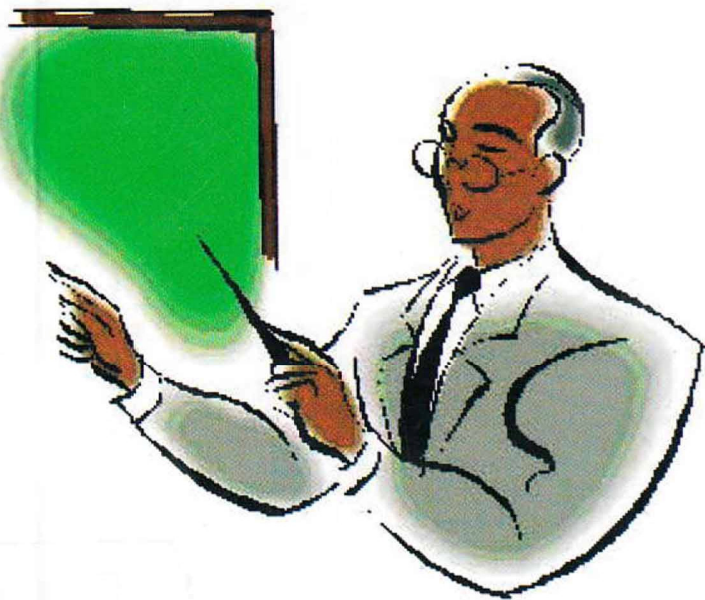


ALGÈBRE Tome I

Cours et exercices corrigés

Lotfi SAÏDANE



=

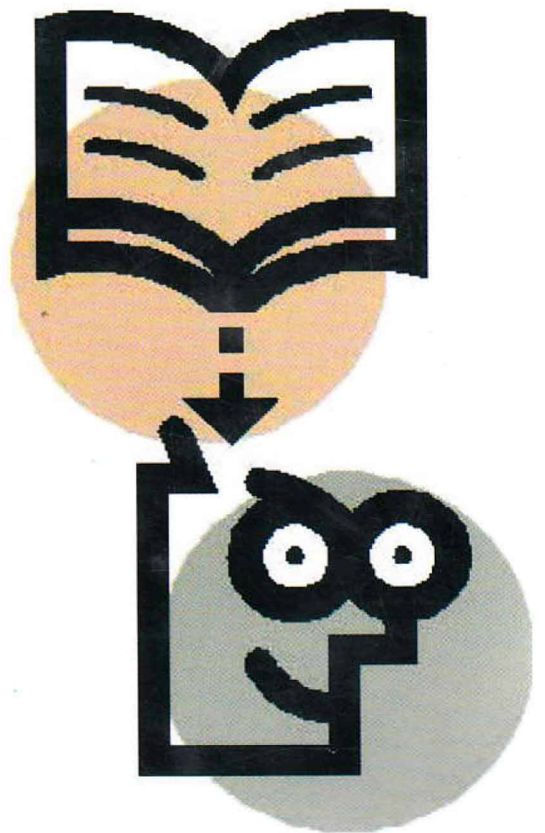


Table des matières

Preface	ix
I Cours	1
1 Ensembles	3
1.1 Notions de logique	3
1.1.1 Connecteurs logiques	3
1.1.2 Lois logiques	6
1.1.3 Principes du raisonnement	8
1.2 Ensembles	9
1.2.1 Vocabulaire	9
1.2.2 Sous-ensembles	11
1.2.3 Opérations élémentaires	12
1.2.4 Propriétés des opérations élémentaires . . .	16
1.3 Applications	17
1.3.1 Définitions	17
1.3.2 Image directe, image réciproque	20
1.3.3 Composition des applications	22
1.3.4 Famille d'éléments d'un ensemble	24
1.3.5 Application caractéristique	24
1.4 Injectivité, surjectivité, bijectivité	26
1.4.1 Application injective	26
1.4.2 Application surjective	28
1.4.3 Application bijective	29
1.5 Relation binaire	32
1.5.1 Relation d'équivalence	33

TABLE DES MATIÈRES

1.5.2	Relation d'ordre	37
1.5.3	Fonction croissante, décroissante	41
1.6	Ensembles finis, infinis	42
1.6.1	Ensembles finis	44
1.6.2	Ensembles infinis, dénombrables	48
1.7	Exercices	51
2	Structures algébriques	61
2.1	Loi de composition interne	61
2.1.1	Définitions	61
2.1.2	Propriétés d'une l.c.i	62
2.2	Groupes	71
2.2.1	Généralités	71
2.2.2	Sous-groupes	73
2.2.3	Morphismes de groupe	76
2.2.4	Classes suivant un sous-groupe	79
2.2.5	Groupe quotient	81
2.3	Le groupe symétrique	84
2.3.1	Définitions	84
2.3.2	Cycles et transpositions	86
2.3.3	Décomposition d'une permutation	88
2.3.4	Signature d'une permutation	94
2.4	Anneaux	98
2.4.1	Définitions	98
2.4.2	Sous-anneaux, idéaux	100
2.4.3	Anneaux intègres	101
2.4.4	Morphismes d'anneaux	102
2.4.5	Anneaux quotient d'un anneau	103
2.5	Corps	107
2.5.1	Sous-corps	108
2.5.2	Corps des fractions d'un anneau intègre . . .	109
2.5.3	Caractéristique d'un corps	110
2.5.4	Histoire du corps des quaternions	112
2.6	Exercices	113

TABLE DES MATIÈRES

3	Arithmétique dans $\mathbb{Z}$	125
3.1	Divisibilité	125
3.1.1	Généralités	125
3.1.2	Plus grand commun diviseur	128
3.1.3	Entiers premiers entre eux	131
3.1.4	Applications	134
3.1.5	Plus petit commun multiple	138
3.1.6	Nombres premiers	140
3.2	Exercices	143
4	Polynômes à une variable	149
4.1	Suites de $\mathbb{K}$ à support fini	149
4.1.1	Opérations dans $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$	150
4.2	L'anneau $\mathbb{K}[X]$	153
4.2.1	Opérations sur $\mathbb{K}[X]$	154
4.2.2	Degré et valuation	155
4.2.3	Evaluation des polynômes	159
4.2.4	Dérivation des polynômes	163
4.3	Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$	169
4.3.1	Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$	169
4.3.2	Division euclidienne	172
4.3.3	Plus grand commun diviseur	175
4.3.4	Polynômes premiers entre eux	179
4.3.5	Plus petit commun multiple	186
4.3.6	P_{gcd} et P_{pcm} de plusieurs polynômes	188
4.4	Factorisation des polynômes	191
4.4.1	Racines d'un polynôme	191
4.5	Polynômes de $\mathbb{R}[X]$ ou de $\mathbb{C}[X]$	195
4.5.1	Relations entre coefficients et racines	195
4.5.2	Factorisation des polynômes	199
4.6	Division suivant les puissances croissantes	201
4.7	Exercices	202
5	Fractions rationnelles	209
5.1	Le corps des fractions rationnelles	209
5.1.1	L'ensemble $\mathbb{K}(X)$	209
5.1.2	Addition, multiplication dans $\mathbb{K}(X)$	210

TABLE DES MATIÈRES

5.2	Définitions	211
5.2.1	Forme irréductible	211
5.2.2	Degré d'une fraction rationnelle	212
5.2.3	Zéros, pôles d'une fraction rationnelle	213
5.3	Décomposition en éléments simples	215
5.3.1	Étude théorique	215
5.3.2	Calcul pratique	220
Bibliographie et Index		231
 II Exercices corrigés		237
Énoncés des exercices		239
Corrigés des exercices		269