

**APPLICATIONS MATHÉMATIQUES
AVEC MATLAB®**

Analyse et analyse numérique

rappel de cours et exercices corrigés

Luc Jolivet
Rabah Labbas

Table des matières

Avant-propos	11
PREMIÈRE PARTIE. ANALYSE	15
Chapitre 1. Suites réelles	17
1.1. Généralités sur les suites	17
1.1.1. Définitions	17
1.1.2. Exemple	18
1.2. Limite d'une suite	19
1.2.1. Approche intuitive	19
1.2.2. Cas de limite finie	19
1.2.3. Cas de limite infinie	22
1.3. Propriétés des limites de suites	22
1.3.1. Cas de limites finies	22
1.3.2. Cas de limites infinies	23
1.3.3. Calculs de limites avec <i>Matlab</i>	23
1.4. Suites monotones	24
1.5. Suites récurrentes	25
1.5.1. Définition	25
1.5.2. Etude complète d'un exemple modèle	25
1.6. Exercices	28
1.6.1. Limite d'une suite et majorations	28
1.6.2. Etude d'une suite récurrente (1)	28
1.6.3. Etude d'une suite récurrente (2)	29
1.7. Solutions	29
Chapitre 2. Fonctions numériques d'une variable réelle	37
2.1. Rappels généraux sur les fonctions	37
2.1.1. Majoration d'une fonction et extrema	37

2.1.2. Exemple	38
2.1.3. Périodicité, parité et imparité d'une fonction	39
2.1.4. Exemple	39
2.1.5. Fonctions monotones	40
2.1.6. Fonctions injectives, surjectives, bijectives	41
2.2. Limite d'une fonction	42
2.2.1. Définitions	42
2.2.2. Résultat fondamental	44
2.2.3. Exemple	44
2.3. Continuité	46
2.3.1. Définitions	46
2.3.2. Exemple	47
2.3.3. Résultats généraux sur la continuité	47
2.4. Dérivation	48
2.4.1. Définitions	48
2.4.2. Exemple	49
2.4.3. Interprétation géométrique	50
2.4.4. Propriétés générales	51
2.4.5. Dérivées successives	51
2.4.6. Conséquences de la dérivation	52
2.4.7. Etude d'une fonction avec <i>Matlab</i>	53
2.4.8. Retour à l'exemple modèle	55
2.5. Fonctions trigonométriques inverses	57
2.5.1. Rappel	57
2.5.2. Fonction arcsin	58
2.5.3. Fonction arccos	60
2.5.4. Fonction arctan	60
2.5.5. Exemple modèle	61
2.6. Comparaison de deux fonctions	67
2.6.1. Notion de voisinage	67
2.6.2. Notations dites de Landau	68
2.6.3. Exemples	68
2.7. Formules de Taylor et développements limités	69
2.7.1. Diverses formules de Taylor	69
2.7.2. Exemples de calculs de D.L.	72
2.7.3. Application des D.L.	73
2.8. Exercices	76
2.8.1. Bijection réciproque	76
2.8.2. Etude de fonction et construction de courbe	76
2.8.3. Etude d'une fonction périodique	77
2.8.4. Fonction trigonométrique inverse	77
2.8.5. D.L. et étude de limite (1)	78
2.8.6. D.L. et recherche d'asymptote	78

2.8.7. D.L. et étude de limite (2)	78
2.9. Solutions	79
Chapitre 3. Intégration	91
3.1. Intégrale de Riemann	91
3.1.1. Définitions	91
3.1.2. Exemple	95
3.1.3. Propriétés générales	96
3.2. Primitive d'une fonction	97
3.2.1. Cas d'une fonction continue	97
3.2.2. Cas d'une fonction intégrable quelconque	98
3.2.3. Notation	100
3.3. Calcul intégral	100
3.3.1. Calcul intégral avec <i>Matlab</i>	100
3.3.2. Changement de variable	101
3.3.3. Intégration par parties	103
3.4. Décomposition en éléments simples	104
3.4.1. Les fonctions polynômes	104
3.4.2. Fractions rationnelles	107
3.4.3. Exemples	108
3.5. Intégration de fractions rationnelles	112
3.6. Exercices	114
3.6.1. Calculs de primitives usuelles	114
3.6.2. Linéarisations d'expressions trigonométriques	114
3.6.3. Changement de variable (1)	115
3.6.4. Changement de variable (2)	115
3.6.5. Décomposition en éléments simples	115
3.7. Solutions	116
DEUXIÈME PARTIE. ANALYSE NUMÉRIQUE ÉLÉMENTAIRE	123
Chapitre 4. Arithmétique de l'ordinateur	125
4.1. Représentation des entiers	125
4.1.1. Généralités	125
4.1.2. Exemples	126
4.1.3. Fonctions prédéfinies de <i>Matlab</i>	127
4.2. Représentation des réels positifs en virgule fixe	127
4.2.1. Notations	127
4.2.2. Exemple en base 2	129
4.2.3. Exemple en base 8	129
4.2.4. Calculs avec <i>Matlab</i>	130
4.3. Représentation des réels en virgule flottante	130
4.3.1. Généralités	130

4.3.2. Exemple	131
4.4. Les réels en V.F.N à t chiffres	131
4.4.1. En base 10	132
4.4.2. En base 2	133
4.4.3. Les formats machine float et double	134
4.5. Opérations de base sur les nombres machine	136
4.5.1. Multiplication	136
4.5.2. Division	137
4.5.3. Addition	138
4.6. Exercices	140
4.6.1. Conversion d'un entier	140
4.6.2. Schéma de Horner	140
4.6.3. Conversion d'un nombre à virgule	141
4.6.4. Valeurs extrêmes au format double	141
4.7. Solutions	141
Chapitre 5. Gestion d'erreurs	145
5.1. Erreur absolue et erreur relative	146
5.1.1. Définition	146
5.1.2. Erreurs d'opérations	146
5.1.3. Estimation d'erreur par le théorème des accroissements finis	147
5.2. Erreurs d'affectation	148
5.2.1. Exemple	148
5.2.2. Résultat général	149
5.2.3. Cas des formats <i>float</i> et <i>double</i>	150
5.2.4. Erreurs d'affectation et opérations	150
5.3. Cumul d'erreurs d'affectation et d'opération	151
5.3.1. Cas d'une somme	151
5.3.2. Cas d'un produit	152
5.4. Erreurs d'absorption	154
5.4.1. Exemples	155
5.4.2. Conséquence pratique	156
5.5. Erreurs de cancellation	156
5.5.1. Présentation sur un exemple	156
5.5.2. Exemple traité avec <i>Matlab</i>	157
5.5.3. Remarque	158
5.6. Erreurs dues aux choix des formules algébriques	161
5.6.1. Exemple 1	161
5.6.2. Exemple 2	162
5.7. Erreurs dues aux perturbations des données	163
5.7.1. Un système d'équations linéaires	163
5.7.2. Un calcul de déterminant	164
5.8. Estimation probabiliste de l'erreur	166

5.9. Exercices	167
5.9.1. Erreur d'opérations	167
5.9.2. Erreurs d'absorption et de cancellation	167
5.9.3. Non associativité de l'addition machine	167
5.9.4. Choix de formules de calcul	168
5.9.5. Choix d'itérations de calculs	168
5.9.6. Sujet d'étude	169
5.10. Solutions	170
Chapitre 6. Approximation de racines d'équations	183
6.1. Méthode de la dichotomie	184
6.1.1. Hypothèses sur la fonction f	184
6.1.2. Algorithme de la méthode	184
6.1.3. Exemple	185
6.1.4. En conclusion	186
6.2. Méthode des approximations successives (ou du point fixe)	186
6.2.1. Hypothèses sur la fonction φ	187
6.2.2. Théorème du point fixe	187
6.2.3. Algorithme et estimation d'erreur	187
6.2.4. Exemple	190
6.2.5. Vitesse de convergence	191
6.3. Méthode de Newton (ou de la tangente)	192
6.3.1. Hypothèses et algorithme de Newton	192
6.3.2. Vitesse de convergence	194
6.3.3. Exemple	195
6.3.4. Choix de l'initialisation x_0	196
6.4. Plan pour la recherche d'une racine	200
6.4.1. Exemple	200
6.5. Exercices	207
6.5.1. Méthode de dichotomie, de Newton et du point fixe	207
6.5.2. Méthode de Newton pour une fonction affine	207
6.5.3. Valeur approchée de $\sqrt{2}$	207
6.5.4. Programmation de la méthode du point fixe	208
6.5.5. Programmation de la méthode de Newton	208
6.6. Solutions	209
Chapitre 7. Interpolation polynomiale	217
7.1. Le polynôme d'interpolation d'une fonction	217
7.1.1. Définitions	217
7.1.2. Théorème d'existence et d'unicité de P_n	218
7.1.3. Polynôme de Lagrange	219
7.1.4. Algorithme d'Aitken	221
7.1.5. Gestion d'erreur	223

7.2. Approche polynomiale de la dérivation	225
7.2.1. Approche classique	225
7.2.2. Approche polynomiale	226
7.2.3. Gestion d'erreur mathématique	227
7.2.4. Etude complète d'erreur	227
7.3. Exercices	232
7.3.1. Calcul d'un polynôme d'interpolation	232
7.3.2. Polynôme de Lagrange et programmation	232
7.3.3. Effet de Runge	233
7.3.4. Méthode d'Aitken et programmation	234
7.3.5. Complexité de calcul de polynôme d'interpolation	234
7.3.6. Formule barycentrique de Lagrange	235
7.3.7. Complexité de calcul par la méthode d'Aitken	236
7.4. Solutions	237

Chapitre 8. Intégration numérique 249

8.1. Description de la méthode	249
8.2. Méthode des rectangles	251
8.2.1. Formules simples	251
8.2.2. Formules composites	251
8.3. Méthode des trapèzes	252
8.3.1. Formule simple	252
8.3.2. Formule composite	252
8.4. Méthode de Simpson	253
8.4.1. Formule simple	253
8.4.2. Formule composite	254
8.5. Gestion d'erreur	254
8.5.1. Erreur dans la méthode des trapèzes	254
8.5.2. Erreur dans la méthode de Simpson	255
8.6. Exercices	256
8.6.1. Utilisations des méthodes des trapèzes et de Simpson	256
8.6.2. Programmation	256
8.6.3. Calculs approchés d'intégrales et gestion d'erreur	257
8.7. Solutions	257

Bibliographie 263

Index 265