

OLIVIER CARTON
LANGAGES
FORMELS
CALCULABILITÉ
ET
COMPLEXITÉ
PRÉFACE DE DOMINIQUE PERRIN ■

LICENCE ET MASTER DE MATHÉMATIQUES OU D'INFORMATIQUE
OPTION INFORMATIQUE DE L'AGRÉGATION DE MATHÉMATIQUES



VUIBERT

Table des matières

Préface	5
Introduction	7
Remerciements	9
I Langages formels	11
1 Langages rationnels	13
1.1 Premières définitions	13
1.2 Opérations rationnelles	15
1.3 Combinatoire des mots	16
1.3.1 Périodicités	16
1.3.2 Mots infinis	20
1.3.3 Motifs inévitables	21
1.3.4 Codes	24
1.4 Un peu d'ordre	26
1.4.1 Quasi-ordres sur les mots	29
1.4.2 Ordres sur les mots	30
1.4.3 Quasi-ordres sur les arbres	31
1.5 Langages rationnels	33
1.5.1 Expressions rationnelles	33
1.5.2 Automates	35
1.6 Automates déterministes	41
1.7 Automate minimal	44
1.7.1 Quotients	45
1.7.2 Congruence de Nerode	46
1.7.3 Calcul de l'automate minimal	48
1.8 Propriétés de clôture	51
1.8.1 Opérations booléennes	51
1.8.2 Morphisme et morphisme inverse	51
1.9 Lemme de l'étoile et ses variantes	53
1.10 Hauteur d'étoile	57
1.11 Reconnaissance par morphisme	58
1.12 Langages sans étoile	65
1.13 Compléments	71
1.13.1 Conjecture de Černý	71
1.13.2 Rationnels d'un monoïde quelconque	71

2	Langages algébriques	75
2.1	Grammaires algébriques	75
2.1.1	Définitions et exemples	75
2.1.2	Grammaires réduites	79
2.1.3	Grammaires propres	80
2.1.4	Forme normale quadratique	82
2.2	Systèmes d'équations	83
2.2.1	Substitutions	83
2.2.2	Système d'équations associé à une grammaire	83
2.2.3	Existence d'une solution pour $\mathcal{S}(G)$	84
2.2.4	Unicité des solutions propres	85
2.2.5	Théorème de Parikh	86
2.2.6	Systèmes d'équations en commutatifs	87
2.2.7	Solutions rationnelles des systèmes commutatifs	88
2.3	Arbres de dérivation	90
2.3.1	Ambiguïté	91
2.3.2	Lemme d'itération	91
2.3.3	Applications du lemme d'itération	94
2.3.4	Ambiguïté inhérente	96
2.4	Propriétés de clôture	97
2.4.1	Opérations rationnelles	97
2.4.2	Substitution algébrique	97
2.4.3	Intersection avec un rationnel	98
2.4.4	Morphisme inverse	98
2.4.5	Théorème de Chomsky et Schützenberger	100
2.5	Forme normale de Greibach	101
2.6	Automates à pile	104
2.6.1	Définitions et exemples	104
2.6.2	Différents modes d'acceptation	105
2.6.3	Équivalence avec les grammaires	108
2.6.4	Automates à pile déterministes	112
2.7	Compléments	115
2.7.1	Réécriture	115
2.7.2	Contenus de pile	117
2.7.3	Groupe libre	119
II	Calculabilité et complexité	121
3	Calculabilité	123
3.1	Préliminaires	123
3.1.1	Graphes	123
3.1.2	Logique	125
3.2	Introduction	126
3.2.1	Notion de problème	127
3.2.2	Notion de codage	127
3.2.3	Machines de Turing	128
3.2.4	Graphe des configurations	133
3.2.5	Normalisation	134
3.2.6	Variantes	136
3.3	Langages récursivement énumérables	143

3.4	Langages décidables	145
3.5	Problème de correspondance de Post	150
3.5.1	Présentation	150
3.5.2	Indécidabilité	151
3.5.3	Application aux grammaires algébriques	153
3.6	Théorème de récursion	154
3.7	Machines linéairement bornées	157
3.7.1	Définition	157
3.7.2	Grammaires contextuelles	158
3.7.3	Décidabilité	160
3.7.4	Complémentation	160
3.8	Décidabilité de théories logiques	164
3.9	Fonctions récursives	166
3.9.1	Fonctions primitives récursives	167
3.9.2	Fonctions récursives	171
3.9.3	Équivalence avec les machines de Turing	171
3.9.4	Thèse de Church	172
3.10	Compléments	173
3.10.1	Écritures des entiers dans une base	173
3.10.2	Machines de Turing sans écriture sur l'entrée	175
4	Complexité	179
4.1	Introduction	179
4.1.1	Objectifs	179
4.1.2	Définition des complexités	179
4.2	Complexité en temps	180
4.2.1	Théorème d'accélération	181
4.2.2	Changements de modèles	181
4.2.3	Classes de complexité en temps	182
4.2.4	NP-complétude	187
4.2.5	NP-complétude de SAT et 3SAT	189
4.2.6	Exemples de problèmes NP-complets	192
4.3	Complexité en espace	202
4.3.1	Changement de modèle	203
4.3.2	Classes de complexité en espace	205
4.3.3	Complexités en temps et en espace	206
4.3.4	Exemples de problèmes dans PSPACE	206
4.3.5	PSPACE-complétude	208
4.3.6	Espace logarithmique	209
4.3.7	NL-complétude	214
4.4	Théorèmes de hiérarchie	217
4.5	Machines alternantes	218
4.5.1	Définitions et exemples	218
4.5.2	Complémentation	220
4.5.3	Automates alternants	221
4.5.4	Classes de complexité	224
4.6	Compléments : machines à une bande en temps $o(n \log n)$	226
	Bibliographie	233
	Index	235