

SCIENCES SUP

*Cours, exercices et problèmes corrigés*

Licence 3<sup>e</sup> année • Écoles d'ingénieurs • Agrégation interne

# CALCUL DES PROBABILITÉS

2<sup>e</sup> édition

*Dominique Foata  
Aimé Fuchs*

DUNOD

## TABLE DES MATIÈRES

Préface .....	ix
Préface de la première édition .....	x
Liste des symboles utilisés .....	xiii
<b>CHAPITRE PREMIER. Le langage des probabilités</b> .....	<b>1</b>
Un exemple. Le triplet fondamental. Suites infinies d'évènements. Compléments et exercices.	
<b>CHAPITRE 2. Les évènements</b> .....	<b>7</b>
Les algèbres. Les tribus. Les systèmes de Dynkin. Les classes monotones. Compléments et exercices.	
<b>CHAPITRE 3. Espaces probabilisés</b> .....	<b>15</b>
Probabilités. Propriétés. Formule de Poincaré et inégalité de Boole. Autres propriétés. Identités binomiales. Compléments et exercices.	
<b>CHAPITRE 4. Probabilités discrètes. Dénombrements</b> .....	<b>25</b>
Probabilités discrètes. Équirépartition sur les espaces finis. Ensem- bles finis. Formules classiques de dénombrement. Le principe de réflexion. Compléments et exercices (problème des rencontres, le chevalier de Méré, boules et urnes).	
<b>CHAPITRE 5. Variables aléatoires</b> .....	<b>43</b>
Application réciproque. Fonctions mesurables. Variables aléa- toires. Loi de probabilité d'une variable aléatoire. Fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle. La fonction de masse et les discontinuités de la fonction de répartition. Tribu engendrée par une variable aléatoire. Compléments et exercices.	
<b>CHAPITRE 6. Probabilités conditionnelles. Indépendance</b> .....	<b>53</b>
Probabilité conditionnelle. Systèmes complets d'évènements. Pro- babilités définies par des probabilités conditionnelles. Évènements indépendants. Indépendance de classes d'évènements. Variables aléatoires indépendantes. Compléments et exercices (tirages avec et sans remise).	
<b>CHAPITRE 7. Variables aléatoires discrètes. Lois usuelles</b> .....	<b>67</b>
Variables aléatoires discrètes. La loi binomiale. La loi hyper- géométrique. La loi géométrique. La loi de Poisson. Complé- ments et exercices (problème des boîtes d'allumettes de Banach, poissonisation, le paradoxe de l'inspection).	

<b>CHAPITRE 8. Espérance mathématique. Valeurs typiques</b> .....	79
Transformation de variables aléatoires. Indépendance. Convolution des lois de probabilité discrètes. Espérance mathématique. Moments. Covariance. Le coefficient de corrélation linéaire. L'inégalité de Tchebychev. Les inégalités relatives aux moments dans le cas fini. Médiane, écart moyen minimum. Compléments et exercices.	
<b>CHAPITRE 9. Fonctions génératrices</b> .....	99
Définitions. Propriétés. Sommes de variables aléatoires. Le théorème de continuité. Compléments et exercices.	
<b>CHAPITRE 10. Mesures de Stieltjes-Lebesgue. Intégrale des variables aléatoires réelles</b> .....	113
Mesures. Mesures de Stieltjes-Lebesgue sur la droite. Mesure de probabilité induite par une fonction de répartition. Mesures de Stieltjes-Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ . Variables aléatoires réelles. Intégrale d'une variable aléatoire réelle par rapport à une mesure. Exemples. Propriétés de l'intégrale. Théorèmes de convergence. Compléments et exercices (comment probabiliser l'ensemble des suites infinies du jeu de « pile » ou « face »).	
<b>CHAPITRE 11. Espérance mathématique. Lois absolument continues</b> .....	129
Espérance mathématique d'une variable aléatoire. Mesures de probabilité produit et théorème de Fubini. Intégrale de Lebesgue. Lois de probabilité absolument continues. Les trois types de fonctions de répartition. Convolution. Compléments et exercices.	
<b>CHAPITRE 12. Variables aléatoires à deux dimensions ; espérance conditionnelle. Lois normales</b> .....	141
Définitions et premières propriétés. Loi de probabilité absolument continue, densité de probabilité. Loi de probabilité conditionnelle, espérance mathématique conditionnelle, régression. Règles de calcul concernant les espérances conditionnelles. La loi normale à deux dimensions. Compléments et exercices.	
<b>CHAPITRE 13. Fonction génératrice des moments ; fonction caractéristique</b> .....	159
Introduction. Propriétés élémentaires. Moments. Fonction caractéristique. Seconde fonction caractéristique. Fonction génératrice d'un vecteur aléatoire. Propriété fondamentale. Compléments et exercices.	

CHAPITRE 14. Les principales lois de probabilité (absolument continues) .....	177
La loi uniforme sur $[0, 1]$ . La loi uniforme sur $[a, b]$ . La loi normale ou de Laplace-Gauss. La loi Log-normale. La loi exponentielle. La première loi de Laplace. La loi de Cauchy. La loi gamma. La loi bêta. Les lois arcsinus. Compléments et exercices.	
CHAPITRE 15. Lois de probabilité de fonctions de variables aléatoires .....	195
Cas à une dimension. Cas à deux dimensions. Loi de probabilité d'une fonction de deux variables aléatoires. Compléments et exercices.	
CHAPITRE 16. Convergences stochastiques .....	205
Convergence en loi ou convergence étroite. Convergence en probabilité. Convergence en moyenne d'ordre $r > 0$ . Convergence presque sûre. Comparaison des divers types de convergence. Convergence en loi de variables aléatoires à valeurs entières et absolument continues. Convergence étroite et convergence presque sûre. La convergence en loi d'un point de vue fonctionnel. Le théorème de Paul Lévy. Compléments et exercices.	
CHAPITRE 17. Loi des grands nombres .....	225
La loi faible des grands nombres. La loi forte des grands nombres. Les lemmes de Borel-Cantelli. Compléments et exercices.	
CHAPITRE 18. Le rôle central de la loi normale ; le théorème «central limit» .....	237
Aperçu historique. Le théorème «central limit». Le théorème «central limit» et la formule de Stirling. Le théorème de Lindeberg. Le théorème de Liapounov. Compléments et exercices.	
CHAPITRE 19. La loi du logarithme itéré .....	251
Notations et lemmes préliminaires. Loi forte des grands nombres et théorème de Hardy-Littlewood. La loi du logarithme itéré.	
CHAPITRE 20. Applications des probabilités : problèmes résolus .....	259
Le problème des rencontres revisité. Un problème de temps d'attente. Acheminement du courrier par voie hiérarchique. Fractions continues. Une application de la formule de Bernstein. Le modèle de la diffusion d'Ehrenfest. Vecteurs uniformément répartis sur la sphère-unité de $\mathbb{R}^n$ . Un problème de probabilité géométrique.	
Solutions des exercices .....	281
Index .....	325