

François **Cottet-Emard**

Algèbre linéaire et **bilinéaire**

**COURS
ET EXERCICES CORRIGÉS**

Licence de mathématiques, L2



de boeck

Table des matières

Avant-propos.....	III
-------------------	-----

Chapitre 1 Rappels d'algèbre

1. Applications injectives, surjectives, bijectives.....	2
1.1 Image directe d'une partie de E	2
1.2 Image réciproque par f d'une partie de F	2
1.3 Injection de E dans F	3
1.4 Surjection de E sur F	3
1.5 Bijection de E sur F	3
2. Espaces vectoriels sur K	3
2.1 Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels.....	3
2.2 Combinaisons linéaires de vecteurs	4
2.3 Famille génératrice	4
2.4 Sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs.....	5
2.5 Famille libre de vecteurs	5
2.6 Espace vectoriel de dimension finie sur K	5
3. Bases d'un espace vectoriel de dimension finie	6
3.1 Base de E	6
3.2 Théorème fondamental et définition.....	6
3.3 Caractérisation des bases	6
3.4 Théorème de la base incomplète	7
4. Rang d'une famille de vecteurs.....	7
4.1 Rang	7
4.2 Calcul du rang	7
4.3 Représentation d'une famille de vecteurs sur une base.....	8
4.4 Calcul du rang par échelonnement	8
5. Matrices	9
5.1 Matrice à n lignes et p colonnes.....	9
5.2 Matrices particulières.....	9
5.3 Addition et produit par un scalaire	10
5.4 Produit de deux matrices	10
5.5 Transposée d'une matrice	10

5.6	Rang d'une matrice	11
5.7	Inverse d'une matrice carrée	11
5.8	Calcul du rang par la méthode de Gauss.....	11
6.	Systèmes linéaires	12
6.1	Échelonnement du système	12
6.2	Interprétation en terme de matrice	13
7.	Applications linéaires	13
7.1	Définition	13
7.2	Comment définir une application linéaire	13
7.3	Noyau d'une application linéaire	14
7.4	Image de E par une application linéaire	14
7.5	Application linéaire et famille libre ou famille génératrice.....	14
7.6	Théorème de la dimension.....	15
7.7	Caractérisation des isomorphismes	15
8.	Applications linéaires et matrices	15
8.1	Matrice d'une application linéaire	15
8.2	Matrice d'une composée $f \circ g$	16
8.3	Matrice de l'isomorphisme réciproque	16
9.	Changement de bases	16
9.1	Matrice de passage	16
9.2	Relation entre les composantes d'un même vecteur	17
9.3	Relation entre les matrices d'un même endomorphisme	17
9.4	Plusieurs changements de bases	17
10.	Compléments sur les sous-espaces vectoriels	17
10.1	Intersection de deux S.E.V.	17
10.2	Somme de deux S.E.V.	18
10.3	Somme directe de deux S.E.V. Sous-espaces supplémentaires	18
10.4	Somme directe de p S.E.V.	18
11.	Polynômes à une indéterminée sur un corps K	19
11.1	Degré d'un polynôme.....	19
11.2	L'espace vectoriel $K[X]$	19
11.3	Produit de deux polynômes.....	19
11.4	Division euclidienne de deux polynômes	20
11.5	Racines d'un polynôme	20
11.6	PGCD de deux polynômes	21
11.7	Théorème de Bezout.....	21
11.8	Formule de Taylor	21
11.9	Théorème de d'Alembert	22

Chapitre 2 Déterminants

1.	Présentation du problème	24
2.	Définition des déterminants	25

3. Propriétés fondamentales des déterminants	26
3.1 Proposition	26
4. Formes multilinéaires alternées et déterminants	31
5. Règles de calcul sur les déterminants	35
5.1 Règles de base	35
5.2 Déterminant d'un produit	39
6. Théorème fondamental	39
7. Applications des déterminants. Matrices carrées	41
7.1 Calcul de l'inverse d'une matrice	42
7.2 Résolution d'un système de Cramer	44
7.3 Équation d'un hyperplan	45
8. Rang d'une famille de vecteurs ou d'une matrice. Matrices quelconques	46
8.1 Rang d'une matrice quelconque	46
8.2 Systèmes d'équations cartésiennes d'un S.E.V.	50
9. Déterminant d'un endomorphisme	52
Annexe : Preuve des théorèmes 2 et 3. Cas général	53
Exercices	56
1. Calculs de déterminants	56
2. Applications au rang et aux S.E.V.	63
3. Applications diverses	73
4. Exercices théoriques	77
5. Exercices dont les calculs sont à faire avec Maple	83

Chapitre 3 Diagonalisation et trigonalisation

1. Motivations	90
2. Endomorphisme ou matrice diagonalisable	91
3. Valeurs et vecteurs propres	92
4. Polynôme caractéristique. Calcul des valeurs propres	94
4.1 Polynôme caractéristique d'une matrice	94
4.2 Polynôme caractéristique d'un endomorphisme	96
4.3 Calcul des valeurs propres	97
5. Sous-espaces propres. Théorème de dimension. Indépendance	99
5.1 Sous-espaces propres	99
5.2 Exemples de calculs	100
5.3 Indépendance des sous-espaces propres	104
6. C.N.S. de diagonalisation	106
6.1 La condition nécessaire et suffisante de diagonalisation	106
6.2 Une autre façon de s'exprimer	108
6.3 Une condition suffisante de diagonalisation	109
6.4 Technique pratique de diagonalisation. Exemples	109

7. Comment n'est-on pas diagonalisable sur K ?	113
7.1 Matrice complexe non diagonalisable sur $\mathbb{C}$	113
7.2 Matrice réelle non diagonalisable sur $\mathbb{R}$	113
7.3 Malgré tout, une matrice semblable plus simple...	114
8. C.N.S. de trigonalisation	115
8.1 Définition	115
8.2 Théorème fondamental	116
9. Technique de trigonalisation	118
9.1 Allure d'une forme triangulaire cherchée. Réduite de Jordan	118
9.2 Matrices de dimension deux	120
9.3 Matrices de dimension trois	121
9.4 Un exemple en dimension quatre	124
9.5 Remarques finales	125
10. Application aux puissances d'une matrice carrée	126
10.1 Cas des matrices diagonalisables	126
10.2 Cas des matrices seulement trigonalisables	128
11. Application aux suites récurrentes	132
12. Application aux systèmes différentiels	136
12.1 Cas où A est diagonalisable	137
12.2 Cas où A est seulement trigonalisable	138
13. Théorème de Cayley-Hamilton. Compléments	140
13.1 Polynômes d'endomorphisme	140
13.2 Théorème de Cayley-Hamilton	140
13.3 Application au calcul de l'inverse	142
Exercices	143
1. Exercices de raisonnement simple	143
2. Exercices de calculs	145
3. Exercices théoriques	152
4. Interprétation géométrique	158
5. Exercices supplémentaires	160
6. Systèmes différentiels	171
7. Exercices structurels	176

Chapitre 4 Projections et symétries

1. Endomorphisme vérifiant $(f - \alpha Id) \circ (f - \beta Id) = 0$	188
2. Projection sur F parallèlement à G	191
2.1 Définition à partir de F et G et propriétés	191
2.2 Caractérisation	191
2.3 Projection sur F parallèlement à G et projection sur G parallèlement à F	192
3. Symétrie par rapport à F parallèlement à G	194
3.1 Définition géométrique	194

3.2	Caractérisation.....	195
3.3	Comment écrire ou reconnaître une symétrie.....	196
4.	Projection et symétrie orthogonale dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$	197
4.1	Cas $\mathbb{R}^2$: projection orthogonale sur une droite	197
4.2	Cas $\mathbb{R}^3$: projection orthogonale sur une droite	197
4.3	Cas $\mathbb{R}^3$: projection orthogonale sur un plan.....	197
4.4	Cas $\mathbb{R}^2$: symétrie orthogonale par rapport à une droite	198
4.5	Cas $\mathbb{R}^3$: symétrie orthogonale par rapport à une droite	198
4.6	Cas $\mathbb{R}^3$: symétrie orthogonale par rapport à un plan.....	198

Chapitre 5 Formes bilinéaires symétriques sur un espace vectoriel

1.	Forme bilinéaire symétrique sur E	200
1.1	Définition et exemples	200
1.2	Développement de $f(X, Y)$	201
2.	Expression d'une forme bilinéaire symétrique dans une base	202
2.1	Écriture dans une base. Matrice symétrique d'une forme bilinéaire	202
2.2	Changement de base	204
3.	Produit scalaire sur E	205
3.1	Définition	205
3.2	Inégalité de Cauchy-Schwarz	206
3.3	Inégalité triangulaire.....	207
3.4	Orthogonalité	208
4.	Base orthonormée. Matrice orthogonale	208
4.1	Système orthogonal de vecteurs.....	208
4.2	Base orthonormée de E	209
4.3	Existences de bases orthonormées. Algorithme de Gram-Schmidt	210
4.4	Expression du produit scalaire sur une base orthonormée	212
4.5	Composantes d'un vecteur sur une base orthonormée	212
4.6	Matrice de passage entre bases orthonormées	213
5.	Orthogonal supplémentaire. Projection orthogonale	216
5.1	Orthogonal supplémentaire	216
5.2	Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel.....	218

Chapitre 6 Diagonalisation des matrices symétriques réelles. Endomorphisme auto-adjoint

1.	Énoncé du théorème général	224
2.	Cas de la dimension 2	225
3.	Cas général	226
3.1	Notations et rappels des propriétés élémentaires	226
3.2	Toutes les valeurs propres sont réelles	226

3.3	Démonstration par récurrence du théorème	227
3.4	Orthogonalité des sous-espaces propres.....	228
4.	Adjoint d'un endomorphisme d'un espace euclidien.....	231
4.1	Forme linéaire sur E	231
4.2	Adjoint d'un endomorphisme de E	232
4.3	Endomorphisme auto-adjoint.....	235
5.	Réduction d'un endomorphisme auto-adjoint.....	236

Chapitre 7 Isométries d'un espace vectoriel réel

1.	Définition et caractérisation	238
2.	Déterminant et valeurs propres d'une isométrie.....	240
3.	Groupe des isométries de $\mathbb{R}^n$	240
4.	Isométries de $\mathbb{R}^2$	241
4.1	Deux valeurs propres réelles	241
4.2	Deux valeurs propres complexes conjuguées	242
4.3	Récapitulatif.....	242
5.	Isométries de $\mathbb{R}^3$	243

Chapitre 8 Formes quadratiques

1.	Définition.....	248
2.	Écriture dans une base quelconque	249
3.	But de la réduction d'une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$.....	251
3.1	Exemple et position du problème	251
3.2	Les deux façons de procéder	252
4.	Réduction par la méthode de Gauss	253
4.1	Deux exemples	253
4.2	Principe général de la méthode de Gauss.....	256
5.	Réduction par diagonalisation	258
6.	Illustration géométrique	261
6.1	Exemples dans le plan.....	261
6.2	Exemples dans l'espace.....	263

Chapitre 9 Géométrie élémentaire dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

Retour sur terre dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

1.	Orientation.....	266
2.	Produit scalaire et orthogonalité.....	267
2.1	Produit scalaire, distance de deux vecteurs.....	267
2.2	Projection orthogonale, distance à un sous-espace vectoriel	267
2.3	Orthogonalité d'un plan et d'une droite.....	268

3.	Produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$	268
3.1	Définition	268
3.2	Vecteur perpendiculaire à un plan	269
3.3	Une petite relation utile	269
4.	Angle de deux vecteurs	270
4.1	Angle de deux vecteurs dans $\mathbb{R}^2$	270
4.2	Angle de deux vecteurs dans $\mathbb{R}^3$	270
4.3	Angle d'une rotation	270
5.	Géométrie euclidienne dans le plan ou l'espace affine	271
5.1	Projection orthogonale sur un plan	271
5.2	Distance d'un point à un plan	271
5.3	Plan et/ou droite perpendiculaires	271
5.4	Un exemple	272
5.5	Quadriques en géométrie affine	272

Chapitre 10 Exercices corrigés des chapitres 4 à 9

1.	Formes bilinéaires symétriques	274
2.	Produits scalaires, orthogonalité	278
3.	Matrices symétriques	293
4.	Isométries	304
5.	Formes quadratiques	308