



Toute l'algèbre de la licence : cours et exercices corrigés

Jean-Pierre Escofier

Escofier, Jean-Pierre

Dunod, Paris

Sciences sup. Mathématiques

ISBN: 978-2-10-055671-7

Table des Matières

Toute l'algèbre de la Licence

Cours et exercices corrigés

Jean-Pierre Escofier

Dunod

Avant-propos	XI
Première année	
Chapitre 1 Équations différentielles linéaires	
1.1 Sommes et produits de fonctions	3
1.2 Équations différentielles linéaires sans second membre	6
1.3 Résolution des équations différentielles linéaires à coefficients constants	6
1.4 Combinaisons linéaires et espace engendré	9
1.5 Solutions des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants sans second membre	9
1.6 Résultats pour les équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants avec second membre	10
Exercices	12
Chapitre 2 Suites récurrentes linéaires	
2.1 Sommes et produits de suites	17
2.2 Suites satisfaisant une relation de récurrence linéaire	18
2.3 Suites satisfaisant $u_n + au_{n-1} + bu_{n-2} = 0$	19
2.4 Un peu d'histoire	21
2.5 Étude de la suite de Fibonacci	22
Exercices	23
Chapitre 3 L'espace vectoriel \mathbb{R}^n	
3.1 Introduction de la géométrie à n dimensions	27
3.2 Famille d'éléments, suites finies, n -uplets	30
3.3 Définition de \mathbb{R}^n	31
3.4 Combinaisons linéaires et espace engendré	32
3.5 Base canonique de \mathbb{R}^n	34
3.6 Familles triangulaires et échelonnées	35
3.7 La droite vectorielle \mathbb{R}	37
3.8 Espaces engendrés dans \mathbb{R}^2	38
3.9 Espaces engendrés dans \mathbb{R}^3	40
3.10 Algorithme du pivot de Gauss dans \mathbb{R}^n	42

Exercices	46
Chapitre 4 Systèmes linéaires	
4.1 Histoire ancienne	55
4.2 Leibniz, Cramer, Gauss	57
4.3 Systèmes linéaires	58
4.4 Exemples de résolution	58
4.5 Systèmes équivalents	60
4.6 Systèmes triangulaires et échelonnés	61
4.7 Méthode du pivot de Gauss	62
4.8 Exemples	66
4.9 Systèmes avec paramètres	68
4.10 Problèmes actuels	69
Exercices	71
Chapitre 5 Généralités sur les espaces vectoriels	
5.1 Introduction	75
5.2 Un peu d'histoire	76
5.3 Structure de R-espace vectoriel	77
5.4 Exemples fondamentaux	79
5.5 Précisions sur les corps	80
5.6 Sous-espaces vectoriels	81
5.7 Exemples de sous-espaces vectoriels	82
5.8 Combinaisons linéaires et espace engendré	83
5.9 Somme de sous-espaces	85
Exercices	86
Chapitre 6 Bases et dimension	
6.1 Introduction	91
6.2 Famille génératrice	91
6.3 Famille libre	92
6.4 Base d'un espace vectoriel	94
6.5 Dimension	96
6.6 Exemples de bases	98
6.7 Retour au rang	100
Exercices	101
Chapitre 7 Applications linéaires	
7.1 Naissance du concept	113
7.2 Applications linéaires	114
7.3 Exemples	115
7.4 Propriété universelle	117
7.5 Noyau d'une application linéaire	119
7.6 Image d'une application linéaire	120
7.7 Le théorème du rang ou des dimensions	121
7.8 Résolution d'une équation linéaire	122

7.9 Résolution d'un système linéaire	123
7.10 Isomorphismes	125
Exercices	127
Chapitre 8 Matrices	
8.1 Matrice d'une application linéaire	135
8.2 Matrices et applications linéaires	138
8.3 Un peu d'histoire	139
8.4 Matrices particulières	141
8.5 Exemples	143
8.6 Matrice de la composée	144
8.7 Propriétés du produit	147
8.8 Calcul de l'inverse d'une matrice	148
8.9 Changement de base	151
8.10 Rang et trace	156
8.11 Calculs avec Maple	157
Exercices	158
Chapitre 9 Sommes directes, produits, quotients	
9.1 Exemples	167
9.2 Décomposition en somme directe	168
9.3 Sommes directes finies	169
9.4 Produit de deux espaces vectoriels	170
9.5 Projecteurs	173
9.6 Espaces vectoriels quotients	174
Exercices	177
Chapitre 10 Dualité	
10.1 Introduction	183
10.2 Formes linéaires et hyperplans	184
10.3 Base duale	186
10.4 Orthogonal d'un sous-espace	187
10.5 Transposée d'une application linéaire	189
Exercices	191
Deuxième année	
Chapitre 11 Groupes	
11.1 Introduction	199
11.2 Généralités	200
11.3 Exemples	202
11.4 Sous-groupes	203
11.5 Homomorphismes de groupes	205
11.6 Étude des groupes de permutation	207
11.7 Signature d'une permutation	210
11.8 Groupe linéaire	212
11.9 Centre du groupe linéaire	213

11.10 Générateurs du groupe linéaire	214
Exercices	215
Chapitre 12 Arithmétique, anneaux	
12.1 Introduction	221
12.2 Division euclidienne dans \mathbb{Z}	221
12.3 Congruence modulo n , définition de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	222
12.4 Addition et multiplication dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	224
12.5 Structures d'anneau commutatif unitaire et de corps	225
12.6 Homomorphismes d'anneaux	227
12.7 Utilisations des congruences	228
12.8 Éléments inversibles	229
12.9 Idéal	229
12.10 Sous-groupes, idéaux de \mathbb{Z}	230
12.11 Divisibilité, nombres premiers	231
12.12 Pgcd, ppcm, nombres premiers entre eux	232
12.13 Les corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$	236
Exercices	238
Chapitre 13 Polynômes	
13.1 Introduction	247
13.2 Polynômes sur un corps K	248
13.3 Degré, division euclidienne	250
13.4 Pgcd de polynômes	252
13.5 Racines d'un polynôme	254
13.6 Dérivation	256
13.7 Éléments irréductibles	259
13.8 La structure de K -algèbre de $K[X]$	260
Exercices	262
Chapitre 14 Déterminants	
14.1 Introduction historique	269
14.2 Calcul des déterminants : méthode de Bézout	274
14.3 Le caractère alterné	276
14.4 Multilinéarité	278
14.5 Formules et calculs	281
14.6 Déterminant d'un endomorphisme	284
14.7 Déterminant d'une matrice carrée	286
14.8 Retour sur le rang	288
14.9 Déterminant et volume	289
14.10 Déterminant et orientation	291
Exercices	292
Chapitre 15 Autour de la diagonalisation	
15.1 Introduction	299
15.2 Étude du problème	300

15.3 Définitions	301
15.4 Exemple	302
15.5 Condition suffisante de diagonalisabilité	303
15.6 Condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité	304
15.7 Changement de corps de base	308
15.8 Seconde condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité	309
15.9 Triangularisation	311
15.10 Théorème de Hamilton-Cayley	313
15.11 Quelques applications	314
Exercices	319
Chapitre 16 Orthogonalité	
16.1 Introduction	327
16.2 Orthogonalité dans le plan et l'espace ordinaires	327
16.3 Produit scalaire	330
16.4 Expression du produit scalaire	331
16.5 Norme et angle	334
16.6 Bases orthogonales et orthonormées	337
16.7 Orthogonalité de sous-espaces	340
16.8 Projection orthogonale	342
16.9 Transformations orthogonales	346
16.10 Groupe orthogonal de \mathbb{R}^2	349
16.11 Groupe orthogonal de \mathbb{R}^3	351
16.12 Endomorphisme adjoint et autoadjoint	354
16.13 Polynômes orthogonaux : exemple des polynômes de Legendre	357
Exercices	365
Chapitre 17 Carl Friedrich Gauss (1777-1855)	377
Troisième année	
Chapitre 18 Ouvertures sur les groupes	
18.1 Relation d'équivalence sur un ensemble	398
18.2 Notion de sous-groupe distingué	401
18.3 Groupe quotient	404
18.4 Correspondance entre sous-groupes d'un groupe et sous-groupes d'un de ses quotients	407
18.5 Produits de groupes	409
18.6 Groupes monogènes et groupes cycliques	413
18.7 Action d'un groupe sur un ensemble	414
Exercices	419
Chapitre 19 Ouvertures sur les anneaux commutatifs unitaires	
19.1 Sous-anneau, extension de corps	443
19.2 Caractéristique	446
19.3 Quotient d'un anneau par un idéal	447
19.4 Exemples de quotients	448

19.5 Correspondance entre idéaux d'un anneau et idéaux d'un de ses quotients	453
19.6 Produits d'anneaux	454
19.7 Opérations sur les idéaux	456
19.8 Théorème chinois	457
19.9 Éléments inversibles	461
19.10 Divisibilité dans les anneaux intègres	463
19.11 Idéaux premiers et maximaux	466
19.12 Anneaux euclidiens	469
19.13 Anneaux factoriels	470
19.14 Théorème de Fermat pour $n = 3$	474
19.15 Corps des fractions d'un anneau intègre	478
Exercices	482
Chapitre 20 Ouvertures sur les polynômes	
20.1 La A -algèbre $A[X]$	497
20.2 Corps de rupture et de décomposition	501
20.3 Si A factoriel, alors $A[X]$ factoriel	503
20.4 Recherche des facteurs irréductibles d'un polynôme	505
20.5 Décomposition en éléments simples dans $C(X)$ et $R(X)$	506
20.6 Méthodes pour prouver l'irréductibilité d'un polynôme de $Z[X]$, de $Q[X]$	510
20.7 Localisation des racines d'un polynôme de $R[X]$	512
20.8 Polynômes à plusieurs indéterminées	516
20.9 Polynômes symétriques	518
20.10 Fractions continues	524
20.11 Géométrie algébrique	533
Exercices	535
Chapitre 21 Corps finis	
21.1 Corps finis : généralités	555
21.2 Existence et unicité des corps finis	558
21.3 Loi de réciprocité quadratique	561
21.4 Factorisation dans $Z[i]$, théorème des deux carrés	565
21.5 Algorithme de Berlekamp	566
Exercices	569
Chapitre 22 Codes correcteurs et cryptographie	
22.1 Les débuts des codes correcteurs	581
22.2 Codes correcteurs	583
22.3 Exemples	584
22.4 Distance de Hamming	585
22.5 Codes linéaires	586
22.6 Codes cycliques	589
22.7 Codes BCH	592
22.8 Histoire de la cryptographie	596
22.9 Logarithme discret	600

22.10 La méthode RSA	601
22.11 Grands nombres premiers	604
22.12 Factorisation	606
22.13 Courbes elliptiques	608
Exercices	612
Chapitre 23 Formes bilinéaires symétriques et quadratiques	
23.1 Compléments sur le groupe orthogonal d'un espace euclidien	621
23.2 Formes bilinéaires et bilinéaires symétriques	628
23.3 Formes quadratiques	632
23.4 Méthode de Gauss pour la décomposition en carrés	634
23.5 Décomposition d'une forme quadratique sur C ou R	637
23.6 Diagonalisation simultanée de deux formes quadratiques	639
23.7 Orthogonalité	641
23.8 Espaces quadratiques réguliers	642
23.9 Quaternions	647
23.10 Recherches arithmétiques de Lagrange	652
Exercices	658
Bibliographie	679
Index	683

