



Statistique mathématique et statistique des processus  
 Denis Bosq  
 Bosq, Denis  
 Hermès science publications, Cachan (Val-de-Marne)  
 Méthodes stochastiques appliquées  
 ISBN: 978-2-7462-3808-4

## Table des Matières

Statistique mathématique et statistique des processus

Denis Bosq

hermes Science

Lavoisier

Avant propos	11
Première partie. Statistique mathématique	13
Chapitre 1. Introduction à la statistique mathématique	15
1.1. Généralités	15
1.2. Exemples de problèmes de statistique	16
1.2.1. Le contrôle de qualité	16
1.2.2. Erreurs de mesure	17
1.2.3. Filtrage	17
1.2.4. Intervalles de confiance	18
1.2.5. Test d'homogénéité	19
Chapitre 2. Notions sur la théorie de la décision	21
2.1. Généralités	21
2.2. Le problème du choix d'une fonction de décision	23
2.3. Notions sur les méthodes Bayésiennes	25
2.3.1. Généralités	25
2.3.2. Détermination des fonctions de décision de Bayes	25
2.4. Classes complètes	28
2.5. Critique de la théorie de la décision - Le point de vue asymptotique	29
2.6. Exercices	30
Chapitre 3. Espérance conditionnelle	33
3.1. Définition	33
3.2. Propriétés et extension	34
3.3. Probabilités conditionnelles et lois conditionnelles	36
3.4. Exercices	38
Chapitre 4. Statistiques et exhaustivité	41
4.1. Échantillons et lois empiriques	41
4.2. Exhaustivité	43
4.3. Exemples de statistiques exhaustives - Le cas du modèle exponentiel	45
4.4. Utilisation d'une statistique exhaustive	47
4.5. Exercices	48

Chapitre 5. Estimation ponctuelle	51
5.1. Généralités	51
5.1.1. Définition - Exemples	51
5.1.2. Choix d'une relation de préférence	52
5.2. Exhaustivité et complétude	54
5.2.1. Exhaustivité	54
5.2.2. Statistique complète	55
5.3. La méthode du maximum de vraisemblance	57
5.3.1. Définition	57
5.3.2. Maximum de vraisemblance et exhaustivité	58
5.3.3. Calcul des estimateurs maximum de vraisemblance	59
5.4. Estimateurs sans biais optimaux	60
5.4.1. Estimation sans biais	61
5.4.2. Estimateur sans biais de dispersion minimum	63
5.4.3. Critique de l'estimation sans biais	67
5.5. Efficacité d'un estimateur	67
5.5.1. L'inégalité de Fréchet-Darmois-Cramer-Rao	67
5.5.2. Efficacité	71
5.5.3. Extension à (...) <sup>k</sup>	71
5.5.4. Le cas non régulier	75
5.6. Le modèle linéaire de régression	76
5.6.1. Généralités	76
5.6.2. Estimation du paramètre - Théorème de Gauss-Markov	77
5.7. Exercices	79
Chapitre 6. Théorie des tests et régions de confiance	83
6.1. Généralités	83
6.1.1. Le problème	83
6.1.2. Utilisation de la théorie de la décision	83
6.1.3. Généralisation	84
6.1.4. Exhaustivité	85
6.2. Le lemme de Neyman-Pearson	85
6.3. Tests à hypothèses multiples (méthodes générales)	90
6.3.1. Test d'une hypothèse simple contre une hypothèse multiple	90
6.3.2. Cas général - Tests sans biais	92
6.4. Cas où le rapport des vraisemblances est monotone	94
6.4.1. Généralités	94
6.4.2. Test unilatère	94
6.4.3. Tests bilatères	95
6.5. Tests relatifs à la loi normale	96
6.6. Application à l'estimation : régions de confiance	96
6.7. Exercices	100
Chapitre 7. Statistique asymptotique	111

7.1. Généralités	111
7.2. Convergence de l'estimateur maximum de vraisemblance	113
7.3. Loi limite de l'estimateur maximum de vraisemblance	114
7.4. Le test du rapport des vraisemblances	116
7.5. Exercices	118
Chapitre 8. Méthodes non-paramétriques et robustesse	122
8.1. Généralités	121
8.2. Estimation non-paramétrique	122
8.2.1. Estimateurs empiriques	122
8.2.2. Estimation de la loi et de la densité	122
8.2.3. Estimation de la régression	125
8.3. Tests non-paramétriques	125
8.3.1. Le test du $\chi^2$	125
8.3.2. Le test de Kolmogorov-Smirnov	128
8.3.3. Le test de Cramer-von Mises	128
8.3.4. Les tests de rang	129
8.4. La robustesse	129
8.4.1. Un exemple de test robuste	130
8.4.2. Un exemple d'estimateur robuste	130
8.4.3. Une définition générale d'un estimateur robuste	131
8.5. Exercices	132
Deuxième partie. Statistique des processus	139
Chapitre 9. Introduction à la statistique des processus	141
9.1. Modélisation d'une famille d'observations	141
9.2. Processus	142
9.3. Statistique des processus	145
9.4. Exercice	146
Chapitre 10. Processus faiblement stationnaires à temps discret	149
10.1. Autocovariance et densité spectrale	149
10.2. Prédiction linéaire et décomposition de Wold	152
10.3. Processus linéaires, modèle ARMA	153
10.4. Estimation de la moyenne d'un processus faiblement stationnaire	156
10.5. Estimation de l'autocovariance	158
10.6. Estimation de la densité spectrale	159
10.7. Exercices	162
Chapitre 11. Processus de Poisson	169
11.1. Introduction	169
11.2. Les axiomes du processus de Poisson	170
11.3. Temps d'interarrivée	172
11.4. Propriétés du processus de Poisson	174
11.5. Notions sur les processus de Poisson généralisés	176
11.6. Statistique des processus de Poisson	177

11.7. Exercices	182
Chapitre 12. Processus de carré intégrable à temps continu	187
12.1. Définitions	187
12.2. Continuité en moyenne quadratique	187
12.3. Intégration en moyenne quadratique	188
12.4. Dérivation en moyenne quadratique	191
12.5. Développement de Karhunen-Loeve	191
12.6. Le processus de Wiener	193
12.7. Notions sur les processus faiblement stationnaires à temps continu	199
12.8. Exercices	201
Chapitre 13. Intégrale stochastique et processus de diffusion	205
13.1. Intégrale de Itô	205
13.2. Processus de diffusion	208
13.3. Processus définis par des équations différentielles stochastiques et par des intégrales stochastiques	213
13.4. Notions sur la statistique des processus de diffusion	216
13.5. Exercices	217
Chapitre 14. Processus ARMA	221
14.1. Processus autorégressif	221
14.2. Processus moyenne mobile	225
14.3. Processus ARMA généraux	226
14.4. Modèles non stationnaires	228
14.4.1. La transformation de Box-Cox	228
14.4.2. Élimination de la tendance par différenciation	229
14.4.3. Élimination de la saisonnalité	230
14.4.4. Introduction de variables exogènes	230
14.5. Statistique des processus ARMA	230
14.5.1. Identification	230
14.5.2. Estimateur	232
14.5.3. Vérification	234
14.6. Processus multidimensionnels	235
14.7. Exercices	236
Chapitre 15. Prévision	241
15.1. Généralités	241
15.2. Méthodes empiriques de prévision	242
15.2.1. La moyenne empirique	242
15.2.2. Le lissage exponentiel	243
15.2.3. Le prédicteur naïf	243
15.2.4. Ajustement tendanciel	244
15.3. Prévision dans le modèle ARIMA	245
15.4. Prévision en temps continu	246
15.5. Exercices	247
Troisième partie. Complément	251

Chapitre 16. Éléments de théorie des probabilités	253
16.1. Espaces mesurés. Espaces probabilisés	253
16.2. Fonctions mesurables. Variables aléatoires réelles	255
16.3. Intégration des variables aléatoires réelles	257
16.4. Vecteurs aléatoires	261
16.5. Indépendance	263
16.6. Vecteurs Gaussiens	264
16.7. Convergences stochastiques	266
16.8. Théorèmes limites	267
Annexe	269
A. Tables statistiques	269
A.1. Nombres au hasard	270
A.2. Fonction de répartition de la loi normale réduite	271
A.3. Densité de la loi normale réduite	272
A.4. Centiles ( $t_p$ ) de la loi de Student	273
A.5. Centiles à 95 % de la loi de Fisher-Snedecor	274
A.6. Centiles à 99 % de la loi de Fisher-Snedecor	275
A.7. Centiles ( $\chi^2_p$ ) de la loi du $\chi^2$ à $n$ degrés de liberté	276
A.8. Probabilités individuelles de la loi de Poisson	277
A.9. Probabilités cumulées de la loi de Poisson	278
A.10. Coefficients binomiaux $C_n^k$ pour $n(\dots) 30$ et $0(\dots) k(\dots) 7$	279
A.11. Coefficients binomiaux $C_n^k$ pour $n(\dots) 30$ et $8(\dots) k(\dots) 15$	280
Bibliographie	281
Index	283

