

CALCUL INTÉGRAL



LUC AMYOTTE

TABLE DES MATIÈRES

Avant-propos	VII
Guide visuel	XI

CHAPITRE 1

L'INTÉGRALE DÉFINIE	2
1.1 Problèmes à l'origine du calcul différentiel et intégral	6
Un peu d'histoire	7
1.2 Notation sigma	7
Des mots et des symboles	8
1.3 Propriétés de la notation sigma	9
Un peu d'histoire	15
Des mots et des symboles	16
1.4 Approximation à l'aide d'une somme	17
Un peu d'histoire	28
1.5 Somme de Riemann et intégrale définie	28
1.6 Propriétés des intégrales définies	32
1.7 Théorème fondamental du calcul intégral	35
Des mots et des symboles	38
1.8 Retour sur la notation de l'intégrale	39
1.9 Primitives élémentaires	40
1.10 Approche plus formelle du théorème fondamental à l'aide des théorèmes classiques de l'analyse mathématique	44
Résumé	49
Mots clés	50
Réseau de concepts	50
Exercices récapitulatifs	51

CHAPITRE 2

TECHNIQUES D'INTÉGRATION	56
2.1 Primitive et intégrale indéfinie	60
Des mots et des symboles	60
2.2 Formules d'intégration de base	61
2.3 Changement de variable et autres astuces	67
2.3.1 Intégration d'une fonction rationnelle impropre	67
2.3.2 Changement de variable dans une intégrale	68
2.3.3 Intégration de fonctions paires et de fonctions impaires	77
Des mots et des symboles	78
2.3.4 Complétion du carré	80

2.4	Intégration par parties	82
	Un peu d'histoire	87
2.5	Intégration de fonctions trigonométriques	88
2.5.1	Intégrales du type $\int \cos mx \cos nx \, dx$, $\int \sin mx \sin nx \, dx$ ou $\int \sin mx \cos nx \, dx$	90
2.5.2	Intégrales du type $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$	90
2.5.3	Intégrales comportant des sécantes, des cosécantes, des tangentes ou des cotangentes	93
2.5.4	Combinaison de stratégies	95
2.6	Intégration par substitution trigonométrique	95
2.7	Intégration d'expressions comportant des fonctions quadratiques	102
2.8	Intégration d'une fonction rationnelle par décomposition en fractions partielles	103
2.9	Intégration numérique	113
2.9.1	Méthode des trapèzes	113
2.9.2	Erreur maximale d'approximation avec la méthode des trapèzes	115
	Résumé	116
	Mots clés	118
	Réseau de concepts	118
	Exercices récapitulatifs	119
	Examen blanc	126

CHAPITRE 3

APPLICATIONS DE L'INTÉGRALE DÉFINIE		128
3.1	Calcul de l'aire d'une surface plane	133
3.1.1	Aire de la surface comprise entre deux courbes	133
	Un peu d'histoire	142
3.1.2	Surplus des consommateurs et surplus des producteurs	142
3.1.3	Courbe de Lorenz et indice de Gini	145
3.2	Calcul de la valeur moyenne d'une fonction	147
3.3	Calcul du volume d'un solide	149
3.3.1	Méthode des tranches	150
3.3.2	Méthode des disques	155
3.3.3	Méthode des disques troués	159
3.3.4	Méthode des tubes (ou méthode des coquilles cylindriques)	163
3.4	Calcul de la longueur d'un arc d'une courbe plane	167
3.5	Calcul de l'aire d'une surface de révolution	171
Résumé		176
Mots clés		177
Réseau de concepts		177
Exercices récapitulatifs		178

CHAPITRE 4

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES	190
4.1 Importance des équations différentielles	194
4.2 Typologie des équations différentielles.....	196

4.3	Solution d'une équation différentielle	198
4.4	Équations différentielles à variables séparables	199
4.4.1	Méthode de résolution d'une équation différentielle à variables séparables	200
4.4.2	Applications des équations différentielles à variables séparables	200
4.4.3	Équations différentielles à variables séparables et analyse marginale	204
4.5	Équations différentielles d'ordre supérieur à 1 de la forme $y^{(n)} = f(x)$	205
	Résumé	210
	Mots clés	210
	Réseau de concepts	211
	Exercices récapitulatifs	211
	Examen blanc	220

CHAPITRE 5

RÈGLE DE L'HOSPITAL ET INTÉGRALES IMPROPRES .. 222

5.1	Formes indéterminées du type $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$	226
	Un peu d'histoire	234
5.2	Formes indéterminées du type $0 \cdot \infty$ ou $\infty - \infty$	234
5.3	Formes indéterminées du type 0^0 , ∞^0 ou 1^∞	237
5.4	Intégrales impropres	241
5.5	Intégrales impropres avec au moins une borne d'intégration infinie	242
	Un peu d'histoire	247
5.6	Intégrales impropres en probabilité	248
5.7	Intégrales impropres en mathématiques financières	251
5.8	Intégrales impropres dont l'intégrande prend une valeur infinie en un point de l'intervalle $[a, b]$	252
	Résumé	254
	Mots clés	256
	Réseau de concepts	256
	Exercices récapitulatifs	257

CHAPITRE 6

SUITES ET SÉRIES .. 262

6.1	Approximations polynomiales	266
6.2	Suites de nombres réels	268
	Un peu d'histoire	272
6.3	Typologie des suites	273
6.4	Terminologie de base des séries	281
6.5	Théorèmes de base sur les séries	285
6.6	Quelques séries importantes	286
6.6.1	Série arithmétique	287
6.6.2	Série géométrique	287
	Un peu d'histoire	289
6.6.3	Série harmonique	290
6.6.4	Série de Riemann	291

6.7 Critères de convergence de séries à termes positifs	294
6.8 Convergence absolue et convergence conditionnelle	303
6.9 Séries entières	307
6.10 Séries de Taylor et de Maclaurin	312
Résumé	318
Mots clés	321
Réseau de concepts	322
Exercices récapitulatifs	323
Examen blanc	327
Réponses des exercices récapitulatifs	329
Glossaire	427
Bibliographie	439
Sources des images	443
Index	445