

Arezki KESSI et Abdelouahab MAHMOUDI

ELEMENTS D'ANALYSE MATHÉMATIQUE
SÉRIES et INTÉGRALES

Cours et Exercices corrigés

Les
Mathématiques
à
l'Université

-  *Intégrales impropres*
-  *Séries numériques réelles*
-  *Suites et séries de fonctions
d'une variable réelle*
-  *Séries entières*
-  *Séries de Fourier*
-  *Intégrales dépendant
d'un paramètre*

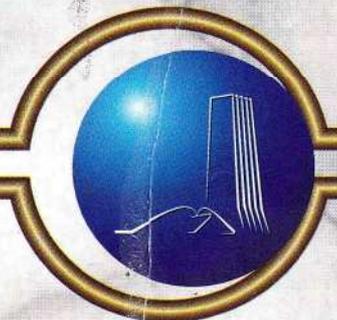


Table des matières

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Intégrales impropres | 1 |
| 1.1 | Notions générales | 1 |
| 1.2 | Formules d'intégration des intégrales impropres | 3 |
| 1.2.1 | Utilisation d'une primitive | 3 |
| 1.2.2 | Linéarité des intégrales impropres | 3 |
| 1.2.3 | Inégalité des intégrales | 4 |
| 1.2.4 | Intégration par parties | 4 |
| 1.2.5 | Changement de variable | 4 |
| 1.2.6 | Exemples de base | 5 |
| 1.3 | Convergence des intégrales impropres | 6 |
| 1.3.1 | Critère de Cauchy | 6 |
| 1.3.2 | Convergence absolue d'une intégrale impropre | 7 |
| 1.3.3 | Intégrales impropres des fonctions positives | 8 |
| 1.3.4 | Intégrales impropres semi-convergentes | 13 |
| 1.3.5 | Formules de la moyenne | 13 |
| 1.3.6 | Critère d'Abel-Dirichlet pour les intégrales | 15 |
| 1.3.7 | Valeur principale d'une intégrale divergente | 16 |
| 1.4 | Exercices corrigés | 19 |
| 2 | Séries numériques réelles | 49 |
| 2.1 | Progression géométrique | 49 |
| 2.1.1 | Notions générales | 49 |
| 2.1.2 | Progression infinie | 50 |
| 2.1.3 | Transformations élémentaires des progressions | 51 |
| 2.2 | Notions générales sur les séries numériques | 52 |
| 2.3 | Séries à termes positifs | 56 |
| 2.3.1 | Critères de comparaison | 56 |
| 2.3.2 | Règle de D'Alembert et règle de Cauchy | 58 |
| 2.3.3 | Comparaison d'une série avec une intégrale | 60 |
| 2.3.4 | Comparaison avec les séries de Riemann | 61 |
| 2.4 | Séries à termes de signe quelconque | 61 |
| 2.4.1 | Séries absolument convergentes | 61 |
| 2.4.2 | Séries semi-convergentes | 64 |
| 2.4.3 | Critères de convergence pour les séries à termes de signe quelconque | 66 |
| 2.5 | Complément sur les séries numériques | 69 |
| 2.5.1 | Règle de Duhamel | 69 |
| 2.5.2 | Critère de Kummer | 70 |
| 2.5.3 | Critère de Raabe | 71 |
| 2.5.4 | Critère de Bertrand | 72 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 2.5.5 | Critère de Gauss | 73 |
| 2.6 | Exercices corrigés | 73 |
| 3 | Suites et séries de fonctions d'une variable réelle | 101 |
| 3.1 | Progression géométrique | 101 |
| 3.1.1 | Introduction | 101 |
| 3.1.2 | Intégration d'une progression géométrique | 102 |
| 3.1.3 | Dérivation d'une série géométrique | 103 |
| 3.2 | Convergence des suites et séries de fonctions | 103 |
| 3.2.1 | Convergence simple des suites et séries de fonctions | 103 |
| 3.2.2 | Convergence uniforme des suites de fonctions | 104 |
| 3.2.3 | Convergence uniforme des séries de fonctions | 107 |
| 3.2.4 | Propriétés des suites et séries de fonctions uniformément convergentes | 110 |
| 3.3 | Exercices corrigés | 115 |
| 4 | Séries entières | 129 |
| 4.1 | Généralités | 129 |
| 4.2 | Convergence uniforme des séries entières | 132 |
| 4.3 | Opérations sur les séries entières | 133 |
| 4.4 | Dérivation et intégration des séries entières | 134 |
| 4.5 | Développement d'une fonction en série entière | 135 |
| 4.5.1 | Unicité du développement d'une fonction en série entière | 135 |
| 4.5.2 | Conditions suffisantes | 136 |
| 4.5.3 | Développement en série entière de fonctions usuelles | 136 |
| 4.6 | Exercices corrigés | 138 |
| 5 | Séries de Fourier | 151 |
| 5.1 | Notions générales | 151 |
| 5.1.1 | Périodes d'une fonction périodique | 151 |
| 5.2 | Séries trigonométriques-Séries de Fourier | 153 |
| 5.2.1 | Propriétés du système trigonométrique; série de Fourier | 154 |
| 5.2.2 | Développement en séries de Fourier des fonctions paires et impaires . | 156 |
| 5.2.3 | Développement de fonctions en séries de Fourier sur $[-\pi, \pi]$ | 158 |
| 5.2.4 | Convergence des séries de Fourier | 158 |
| 5.2.5 | Approximation en moyenne quadratique - Egalité de Parseval | 162 |
| 5.3 | Exercices corrigés | 163 |
| 6 | Intégrales dépendant d'un paramètre | 175 |
| 6.1 | Intégrales propres dépendant d'un paramètre | 175 |
| 6.2 | Intégrales impropres dépendant d'un paramètre | 178 |
| 6.2.1 | Notion de convergence uniforme | 179 |
| 6.2.2 | Critères de convergence | 181 |
| 6.2.3 | Propriétés des intégrales uniformément convergentes | 183 |
| 6.3 | Fonctions eulériennes | 192 |
| 6.3.1 | Fonction Bêta | 192 |
| 6.3.2 | Fonction Gama | 194 |
| 6.4 | Exercices corrigés | 197 |
| | Bibliographie | 215 |