

100%
LICENCE

1^{re} année

ELIE AZOULAY - JEAN AVIGNANT - GUY AULIAC

LES MATHÉMATIQUES EN LICENCE *Tome 1*

Cours et exercices corrigés

50% COURS
+ 50% EXOS
= 100%
EFFICACE

3^e édition

EdiScience

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1

Logique élémentaire. Notion d'ensemble. Opérations sur les ensembles

		1
A.	Logique	1
1.1	Règle du jeu	1
1.2	Propositions	1
1.3	Négation d'une proposition	1
1.4	Connecteurs logiques	2
1.5	Conjonction. Disjonction	2
1.6	Implication. Équivalence	3
B.	Ensembles. Opérations sur les ensembles	6
1.1	Ensemble	6
1.2	Appartenance	6
1.3	Détermination d'un ensemble	6
1.4	Égalité de deux ensembles	7
1.5	Inclusion	7
1.6	Visualisation des ensembles. Diagrammes	7
1.7	Opérations sur les ensembles	8
1.8	Propriétés des opérations sur les ensembles	10
1.9	Lois de De Morgan et généralisation	11
1.10	Différence de deux ensembles	11
1.11	Notion de recouvrement et de partition	12
1.12	Ensembles usuels en mathématiques	12
1.13	Produit d'ensembles	13
1.14	Relation. Graphe d'une relation	14
C.	Quantificateurs	14
1.1	Quantificateurs	14
1.2	Quantificateurs et négation	15
	Résumé	16
	Exercices	18
	Corrigés	20

CHAPITRE 2

Applications. Relations d'ordre et d'équivalence.**Analyse combinatoire**

		27
2.1	Lois de composition	27
2.2	Notion d'application	28
2.3	Notion de relation binaire	32
2.4	Relation d'équivalence	33
2.5	Équivalence compatible avec une loi de composition	34
2.6	Homomorphismes	35
2.7	Relation d'ordre	35
2.8	Ordre total. Ordre induit	36
2.9	Majorant. Minorant	36
2.10	Puissance d'un ensemble	37
2.11	Ensemble dénombrable	37
2.12	Dénombrement des différentes applications d'un ensemble E dans un ensemble F	39
2.13	Applications : binôme de Newton	41
<i>Résumé</i>		45
<i>Exercices</i>		47
<i>Corrigés</i>		49

CHAPITRE 3

Structures algébriques

		55
3.1	Groupe	55
3.2	Sous-groupe	57
3.3	Homomorphisme de groupes	59
3.4	Groupe ordonné	60
3.5	Anneau	61
3.6	Corps	63
<i>Résumé</i>		64
<i>Exercices</i>		65
<i>Corrigés</i>		67

CHAPITRE 4

Construction de $\mathbb{R}$. Éléments de topologie

		75
A.	Construction de $\mathbb{R}$	75
4.1	Axiomes des nombres réels	75

4.2	Axiome de Cantor	77
4.3	Unicité de $\mathbb{R}$	77
4.4	Conséquences des axiomes	78
B.	Topologie de $\mathbb{R}$	80
4.1	Voisinage d'un point	80
4.2	Ensemble ouvert	80
4.3	Topologie de $\mathbb{R}$	81
4.4	Voisinage de $A \subset \mathbb{R}$	82
4.5	Intérieur de A	82
4.6	Adhérence	82
4.7	Point d'accumulation	82
4.8	Point isolé	83
4.9	Notion d'espace séparé	83
4.10	Base de voisinage de x	83
4.11	Théorème de Bolzano-Weierstrass	84
4.12	La droite numérique achevée $\bar{\mathbb{R}}$	84
	Résumé	85
	Exercices	86
	Corrigés	87

CHAPITRE 5

Suites numériques et applications 93

5.1	Rappels	93
5.2	Suites convergentes	94
5.3	Suites de limites infinie	99
5.4	Point d'accumulation. Valeur d'adhérence	102
5.5	Suite de Cauchy	103
5.6	Théorèmes fondamentaux sur les suites numériques	105
5.7	Utilisation des suites en topologie	106
5.8	Suites définies par une relation de récurrence	107
5.9	Application lipschitzienne	111
5.10	Application à la résolution de l'équation $f(x) = 0$	111
	Résumé	118
	Exercices	122
	Corrigés	127

CHAPITRE 6

Arithmétique

	Arithmétique	139
6.1	Introduction	139
6.2	Divisibilité, congruence, division euclidienne. Anneau $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$	139
6.3	Idéal sur $\mathbb{Z}$. PGCD – Théorème de Bézout	142
6.4	Théorèmes fondamentaux sur la divisibilité	144
6.5	PPCM	144
6.6	Nombres premiers	145
6.7	Décomposition en facteurs premiers	147
6.8	Systèmes de numération. Système binaire	149
6.9	Notions sur les équations diophantiennes	150
6.10	Développement décimal périodique d'un rationnel	153
<i>Résumé</i>		154
<i>Exercices</i>		156
<i>Corrigés</i>		157

CHAPITRE 7

Nombres complexes

	Nombres complexes	169
7.1	Définitions	169
7.2	Opérations sur les nombres complexes	170
7.3	Nombres réels. Nombres imaginaires purs. Notations algébriques et trigonométriques des nombres complexes	174
7.4	Formule de Moivre	176
7.5	Racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe	177
7.6	Résolution de l'équation du second degré	179
7.7	Transformations géométriques simples	180
7.8	e^z pour z complexe. Formules d'Euler	182
<i>Résumé</i>		184
<i>Exercices</i>		186
<i>Corrigés</i>		190

CHAPITRE 8

Polynômes. Fractions rationnelles

	Polynômes. Fractions rationnelles	205
8.1	Définition	205
8.2	Addition des polynômes	206

8.3	Multiplication des polynômes	207
8.4	Multiplication par un scalaire	208
8.5	Polynôme dérivé	209
8.6	Formules de MacLaurin et de Taylor	210
8.7	Division des polynômes suivant les puissances décroissantes ou division euclidienne	212
8.8	Recherche du quotient et du reste	213
8.9	Division suivant les puissances croissantes	214
8.10	PGCD de polynômes	216
8.11	Division par $X - a$	219
8.12	Polynômes et équations sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes	220
8.13	Théorème de d'Alembert	221
8.14	Résolution des équations algébriques	221
8.15	Transformée d'une équation	223
8.16	Factorisation d'un polynôme à coefficients réels	224
8.17	Relations entre coefficients et racines	225
8.18	Fractions rationnelles	226
Résumé		232
Exercices		235
Corrigés		241

CHAPITRE 9

Fonctions d'une variable réelle. Limites.**Continuité**

	Continuité	267
9.1	Limites	267
9.2	Relations entre limites de suites et limites de fonctions	269
9.3	Propriétés des limites	270
9.4	Fonctions équivalentes	272
9.5	Continuité	275
9.6	Propriétés des fonctions continues sur un intervalle	279
9.7	Fonction inverse ou réciproque	281
9.8	Continuité uniforme. Fonction lipschitzienne	282
Résumé		284
Exercices		285
Corrigés		286

CHAPITRE 10

Fonctions d'une variable réelle. Dérivée et différentielle	295
10.1 Rappels	295
10.2 Relation liant les dérivées de deux fonctions réciproques	298
10.3 Fonctions dérivées successives. Formule de Leibniz	300
10.4 Fonction convexe	301
10.5 Plan d'étude d'une fonction	303
<i>Exercices</i>	304
<i>Corrigés</i>	304

CHAPITRE 11

Fonctions trigonométriques réciproques	309
11.1 Introduction	309
11.2 Fonction Arcsin	309
11.3 Fonction Arccos	311
11.4 Fonction Arctan	312
<i>Résumé</i>	314
<i>Exercices</i>	315
<i>Corrigés</i>	317

CHAPITRE 12

Primitives. Fonctions exponentielles et logarithmiques.	
Fonctions puissances	329
12.1 Primitives	329
12.2 Logarithmes népériens et exponentielles	330
12.3 Fonctions logarithmes et exponentielles de base quelconque	331
12.4 Fonctions puissances	333
12.5 Fonctions de la forme u^v	334
<i>Exercices</i>	335
<i>Corrigés</i>	337

CHAPITRE 13

Fonctions hyperboliques directes et inverses	347
13.1 Fonctions hyperboliques directes	347
13.2 Étude des fonctions hyperboliques	348
13.3 Relations entre les fonctions hyperboliques	352

13.4	Formules de duplication.....	353
13.5	Expression des fonctions hyperboliques de a en fonction de $\operatorname{th} \frac{a}{2} = t$	354
13.6	Fonctions hyperboliques inverses ou réciproques	355
Résumé.....		359
Exercices.....		362
Corrigés		363

CHAPITRE 14

Formules de Taylor. Développements limités. Applications 371

14.1	Théorème de Rolle	371
14.2	Théorème des accroissements finis	372
14.3	Applications aux variations de fonctions	374
14.4	Formules de Taylor	375
14.5	Formule de MacLaurin.....	378
14.6	Notions sur les développements limités	379
14.7	Principaux développements limités.....	383
14.8	Applications à la recherche des limites	387
14.9	Applications à l'étude des courbes d'équation $y = f(x)$	389
14.10	Marche à suivre pour l'étude d'une fonction $x \mapsto f(x)$ et construction de son graphe	393
Résumé.....		394
Exercices.....		397
Corrigés		402
Brèves notices sur les mathématiciens		425
Index.....		427