Somme de sous-espaces. Somme directe. Sous-espaces supplémentaires	240
6.9	Générateurs d'un espace vectoriel. Base. Coordonnées	241
6.10	Dimension finie	243
6.11	Sous-espaces vectoriels en dimension finie. Rang d'un système de vecteurs	245
6.12	Espaces de dimension infinie	247
B.	Applications linéaires. Matrices	248
6.1	Définition	248
6.2	Noyau. Image	248
6.3	Application linéaire injective	249
6.4	Image d'une famille génératrice. Cas où E est de dimension finie	250
6.5	Cas où E et F sont de dimensions finies. Matrices associées à une application linéaire	252
6.6	Matrice nulle. Égalité. Transposition	255
6.7	Opérations linéaires sur les applications linéaires et les matrices	256
6.8	Composition des applications linéaires. Multiplication des matrices	257
C.	Endomorphismes. Algèbre des matrices carrées d'ordre n	261
6.1	Endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Matrices carrées d'ordre n	261
6.2	Anneau de matrices carrées d'ordre n	263
6.3	Endomorphisme bijectif. Inverse d'une matrice carrée	264

6.4	Inversion d'une matrice par la méthode de Gauss	266
6.5	Changement de base. Matrices semblables	269
6.6	Projecteurs	272
D.	Notions sur la dualité	274
6.1	Forme linéaire	274
6.2	Espace dual d'un espace vectoriel. Base duale d'une base de E	275
6.3	Hyperplan vectoriel.....	276
	Résumé.....	277
	Exercices.....	281
	Corrigés	287

CHAPITRE 7

Déterminants. Systèmes d'équations linéaires 311

A.	Permutations d'un ensemble fini.....	311
7.1	Rappel	311
7.2	Transposition.....	312
7.3	Inversions d'une permutation. Parité. Signature	313
B.	Déterminants.....	314
7.1	Forme multilinéaire alternée.....	314
7.2	Expression d'une forme multilinéaire alternée dans une base de E	315
7.3	Définition d'un déterminant.....	316
7.4	Exemples. Déterminants d'ordre 2 et 3. Règle de Sarrus.....	317
7.5	Propriétés des déterminants	318
7.6	Développement d'un déterminant suivant une rangée	321
7.7	Calcul pratique d'un déterminant.....	323
7.8	Déterminant de Vandermonde.....	326
C.	Inversion d'une matrice. Systèmes d'équations linéaires.....	327
7.1	Inversion d'une matrice.....	327
7.2	Systèmes d'équations linéaires. Généralités	328
7.3	Système de Cramer	329
7.4	Rang d'un système linéaire	331
7.5	Cas général du système de n équations à p inconnues. Théorème de Fontené-Rouché	333
7.6	Système homogène	335

<i>Résumé</i>	336
<i>Exercices</i>	338
<i>Corrigés</i>	345

CHAPITRE 8

Valeurs propres. Diagonalisation d'un endomorphisme	359
8.7 Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres	359
8.8 Recherche des valeurs propres en dimension finie. Polynôme caractéristique	360
8.9 Réduction d'un endomorphisme possédant n valeurs propres distinctes	362
8.10 Étude générale de la diagonalisation	364
8.11 Applications de la diagonalisation	367
<i>Résumé</i>	372
<i>Exercices</i>	373
<i>Corrigés</i>	377
Problèmes d'examen Licence Sciences 1^{re} année	397
Brèves notices sur les mathématiciens	427
Index	429