



Maths 1re année MPSI-PCSI-PTSI : rappels de cours, plus de 250 exercices et problèmes, corrigés détaillés

Marie Allano-Chevalier, Xavier Oudot

Allano-Chevalier, Marie

Oudot, Xavier

Hachette Supérieur, Paris

H prépa. Exercices et problèmes corrigés

ISBN: 2-01-145645-2

Table des Matières

Exercices & Problèmes

Maths 1^{re} année MPSI-PCSI-PTSI

Marie Allano-Chevalier/Xavier Oudot

Hachette *Supérieur*

Partie 1 *Programme de début d'année*

Chapitre 1 _ Nombres complexes	15
1 Ne vous débarrassez pas trop tôt de vos complexes	18
2 Somme de quatre modules	18
3 Nombres complexes de module 1, de somme et de produit fixés	18
4 Complexes et trigonométrie	18
5 Disposition géométrique des racines d'un polynôme	18
6 Équation du quatrième degré	18
7 Racines n -ièmes de l'unité	19
8 Produit de sinus	19
9 Oral Centrale	19
Chapitre 2 _ Fonctions usuelles	24
1 Comparer $\sin(\cos x)$ et $\cos(\sin x)$	28
2 Minoration de $x^y + y^x$ sur \mathbb{R}_+^{*2}	28
3 Étude de fonction	28
4 Une somme d'arcs tangente	28
5 Un produit de cosinus hyperboliques	28
6 Fonction tangente hyperbolique	29
7 Équation fonctionnelle	29
Chapitre 3 _ Équations différentielles linéaires	35
1 Équation linéaire du premier ordre	37
2 Équation linéaire du premier ordre avec paramètre	37
3 Équation de Bernoulli	37
4 Équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants	38
5 Équation différentielle linéaire du deuxième ordre à coefficients non constants	38
6 Équation d'Euler	38
Chapitre 4 _ Géométrie élémentaire du plan et de l'espace	45
1 Utilisation d'homothéties	48

2	Coordonnées barycentriques des points remarquables d'un triangle	48
3	Point de Lemoine d'un triangle	48
4	Point de Fermat d'un triangle	49
5	Triangles pseudo-rectangles	49
6	Somme des distances d'un point aux côtés d'un triangle	49
7	Puissance d'un point par rapport à un cercle	50
8	Faisceaux de cercles orthogonaux	50
9	Droite rencontrant quatre droites données	50
10	Tétraèdres de Moebius	50
11	Cercles de Villarceau	51
	Chapitre 5 _ Courbes planes et coniques	63
1	Étude d'une courbe paramétrée	65
2	Courbe en polaire	65
3	Courbe en polaire (<i>bis</i>)	65
4	Caustique par réflexion	65
5	Ovales de Cassini	66
6	Étude géométrique de la cardioïde	66
7	Alignement de trois points du plan complexe	67
8	Somme des carrés des distances à deux droites	67
9	Application de C^* dans C	67
	Partie 2 Analyse et géométrie différentielle	
	Chapitre 6 _ Nombres réels	85
1	Borne supérieure	87
2	Racine carrée d'une somme et d'une différence	87
3	Inégalité quadrilatérale	87
4	Partie entière d'une somme	87
5	Partie dense	87
6	Distance d'un réel à l'ensemble des entiers	88
	Chapitre 7 _ Suites réelles et complexes	93
1	Limite d'une somme	96
2	Série géométrique	96
3	Limite de $\ln n!/n$	96
4	Suites adjacentes	96
5	Constante d'Euler	97
6	Suite bornée possédant une unique valeur d'adhérence (MPSI)	97
7	Suites de Cauchy (MPSI)	97
8	Fractions continues (MPSI)	98
9	Suite convergente extraite de $\cos(n)$ (MPSI)	99
10	Suites homographiques	99
	Chapitre 8 _ Fonctions d'une variable réelle	109
1	Limite	113
2	Fonctions équivalentes et logarithmes	113

3 Fonctions équivalentes et exponentielles	113
4 Une fonction constante	113
5 Condition suffisante pour qu'une fonction soit affine	113
6 Distance d'un réel à une partie de \mathbb{R}	114
7 Endomorphismes bornés de $(\mathbb{R}, +)$	114
8 Continuité uniforme d'une fonction continue périodique (MPSI)	114
9 Majoration d'une fonction uniformément continue (MPSI)	114
10 Étude d'une limite (MPSI)	114
11 Limite d'une série de fonctions (MPSI)	115
Chapitre 9 _ Dérivation des fonctions d'une variable réelle	122
1 Limite d'une somme	126
2 Tangente passant par l'origine	126
3 Application du théorème de Rolle	126
4 Nombre de zéros d'une fonction	126
5 Théorème de Rolle généralisé	126
6 Propriété de la dérivée à l'extrémité d'un segment	126
7 Direction asymptotique	127
8 Propriétés d'une fonction convexe sur un segment	127
9 Convexité d'une fonction deux fois dérivable	127
10 Inégalités de convexité (MPSI)	127
11 Dérivée n -ième d'un polynôme	127
12 Vers la formule de Taylor-Young	128
13 Dérivabilité de la racine carrée d'une fonction	128
14 Fonctions absolument monotones	129
15 Exemple de fonction continue sur \mathbb{R} , dérivable en aucun point (MPSI)	129
Chapitre 10 _ Intégration et calculs de primitives	141
1 Une intégrale avec arc tangente	144
2 Changement de variable à risque	144
3 Intégrale abélienne	144
4 Étude d'une fonction définie par une intégrale	144
5 Primitive de fonction trigonométrique	144
6 Irrationalité de Pi	145
7 Calcul d'intégrales par récurrence (MPSI)	145
8 Intégrales de Wallis et calcul de $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$	145
9 Fonctions convexes et intégrale	146
10 Somme de Riemann et autre (MPSI)	146
11 Première formule de la moyenne	146
12 Deuxième formule de la moyenne (MPSI)	147
13 Fonctions elliptiques de Jacobi	147
Chapitre 11 _ Formules de Taylor et développements limités	161
1 Une limite	163
2 Recherche d'équivalent	163

3 Un peu plus difficile	163
4 Une équivalence utile	163
5 Majoration de la dérivée d'une fonction de classe C^2	163
6 Primitives et développements limités	163
7 Étude de fonction	164
Chapitre 12 _ Approximations	171
1 Étude d'une suite récurrente	173
2 Suite récurrente homographique	173
3 Suite récurrente avec discontinuité	173
4 Autre exemple de suite récurrente (MPSI)	173
5 Application du théorème du point fixe	174
6 Approximation de $\cos \pi/9$	174
Chapitre 13 _ Fonctions de deux variables	180
1 Prolongement par continuité en $(0, 0)$	183
2 Recherche d'extremum	183
3 Équation aux dérivées partielles du second ordre	183
4 Fonction de deux variables et intégrale	183
5 Jacobien d'une application de $M_2(\mathbb{R})$ dans $M_2(\mathbb{R})$ (MPSI)	184
Chapitre 14 _ Calcul intégral et champs de vecteurs	190
1 Intégrale double sur une couronne elliptique	192
2 Calcul d'une intégrale double à l'aide d'un changement de variables	192
3 Une intégrale double pour calculer une intégrale simple	192
4 Intégrale de Gauss	192
5 D'une intégrale curviligne à une intégrale double	193
6 Une intégrale curviligne dans \mathbb{R}^3	193
Chapitre 15 _ Étude métrique des courbes planes	199
1 Longueur et courbure	201
2 Développée d'une cycloïde	201
3 Développée d'une conique	201
4 Comparaison de longueurs	201
5 Spirale logarithmique	202
6 Courbe, vous avez dit courbe ?	203
7 Repère de Frenet et courbure (CCP)	203
Partie 3 Algèbre et géométrie euclidienne	
Chapitre 16 _ Nombres entiers naturels - Combinatoire	215
1 Somme des minimums	217
2 Une formule de combinatoire	217
3 Une formule de combinatoire (bis)	217
4 Couples de parties dont l'intersection est un singleton	217
5 Sommes de coefficients binomiaux	217
6 Encore des sommes de coefficients binomiaux	217
7 Récurrence	218

8	Nombre de suites croissantes	218
9	Somme des cardinaux des parties de E	218
10	Applications idempotentes	218
11	Somme des cubes des n premiers entiers	218
12	Somme des puissances p -ièmes des n premiers entiers	219
13	Nombre d'invariants d'une permutation	219
14	Promenade sur un quadrillage	219
	Chapitre 17 _ Nombres entiers relatifs - Arithmétique	229
1	Une équation diophantienne	231
2	Propriétés arithmétiques de la suite de Fibonacci	231
3	Triplets pythagoriciens	231
4	Nombres de Fermat	231
5	Nombre de diviseurs d'un entier	232
6	Théorème de Wilson	232
7	Nombre d'entiers premiers inférieurs ou égaux à 2^m	232
	Chapitre 18 _ Structures algébriques usuelles	240
1	Normalisateur d'une partie d'un groupe	245
2	Groupe engendré par deux éléments	245
3	Groupe engendré par deux éléments (MPSI)	245
4	Oral C.C.P.	245
5	Un exemple d'anneau	246
6	Un anneau commutatif	246
7	Anneaux booléens	246
8	Anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (MPSI)	247
9	Un anneau d'extension quadratique	247
10	De l'anneau au corps	247
	Chapitre 19 _ Polynômes	255
1	Polynôme vérifiant une égalité	258
2	Oral Mines PC*	258
3	Autour de l'identité de Bezout (MPSI)	258
4	Polynôme réciproque	258
5	Polynômes de Tchebychev de seconde espèce (MPSI)	258
6	Polynômes définis par une relation de récurrence	259
7	ESTP 1995, sujet 4	259
8	Polynômes et nombres de Bernoulli	259
9	Majoration des racines d'un polynôme	260
10	Racines rationnelles d'un polynôme (MPSI)	260
11	Quelques sommes de séries classiques	261
12	Polynôme minimal d'un élément d'une K-algèbre (MPSI)	261
13	Polynômes primitifs (MPSI)	262
14	Polynômes cyclotomiques (MPSI)	262
	Chapitre 20 _ Fractions rationnelles (MPSI)	280

1 Décomposition en éléments simples de première espèce	282
2 Décompositions dans $R(X)$	282
3 Décomposition dans $C(X)$ et $R(X)$	282
4 Somme des valeurs d'un polynôme en les racines de l'unité	282
5 Décomposition dans $R(X)$	282
6 Fraction ayant des résidus nuls en ses pôles multiples	283
7 Calcul d'une somme	283
8 Limite d'une somme	283
Chapitre 21 _ Espaces vectoriels	289
1 Ensemble des milieux des segments joignant deux convexes	293
2 Deux applications linéaires	293
3 Projecteurs	293
4 Projecteurs qui commutent	293
5 Injectivité et surjectivité d'un endomorphisme	294
6 Endomorphismes inversibles à droite	294
7 Système différentiel linéaire	294
Chapitre 22 _ Dimension des espaces vectoriels	303
1 Rang de deux endomorphismes	305
2 Endomorphisme de rang 1	305
3 Noyaux et images itérés	305
4 Sous-groupe fini de $GL(E)$	305
5 Famille libre dans le Q -espace vectoriel R (MPSI)	305
6 Un sous-corps de R (MPSI)	306
7 Ensemble des multiples d'un polynôme (MPSI)	306
8 Polynôme minimal d'un endomorphisme (MPSI)	307
Chapitre 23 _ Matrices	315
1 Une matrice inversible	318
2 Deux matrices remarquables	318
3 Suites mutuellement récurrentes	318
4 Une algèbre de matrices	319
5 Matrices triangulaires supérieures	319
6 Matrices semi-magiques	319
7 Exponentielle d'une matrice nilpotente	320
8 Calcul du polynôme minimal d'une matrice carrée (MPSI)	321
9 Calcul des puissances d'une matrice	322
10 Étude d'un endomorphisme nilpotent	322
11 Rang d'une matrice carrée d'ordre 4	323
12 Rang d'une matrice d'ordre 4, nilpotente d'indice 3	323
13 Morphisme multiplicatif de $M_n(K)$ dans K	323
14 Un système avec paramètre	324
15 Système linéaire et polynômes	324
Chapitre 24 _ Groupe symétrique et déterminants (MPSI)	339

1 Signature d'une permutation	343
2 Morphismes de S_n dans $\{-1, 1\}$	343
3 Commutant d'une permutation	343
4 Un déterminant d'ordre 4	343
5 Un calcul par récurrence	344
6 Dérivée d'un déterminant	344
7 Une matrice non inversible	344
8 Une propriété des déterminants	344
9 Déterminant de quatre blocs carrés	344
10 Polynôme caractéristique de l'inverse d'une matrice	345
11 Déterminant circulant	345
Chapitre 25 _ Espaces vectoriels euclidiens	353
1 Matrice orthogonale	356
2 Matrice orthogonale dont - 1 n'est pas valeur propre	356
3 Endomorphismes d'un espace vectoriel euclidien	356
4 Adjoint d'un endomorphisme	357
5 Polynômes orthogonaux	358
6 Polynômes de Tchebychev de première espèce	358
7 Polynômes de Tchebychev de deuxième espèce	359
8 Polynômes de Laguerre	359
9 Équation différentielle et polynômes orthogonaux	360
Chapitre 26 _ Transformations du plan et de l'espace	375
1 Rotations conjuguées	377
2 Composée de vissages	377
3 Sous-groupe fini du groupe des déplacements du plan	377
4 Expression analytique d'une transformation de l'espace	377
5 Expression analytique d'une projection orthogonale ou d'une symétrie orthogonale	377
6 Quaternions	378