

COLLECTION GEA

**analyse mathématique
et calcul numérique
pour les sciences
et les techniques**

tome 3

**Robert DAUTRAY
Jacques-Louis LIONS**



SERIE SCIENTIFIQUE

MASSON 

TABLE DES MATIÈRES DU TOME 3

<i>CHAPITRE XIV. — PROBLÈMES D'ÉVOLUTION : PROBLÈMES DE CAUCHY DANS \mathbb{R}^n</i>	1
Introduction	2
§ 1. Problème de Cauchy ordinaire en dimension finie	5
1. Systèmes linéaires à coefficients constants	5
2. Systèmes linéaires à coefficients non constants	8
§ 2. Équations du type de la diffusion	11
1. Position du problème	11
2. Méthode de la transformation de Fourier	12
3. Solution élémentaire de l'équation de la chaleur	18
4. Propriétés mathématiques de la solution élémentaire et semi-groupe attaché à l'opérateur de la chaleur	20
§ 3. Équations du type des ondes	26
1. Problème modèle : Équations des ondes dans \mathbb{R}^n	26
2. Équation d'Euler-Poisson-Darboux	52
3. Une application des § 2 et 3 : viscoélasticité	55
§ 4. Problème de Cauchy pour l'équation de Schrödinger, introduction	63
1. Problème modèle 1. Cas d'un potentiel nul	63
2. Problème modèle 2. Cas de l'oscillateur harmonique	67
§ 5. Problème de Cauchy pour les équations d'évolution liées au produit de convolution	70
1. Position du problème	70
2. Méthode de la transformation de Fourier	71
3. Équation de Dirac pour une particule libre	75
§ 6. Un problème de Cauchy abstrait. Le théorème d'Ovsjannikov	79
Bilan du chapitre XIV	85
Bibliographie du chapitre XIV	86

CHAPITRE XV. — PROBLÈMES D'ÉVOLUTION: MÉTHODE DE DIAGONALISATION	89
Introduction	90
§ 1. Méthode de Fourier ou de diagonalisation	93
1. Cas de l'espace $\mathbb{R}^1 (n = 1)$	93
2. Cas de la dimension d'espace $n = 2$	115
3. Cas de la dimension n quelconque	121
Bilan	126
§ 2. Variantes. Méthode de diagonalisation avec un opérateur ayant un spectre continu	127
1. Rappel sur les opérateurs auto-adjoints dans les espaces de Hilbert	127
2. Formulation générale du problème	128
3. Exemple simple de problème avec spectre continu	131
§ 3. Exemples d'application: Équation de diffusion	136
1. Exemple d'application 1: Équation de diffusion monocinétique des neutrons	136
2. Exemple d'application 2: Équation de l'âge dans les problèmes de ralentissement en neutronique	142
3. Exemple d'application 3: Transmission de la chaleur	146
§ 4. Équation d'ondes: Exemples mathématiques et exemples d'applications ..	151
1. Le cas de la dimension $n = 1$	151
2. Cas de la dimension n quelconque	169
3. Exemples d'application pour $n = 1$	171
4. Exemples d'applications pour $n = 2$. Membranes vibrantes	183
5. Application à l'élasticité; dynamique des poutres minces homogènes	185
§ 5. Équation de Schrödinger	197
1. Problème de Cauchy pour l'équation de Schrödinger dans un domaine $\Omega =]0, 1[\subset \mathbb{R}$	197
2. Oscillateur harmonique	205
Bilan	213
§ 6. Application avec un opérateur possédant un spectre continu: Exemple ...	214
Bilan du chapitre XV	216
Appendice. Retour au problème des cordes vibrantes	217
Bibliographie du chapitre XV	231

CHAPITRE XVI. — PROBLÈMES D'ÉVOLUTION : MÉTHODE DE LA TRANSFORMATION DE LAPLACE	233
Introduction	234
§ 1. Transformation de Laplace des distributions	237
1. Étude de l'ensemble I_f et définition de la transformation de Laplace ...	237
2. Propriétés de la transformation de Laplace	244
3. Caractérisation des transformées de Laplace des distributions de $L_+(\mathbb{R})$.	248
§ 2. Transformation de Laplace des distributions vectorielles	255
1. Distributions à valeurs vectorielles	255
2. Transformations de Fourier et de Laplace des distributions vectorielles .	260
§ 3. Applications aux problèmes d'évolution du premier ordre	265
1. Solutions « distributions vectorielles » d'une équation d'évolution du premier ordre en t	265
2. Méthode de transposition	272
3. Application aux équations d'évolution du premier ordre. Le cas hilbertien. Solution L^2	275
4. Cas où A est défini par une forme sesquilinéaire $a(u, v)$	286
§ 4. Problèmes d'évolution du deuxième ordre en t	295
1. Méthode directe	295
2. Utilisation du calcul symbolique	301
Bilan	305
§ 5. Applications	306
1. Problèmes relatifs à l'hydrodynamique	306
2. Problème de cinétique de la diffusion des neutrons	309
3. Problèmes de diffusion d'une onde électromagnétique	311
4. Problèmes de propagation d'ondes	318
5. Problème de viscoélasticité	326
6. Problème relatif à l'équation de Schrödinger	337
7. Problème relatif à la causalité, l'analyticité et les relations de dispersion.	340
8. Remarque 10	343
Bilan du chapitre XVI	343
Bibliographie du chapitre XVI	344
CHAPITRE XVII. — PROBLÈMES D'ÉVOLUTION : MÉTHODE DES SEMI-GROUPES	345
Introduction	346

<i>PARTIE A. — ÉTUDE DES SEMI-GROUPES</i>	351
§ 1. Définitions et propriétés de semi-groupes agissant dans un espace de Banach.	351
1. Définition d'un semi-groupe de classe \mathcal{C}^0 , (resp. d'un groupe)	351
2. Premières propriétés des semi-groupes de classe \mathcal{C}^0	359
§ 2. Générateur infinitésimal d'un semi-groupe	363
1. Exemples	363
2. Le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de classe \mathcal{C}^0	368
§ 3. Le théorème de Hille-Yosida	377
1. Une condition nécessaire	377
2. Le théorème de Hille-Yosida	379
3. Exemples d'application du théorème de Hille-Yosida	385
§ 4. Le cas des groupes de classe \mathcal{C}^0 et le théorème de Stone	417
1. Caractérisation du générateur infinitésimal d'un groupe de classe \mathcal{C}^0 ...	417
2. Groupes unitaires de classe \mathcal{C}^0 . Le théorème de Stone	421
3. Applications du théorème de Stone	422
4. Opérateurs conservatifs et semi-groupes d'isométrie dans un espace de Hilbert	428
Bilan	431
§ 5. Semi-groupes différentiables	432
§ 6. Semi-groupes holomorphes	436
§ 7. Semi-groupes compacts	460
1. Définition et premières propriétés	460
2. Caractérisation des semi-groupes compacts	461
3. Exemples de semi-groupes compacts	468
 <i>PARTIE B. — PROBLÈMES DE CAUCHY ET SEMI-GROUPES</i>	 473
§ 1. Problèmes de Cauchy	473
§ 2. Comportement asymptotique des solutions pour $t \rightarrow +\infty$. Conservation et dissipation dans les équations d'évolution	485
§ 3. Semi-groupes et problèmes de diffusion	493
§ 4. Groupes et équations d'évolution	502
1. Problèmes du type des ondes	502
2. Problèmes du type de Schrödinger	506
3. Comportement asymptotique faible, pour $t \rightarrow \pm\infty$, des solutions des problèmes du type des ondes ou de Schrödinger	508
4. Problème de Cauchy relatif aux équations de Maxwell dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^3$	517

§ 5. Évolution d'opérateurs en physique quantique. Équation de Liouville-von Neumann	524
1. Existence, unicité de la solution du problème de Cauchy pour l'équation de Liouville-von Neumann dans l'espace des opérateurs à trace	524
2. Équation d'évolution des observables (bornées) dans la représentation de Heisenberg	532
3. Spectre et résolvante de l'opérateur h	538
§ 6. Le théorème d'approximation de Trotter	541
1. Convergence de semi-groupes	541
2. Théorème général de représentation	549
Bilan du chapitre XVII	557
Bibliographie du chapitre XVII	558
CHAPITRE XVIII. — PROBLÈMES D'ÉVOLUTION : MÉTHODES VARIATIONNELLES	561
Introduction. Orientation	562
§ 1. Quelques éléments d'analyse fonctionnelle	565
1. Retour sur les distributions vectorielles	565
2. L'espace $W(a, b, V, V')$	569
3. Espaces $W(a, b, X, Y)$	577
4. Extension au cadre Banach	581
5. Un théorème de dérivées intermédiaires	595
6. Bidual. Réflexivité. Convergence faible et convergence faible *	601
§ 2. Approximation de Galerkin d'un espace de Hilbert	608
1. Définition	608
2. Exemples	608
3. Schéma d'une méthode de Galerkin	612
§ 3. Problèmes d'évolution du premier ordre en t	615
1. Formulation du problème (P)	615
2. Unicité de la solution du problème (P)	619
3. Existence d'une solution du problème (P)	620
4. Continuité par rapport aux données	628
5. Annexe : Diverses extensions. Relèvements	629
§ 4. Problèmes du premier ordre en t (exemples)	632
1. Exemple mathématique 1. Conditions aux limites de Dirichlet	632
2. Exemple mathématique 2. Conditions aux limites de Neumann	633
3. Exemple mathématique 3. Conditions aux limites mêlées, Dirichlet-Neumann.	636
4. Exemple mathématique 4. Forme bilinéaire dépendant du temps t	637

5. Évolution, positivité et « maximum » des solutions des équations de diffusion dans $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$	643
6. Exemple mathématique 5. Un problème de dérivées obliques	649
7. Exemple d'application. Équation de la diffusion de la neutronique	653
8. Un résultat de stabilité	659
§ 5. Problèmes d'évolution du second ordre en t	664
1. Formulation générale du problème (P_1)	664
2. Unicité dans le problème (P_1)	670
3. Existence d'une solution du problème (P_1)	674
4. Continuité par rapport aux données	680
5. Formulation du problème (P_2)	684
§ 6. Problèmes du second ordre en t. Exemples	698
1. Exemple mathématique 1	698
2. Exemple mathématique 2	699
3. Exemple mathématique 3	699
4. Exemple mathématique 4	703
5. Exemples d'application	706
§ 7. Autres types d'équations	741
1. Équations du type de Schrödinger	741
2. Équations d'évolution à retard	765
3. Quelques équations intégral-différentielles	774
4. Contrôle optimal et problèmes où les inconnues sont des opérateurs	786
5. Problème de transmission couplé parabolique-hyperbolique	795
6. Méthode « du prolongement par rapport à un paramètre »	801
Bilan du chapitre XVIII	805
Bibliographie du chapitre XVIII	806
CHAPITRE XIX. — ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES LINÉARISÉES.	809
Introduction	810
§ 1. Les équations de Navier-Stokes stationnaires : le cas linéaire	811
1. Espaces fonctionnels	811
2. Théorème d'existence et d'unicité	823
3. Le problème de la régularité L^∞	832
§ 2. Les équations de Navier-Stokes d'évolution : le cas linéaire	836
1. Espaces fonctionnels et théorèmes de trace	836
2. Théorème d'existence et d'unicité	840
3. Résultat de régularité L^2	845
§ 3. Compléments et bilan	850
1. L'approche variationnelle	850
2. L'approche fonctionnelle	850

3. Le problème de la régularité L^α pour les équations de Navier-Stokes d'évolution : Le cas linéarisé	852
Bibliographie du chapitre XIX	853
CHAPITRE XX. — MÉTHODES NUMÉRIQUES POUR LES PROBLÈMES D'ÉVOLUTION	855
§ 1. Généralités	857
1. Discrétisation en espace et en temps	857
2. Convergence, consistance et stabilité	858
3. Théorème d'équivalence	860
4. Commentaires	863
5. Schémas à coefficients et pas constants	863
6. Symbole du schéma aux différences	865
7. Condition de stabilité de Von Neumann	866
8. Condition de stabilité de Kreiss	867
9. Cas des schémas à plusieurs niveaux	868
10. Caractérisation d'un schéma d'ordre q	869
§ 2. Problèmes du premier ordre en temps	870
1. Introduction	870
2. Équation modèle $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ pour $x \in \mathbb{R}$	871
3. Équation $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ avec conditions aux limites	881
4. Équation à coefficients variables et schémas à pas variables	884
5. Équation de la chaleur à deux dimensions d'espace	887
6. Méthodes de directions alternées et de pas fractionnaires	891
7. Schémas d'approximation interne	894
8. Intégration des systèmes d'équations différentielles raides	897
9. Commentaires	906
§ 3. Problèmes du second ordre en temps	907
1. Introduction	907
2. Équation modèle $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ pour $x \in \mathbb{R}$	908
3. Équation des ondes à 2 dimensions d'espace	916
4. Schémas d'approximation interne	918
5. Schéma de Newmark	921
6. Équation des ondes avec viscosité	925
7. Équation des ondes couplée à une équation de la chaleur	927
8. Commentaires	931

§ 4. Équation d'advection	932
1. Introduction	932
2. Quelques schémas explicites pour le problème de Cauchy à une dimension d'espace	933
3. Schémas de type positif et schémas stables dans $L^\infty(\mathbb{R})$	943
4. Quelques schémas implicites	947
5. Le problème avec conditions aux limites	950
6. Erreur de phase et erreur d'amplitude. Schémas d'ordre supérieur à deux.	954
7. Schémas non linéaires pour l'équation $\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0$	960
8. Schémas aux différences pour le problème de Cauchy à plusieurs variables d'espace	963
 § 5. Systèmes symétriques de Friedrichs	 968
1. Introduction	968
2. Rappel sur les systèmes symétriques de Friedrichs	968
3. Schémas aux différences finies pour le problème de Cauchy	972
4. Approximation des conditions aux limites dans le cas $\Omega = [0, 1]$	975
5. Équations de Maxwell	977
6. Commentaires	981
 § 6. Équation du transport	 982
1. Introduction	982
2. Équation stationnaire en géométrie monodimensionnelle plane	985
3. Équation d'évolution en géométrie monodimensionnelle plane	989
4. Équation en géométrie monodimensionnelle sphérique	992
5. Résolution itérative des schémas approchant l'équation du transport	997
6. Équation bidimensionnelle	1002
7. Autres méthodes	1007
8. Commentaires	1016
 § 7. Résolution numérique du problème de Stokes	 1018
1. Position du problème	1018
2. Une méthode intégrale	1025
3. Quelques méthodes aux différences finies	1030
4. Méthodes d'éléments finis	1036
5. Quelques méthodes en fonction de courant	1050
6. Le problème de Stokes d'évolution	1056
 Bibliographie du Chapitre XX	 1066
 CHAPITRE XXI. — TRANSPORT	 1073
 § 1. Introduction. Présentation des problèmes physiques	 1075
1. Problèmes d'évolution du transport des neutrons	1075
2. Problèmes stationnaires	1079
3. Principales notations	1080

§ 2. Existence et unicité des solutions de l'équation de transport	1081
1. Introduction.....	1081
2. Étude de l'opérateur d'advection $A = -v \cdot \nabla$	1084
3. Résolution du problème de Cauchy du transport.....	1091
4. Résolution du problème stationnaire du transport dans le cas dit sous critique.....	1104
Bilan	1112
Appendice du § 2. — Les conditions aux limites dans les problèmes du transport. Conditions de réflexion.....	1113
§ 3. Théorie spectrale et comportement asymptotique des solutions du problème d'évolution	1127
1. Introduction.....	1127
2. Étude du spectre de l'opérateur $B = -v \cdot \nabla - \Sigma$	1130
3. Étude du spectre de l'opérateur de transport dans un ouvert borné X de \mathbb{R}^n	1136
4. Propriétés de positivité.....	1149
5. Cas particulier où toutes les valeurs propres sont réelles.....	1159
6. Spectre de l'opérateur de transport dans une bande. Théorème de Lehner et Wing.....	1164
7. Étude du spectre de l'opérateur de transport dans l'espace entier : $X = \mathbb{R}^n$	1169
8. Spectre de l'opérateur de transport à l'extérieur d'un « obstacle ».....	1183
9. Quelques remarques sur le spectre de T	1186
Bilan	1196
Appendice du § 3. — Problème de Milne conservatif	1196
1. Introduction.....	1196
2. Existence d'une solution bornée.....	1200
3. Unicité de la solution bornée (cas où $X = \mathbb{R}^+$).....	1201
4. Quelques propriétés supplémentaires concernant la solution du problème de Milne conservatif.....	1203
§ 4. Exemples explicites	1208
1. Le problème de transport stationnaire dans l'espace entier \mathbb{R}	1208
2. Le problème d'évolution du transport dans l'espace entier.....	1212
3. Le problème de transport stationnaire dans le demi-espace par la méthode de « l'invariant imbedding ».....	1215
4. Méthode des « fonctions propres généralisées de Case ». Application à la dimension critique dans le cas de la bande.....	1223
§ 5. Approximation de l'équation du transport des neutrons par une équation de la diffusion	1228
1. Introduction physique.....	1228
2. Approximation dans le cas d'un modèle monocinétique des équations d'évolution et des équations stationnaires du transport.....	1231
3. Généralisation de la section 2.....	1241
4. Calcul du correcteur pour le problème stationnaire et longueur d'extrapolation.....	1246

5. Convergence de la valeur propre principale de l'opérateur de transport .	1252
6. Calcul du correcteur pour la valeur propre principale de l'opérateur de transport	1256
7. Application à un problème de taille critique	1259
8. Exemple numérique dans le cas d'une bande	1262
Appendice. — 1. Preuve du Théorème 1	1265
2. Preuve du Lemme 4	1270
Bibliographie du chapitre XXI	1273
PERSPECTIVES	1277
ORIENTATIONS POUR LE LECTEUR	1279
LISTE DES ÉQUATIONS	1283
TABLE DES NOTATIONS	1285
INDEX	1299