

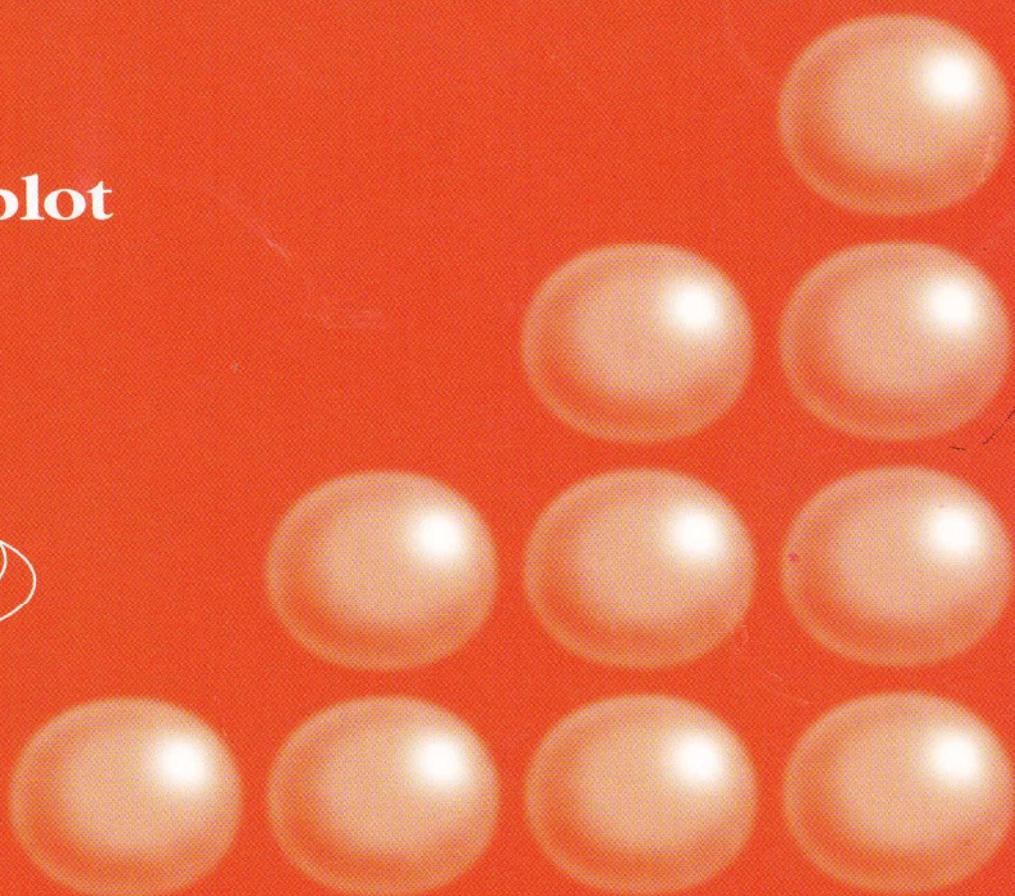
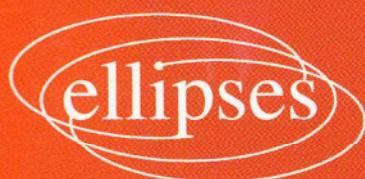
# MATHÉMATIQUES à l'Université

Cours et exercices corrigés

Collection dirigée par  
Charles-Michel Marle  
Philippe Pilibossian

## Algèbre linéaire

Rémi Goblot



# Table des matières

<b>I</b>	<b>Espaces vectoriels, modules</b>	<b>1</b>
1	Introduction . . . . .	1
	1.1. Sous-espaces supplémentaires . . . . .	1
	1.2. Familles libres, génératrices, bases . . . . .	3
	1.3. Modules sur un anneau commutatif . . . . .	4
	1.4. Modules sur un anneau quelconque . . . . .	6
	1.5. Quotient d'un module par un sous-module . . . . .	7
	1.6. Représentation matricielle relativement à des sommes directes . . . . .	9
2	Espaces vectoriels de dimension finie . . . . .	10
3	Normes en dimension finie sur $\mathbf{R}$ . . . . .	15
4	Applications aux extensions de corps . . . . .	18
5	Calcul barycentrique . . . . .	19
6	Espaces projectifs . . . . .	22
	6.1. Rappels de définitions . . . . .	22
	6.2. Complété projectif d'un espace affine . . . . .	23
	6.3. Repères projectifs . . . . .	24
	6.4. Applications projectives . . . . .	26
	6.5. Théorème de la géométrie projective . . . . .	28
7	Exercices . . . . .	30
 <b>II</b>	 <b>Matrices</b>	 <b>35</b>
1	Matrices et espaces numériques . . . . .	35
2	Matrices et applications linéaires . . . . .	37
	2.1. Matrices relativement à des bases . . . . .	37
	2.2. Changements de bases . . . . .	39
3	Matrices à coefficients dans un corps . . . . .	41
4	Opérations élémentaires sur les matrices . . . . .	47
	4.1. Définitions . . . . .	47
	4.2. Cas des matrices à coefficients dans un corps . . . . .	48
	4.3. Dilatations et transvections . . . . .	50
5	Matrices en géométrie . . . . .	53
	5.1. Matrices en géométrie affine . . . . .	53
	5.2. Matrices en géométrie projective . . . . .	54
6	Exercices . . . . .	54
 <b>III</b>	 <b>Déterminants</b>	 <b>57</b>
1	Modules de formes multilinéaires alternées . . . . .	57
	1.1. Formes $p$ -linéaires alternées . . . . .	57
	1.2. La forme déterminant . . . . .	59
	1.3. Déterminant d'une matrice . . . . .	61

2	Formules de Cramer et applications . . . . .	64
2.1.	Développement relativement à une rangée . . . . .	64
2.2.	Systèmes linéaires homogènes . . . . .	69
3	Applications en géométrie . . . . .	69
3.1.	Application en géométrie linéaire . . . . .	69
3.2.	Application en géométrie affine . . . . .	71
3.3.	Application en géométrie projective . . . . .	73
4	Exercices . . . . .	76
<b>IV</b>	<b>Dualité</b> . . . . .	<b>79</b>
1	Formes linéaires . . . . .	79
2	Dualité en dimension finie . . . . .	80
3	Dualité en dimension quelconque . . . . .	83
3.1.	Orthogonalité . . . . .	83
3.2.	Inclusion de $E$ dans son bidual $E^{**}$ . . . . .	84
3.3.	Éclairage topologique . . . . .	85
4	Dualité en géométrie projective . . . . .	86
5	Exercices . . . . .	87
<b>V</b>	<b>Réduction des endomorphismes</b> . . . . .	<b>89</b>
1	Sous-espaces stables . . . . .	89
2	Théorème des noyaux et applications . . . . .	95
2.1.	Polynôme annulateur scindé à racines simples . . . . .	96
2.2.	Sous-espaces caractéristiques . . . . .	99
2.3.	Décomposition de Dunford, applications . . . . .	101
3	Invariants de similitude . . . . .	104
3.1.	Première description des espaces cycliques . . . . .	104
3.2.	Théorème des invariants de similitude . . . . .	112
3.3.	Commutant dans le cas cyclique . . . . .	115
3.4.	Sous-espaces indécomposables . . . . .	117
4	Structure de $K[T]$ -module sur $E$ . . . . .	118
4.1.	Modules sur un anneau principal . . . . .	118
4.2.	Sous-espaces caractéristiques . . . . .	121
4.3.	Invariants de similitude . . . . .	122
5	Applications géométriques . . . . .	128
5.1.	Applications affines à points fixes . . . . .	128
5.2.	Application à la géométrie projective . . . . .	130
6	Exercices . . . . .	132
<b>VI</b>	<b>Formes quadratiques</b> . . . . .	<b>137</b>
1	Formes bilinéaires . . . . .	137
1.1.	Généralités . . . . .	137
1.2.	Formes quadratiques . . . . .	140
2	Orthogonalité et isotropie . . . . .	141
2.1.	Généralités . . . . .	141
2.2.	Méthode de Gauss . . . . .	146
3	Types de formes quadratiques . . . . .	148
4	Morphismes liés à une forme quadratique . . . . .	152
4.1.	Isométries . . . . .	152

	4.2.	Similitudes . . . . .	155
	4.3.	Types projectifs de formes quadratiques . . . . .	159
	4.4.	Adjoint d'un endomorphisme . . . . .	160
5		Décomposition de Witt . . . . .	161
	5.1.	Indice d'une forme quadratique . . . . .	161
	5.2.	Espaces hyperboliques . . . . .	162
	5.3.	Théorème de Witt . . . . .	167
	5.4.	Cas hyperbolique: les deux familles de setim . . . . .	169
6		Applications géométriques . . . . .	170
	6.1.	Géométrie du cône isotrope . . . . .	171
	6.2.	Quadriques projectives . . . . .	173
	6.3.	Quadriques affines . . . . .	176
7		Formes alternées . . . . .	180
8		Exercices . . . . .	183
<b>VII</b>		<b>Espaces euclidiens et hermitiens</b>	<b>189</b>
1		Normes euclidiennes . . . . .	189
2		Théorie des angles . . . . .	193
3		Groupe des isométries en dimension $n$ . . . . .	196
4		Endomorphismes symétriques . . . . .	202
	4.1.	Lien avec les formes quadratiques . . . . .	202
	4.2.	Endomorphismes symétriques positifs . . . . .	203
	4.3.	Applications . . . . .	207
5		Espaces hermitiens . . . . .	211
	5.1.	Formes hermitiennes . . . . .	211
	5.2.	Espaces hermitiens . . . . .	212
6		Formes hermitiennes et quadratiques . . . . .	216
	6.1.	Complexifié d'un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel . . . . .	216
	6.2.	$\mathbf{R}$ -structure sous-jacente d'un $\mathbf{C}$ -espace vectoriel . . . . .	217
7		Exercices . . . . .	218
<b>VIII</b>		<b>Groupes de l'algèbre linéaire</b>	<b>223</b>
1		Algèbre des endomorphismes . . . . .	223
	1.1.	Généralités . . . . .	223
	1.2.	Structure des $K$ -algèbres finies simples . . . . .	225
2		Groupe linéaire . . . . .	228
	2.1.	Situation géométrique d'un groupe en action . . . . .	228
	2.2.	Rappels sur les groupes finis . . . . .	232
	2.3.	Exemples de groupes simples . . . . .	233
	2.4.	Automorphismes intérieurs . . . . .	237
3		Exercices . . . . .	239
<b>IX</b>		<b>Quaternions</b>	<b>241</b>
1		Théorème de Frobenius . . . . .	241
2		Application au groupe $\mathrm{SO}_4$ . . . . .	243
3		Les sous-groupes distingués de $\mathrm{SO}_4$ . . . . .	246
4		Immersion de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{H}$ . . . . .	250
	4.1.	Groupe spécial unitaire en dimension 2 . . . . .	250
	4.2.	Invariants de similitude d'un $\mathbf{H}$ -endomorphisme . . . . .	250

5	Quaternions généralisés . . . . .	252
5.1.	Description des algèbres de quaternions . . . . .	252
5.2.	Caractérisation des algèbres de quaternions . . . . .	253
5.3.	Algèbres de quaternions non intègres . . . . .	255
<b>X</b>	<b>Solutions des exercices</b>	<b>257</b>
1	Exercices du chapitre I . . . . .	257
2	Exercices du chapitre II . . . . .	263
3	Exercices du chapitre III . . . . .	269
4	Exercices du chapitre IV . . . . .	276
5	Exercices du chapitre V . . . . .	280
6	Exercices du chapitre VI . . . . .	294
7	Exercices du chapitre VII . . . . .	306
8	Exercices du chapitre VIII . . . . .	316
	<b>Index</b>	<b>324</b>