

APPLICATIONS MATHÉMATIQUES
AVEC MATLAB®

Algèbre linéaire et géométrie

rappel de cours et exercices corrigés

Luc Jolivet
Rabah Labbas

 **hermes**

Lavoisier

Table des matières

Avant-propos	13
PREMIÈRE PARTIE. PRÉSENTATION DE MATLAB	17
Chapitre 1. Calculs avec Matlab	19
1.1. Calculs numériques usuels	19
1.1.1. Exemple	19
1.1.2. Remarques	21
1.1.3. Connaître les fonctions utilisables	21
1.1.4. Calculs répétés sur tous les éléments d'un tableau	21
1.2. Graphiques	22
1.2.1. Représentation graphique d'une fonction	22
1.2.2. Autres représentations graphiques planes	23
1.3. Calcul symbolique avec <i>Symbolic Math Toolbox</i>	25
1.3.1. Simplification d'expression algébrique	25
1.3.2. Un exemple de calcul avec une variable	26
1.3.3. Utilisation de <i>syms</i>	27
1.3.4. Calculs trigonométriques	27
1.3.5. Résolution d'équations ou d'inéquations	28
1.3.6. Mises en garde	29
1.4. Itérations et étude de suites	30
1.5. Exercices	32
1.5.1. Format long, format short	32
1.5.2. Tableau d'évaluation	32
1.5.3. Graphe d'une fonction	32
1.5.4. Dessin d'un quadrilatère	33
1.5.5. Egalités symboliques	33
1.5.6. Itérés d'une suite	33
1.5.7. Suite de Fibonacci	34
1.6. Solutions	34

Chapitre 2. Programmation avec Matlab	41
2.1. Créer des sous-programmes	41
2.1.1. Mémoriser des instructions dans un fichier <i>script</i>	41
2.1.2. Représenter une fonction mathématique	42
2.1.3. Créer un sous-programme avec paramètres	44
2.2. Traitements conditionnels, expressions logiques	46
2.2.1. Exemple : étude d'une fonction définie par morceaux	47
2.2.2. Expressions logiques et quantificateurs	48
2.2.3. Exemple de fonction récursive	49
2.3. Les types de données utilisés par <i>Matlab</i>	50
2.3.1. Type numérique	51
2.3.2. Chaînes de caractères	51
2.3.3. Type symbolique	52
2.4. Quelques commandes importantes de <i>Matlab</i>	53
2.4.1. Sauvegardes	53
2.4.2. Gestion des variables	54
2.4.3. Gestion de l'affichage	54
2.5. Exercices	55
2.5.1. Division euclidienne	55
2.5.2. Suite pseudo-aléatoire	55
2.5.3. P.G.C.D de deux nombres	56
2.5.4. Calculs sur une chaîne de caractères	56
2.6. Solutions	56
 DEUXIÈME PARTIE. ALGÈBRE LINÉAIRE	 59
 Chapitre 3. Systèmes linéaires : méthode de Gauss	 61
3.1. Systèmes linéaires	61
3.1.1. Définition	61
3.1.2. L'ensemble des solutions	62
3.1.3. Systèmes remarquables	63
3.2. Opérations fondamentales sur les systèmes	64
3.3. Méthode de résolution de Gauss	65
3.3.1. Présentation sur un exemple	66
3.3.2. Systèmes de Cramer	68
3.4. Résolution avec <i>Matlab</i>	69
3.4.1. Utilisation de <i>solve</i>	69
3.4.2. Utilisation de <i>rref</i>	70
3.5. Exercices	71
3.5.1. Systèmes linéaires classiques	71
3.5.2. Un système linéaire avec paramètre	71
3.6. Solutions	72

Chapitre 4. Matrices	79
4.1. Généralités	79
4.1.1. Notations et vocabulaire	79
4.1.2. Cas particuliers	80
4.1.3. Définir des matrices avec <i>Matlab</i>	81
4.2. Opérations sur les matrices	83
4.2.1. Addition	83
4.2.2. Multiplication par les scalaires	85
4.2.3. Multiplication des matrices	85
4.2.4. Transposée d'une matrice	88
4.2.5. Calcul matriciel avec <i>Matlab</i>	89
4.3. Inversion de matrices carrées	90
4.3.1. Définition	90
4.3.2. Actions de Gauss sur les matrices carrées	92
4.3.3. Calcul explicite de l'inverse d'une matrice	93
4.4. Déterminant d'une matrice carrée	96
4.4.1. Cas d'une matrice de type (2, 2)	96
4.4.2. Cas d'une matrice de type (3, 3)	97
4.4.3. Cas d'une matrice quelconque	99
4.4.4. Déterminant de matrices particulières	100
4.4.5. Propriété fondamentale	101
4.5. Propriétés des déterminants	102
4.5.1. Développement suivant les colonnes ou les lignes	102
4.5.2. Quand un déterminant est-il nul ?	103
4.5.3. Actions de Gauss sur les déterminants	103
4.5.4. Déterminant d'un produit de matrices	104
4.6. Calculs de déterminants	105
4.6.1. Méthode de Gauss	105
4.6.2. Utilisation de la commande <i>det</i> de <i>Matlab</i>	107
4.7. Retour aux systèmes et formules de Cramer.	108
4.7.1. Ecriture matricielle des systèmes	108
4.7.2. Résolution par les déterminants	108
4.8. Exercices	110
4.8.1. Construction d'une matrice diagonale	110
4.8.2. Calculs avec trois matrices	110
4.8.3. Parts d'un marché	110
4.8.4. Calculs avec deux matrices	111
4.8.5. Méthode de Sylvester	112
4.8.6. Sur un système de Cramer	112
4.8.7. Un système de Vandermonde	113
4.9. Solutions	113

Chapitre 5. Espaces vectoriels	127
5.1. L'espace vectoriel \mathbb{R}^2	127
5.1.1. Opérations dans \mathbb{R}^2	127
5.1.2. Structure d'espace vectoriel	128
5.1.3. Conséquences	129
5.2. L'espace vectoriel \mathbb{R}^n	129
5.3. Cas général	130
5.3.1. Structure d'espace vectoriel	130
5.3.2. Exemples	131
5.3.3. Combinaisons linéaires	131
5.3.4. Notion de sous-espace vectoriel	132
5.3.5. Sous-espaces vectoriels engendrés	133
5.4. Bases d'un espace vectoriel	134
5.4.1. Famille génératrice	135
5.4.2. Famille libre	135
5.4.3. Base et dimension d'un espace vectoriel	137
5.4.4. Caractérisation d'une base	138
5.4.5. Matrice des coordonnées d'une famille de vecteurs	138
5.4.6. Rang d'une famille de vecteurs	140
5.5. Exercices	141
5.5.1. Un plan vectoriel de \mathbb{R}^3	141
5.5.2. Un système de 4 vecteurs de \mathbb{R}^4	142
5.5.3. Un s-e.v de \mathbb{R}^4	142
5.5.4. Un s-e.v de $M_4(\mathbb{R})$	143
5.5.5. Matrices magiques de type (3,3)	143
5.5.6. Sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[x]$	144
5.5.7. Calcul de rang dans \mathbb{R}^3	145
5.5.8. Calcul de rang dans \mathbb{R}^4	145
5.6. Solutions	145
Chapitre 6. Applications linéaires	163
6.1. Définitions et exemples	163
6.1.1. Exemples introductifs	163
6.1.2. Définitions	165
6.1.3. Exemples	165
6.2. Propriétés fondamentales	168
6.2.1. Premières conséquences	168
6.2.2. Noyau et image d'une application linéaire	169
6.3. Applications linéaires en dimension finie	171
6.3.1. Détermination par l'image d'une base	171
6.3.2. Matrice d'une application linéaire	172
6.4. Applications linéaires et matrices diagonales	174

6.4.1. Le problème posé	174
6.4.2. Exemple de diagonalisation	176
6.4.3. Utilisation de la matrice diagonale D	179
6.4.4. Les fonctions prédéfinies de Matlab	181
6.5. Exercices	182
6.5.1. Noyau et image d'une application linéaire	182
6.5.2. Une application linéaire avec paramètre	183
6.6. Solutions	183
TROISIÈME PARTIE. GÉOMÉTRIE	189
Chapitre 7. Calcul vectoriel et géométrie	191
7.1. Rappels : vecteurs géométriques du plan ou de l'espace	191
7.1.1. Vecteur associé à un couple de points	191
7.1.2. Opérations sur les vecteurs géométriques	193
7.1.3. Vecteurs colinéaires, vecteurs coplanaires	194
7.2. Calculs avec les coordonnées cartésiennes dans le plan	195
7.2.1. Bases et coordonnées d'un vecteur	195
7.2.2. Repères et coordonnées d'un point	196
7.2.3. Exemples d'utilisation	196
7.2.4. Equations d'une droite du plan	198
7.3. Coordonnées cartésiennes dans l'espace	200
7.3.1. Bases et repères de l'espace	200
7.3.2. Calculs avec les coordonnées	201
7.3.3. Exemples d'utilisation	202
7.3.4. Equations de droites et de plans dans l'espace	204
7.3.5. Autres représentations paramétriques dans l'espace	209
7.4. Changements de base et changements de repère	211
7.4.1. Changement de base dans l'espace	211
7.4.2. Changement de repère dans l'espace	213
7.4.3. Changements de base et de repère dans le plan	214
7.5. Exercices	215
7.5.1. Une suite de parallélogrammes	215
7.5.2. Solutions entières d'une équation linéaire	216
7.5.3. Etude d'un parallépipède	216
7.5.4. Intersection de deux plans	216
7.5.5. Etude d'une symétrie vectorielle	217
7.5.6. Changement de repère	218
7.5.7. Parabole dans un nouveau repère	218
7.6. Solutions	219
Chapitre 8. Produit scalaire et produit vectoriel	231
8.1. Bases orthonormées dans le plan et l'espace	231

8.1.1. Vecteurs orthogonaux	231
8.1.2. Norme d'un vecteur	232
8.1.3. Définition d'une base orthonormée	233
8.1.4. Expression analytique de la norme et de la distance	233
8.1.5. Calculs avec <i>Matlab</i>	234
8.2. Produit scalaire de deux vecteurs dans le plan ou l'espace	235
8.2.1. Définition	235
8.2.2. Propriétés de symétrie et bilinéarité	235
8.2.3. Produit scalaire et norme	235
8.2.4. Produit scalaire et orthogonalité	236
8.2.5. Produit scalaire et changement de base orthonormée	236
8.2.6. Produit scalaire et angle de deux vecteurs	237
8.2.7. Exemple d'utilisation du produit scalaire	239
8.3. Produit vectoriel dans \mathcal{V}_3	240
8.3.1. Orientation dans \mathcal{V}_3	240
8.3.2. Définition du produit vectoriel	241
8.3.3. Propriétés d'antisymétrie et de bilinéarité	242
8.3.4. Produit mixte de trois vecteurs	242
8.3.5. Propriétés géométriques du produit vectoriel	243
8.3.6. Produit vectoriel et changement de base orthonormée directe	244
8.4. Exercices	245
8.4.1. Norme d'un vecteur	245
8.4.2. Distance d'un point à un plan	245
8.4.3. Plan médiateur d'un segment	247
8.4.4. Distance d'un point à une droite	248
8.4.5. Faces visibles et faces cachées d'un cube	248
8.5. Solutions	251

Chapitre 9. Transformations dans le plan et dans l'espace 263

9.1. Transformations géométriques et applications linéaires	263
9.1.1. Introduction	263
9.1.2. Application affine et application linéaire associée	264
9.1.3. Applications affines et calcul matriciel	266
9.2. Coordonnées homogènes et transformations planes	270
9.2.1. Coordonnées homogènes d'un point du plan	270
9.2.2. Matrice, en coordonnées homogènes, de transformations usuelles	273
9.2.3. Image d'une figure	275
9.2.4. Composition de transformations et matrices en coordonnées homogènes	277
9.2.5. Réciproque d'une transformation et matrices en coordonnées homogènes	279
9.2.6. Formule de changement de repère en coordonnées homogènes	279
9.3. Coordonnées homogènes et transformations de l'espace	280

9.3.1. Coordonnées homogènes d'un point de l'espace	280
9.3.2. Matrices des transformations de l'espace	281
9.4. Projections et leurs matrices en coordonnées homogènes	285
9.4.1. Différents types de projections	285
9.4.2. Projections sur un plan quelconque P	291
9.4.3. Représentation d'une figure de l'espace avec Matlab	291
9.5. Exercices	294
9.5.1. Quelques matrices en coordonnées homogènes	294
9.5.2. Rotation et symétrie orthogonale	295
9.5.3. Rotation et translation	295
9.5.4. Ecran graphique	296
9.5.5. Projection parallèle et projection perspective	297
9.5.6. Projection perspective sur un plan "oblique"	298
9.6. Solutions	300
Bibliographie	315
Index	317